

*М.А.Галахов, А.Н.Бурмистров*

**РАСЧЕТ  
ПОДШИПНИКОВЫХ  
УЗЛОВ**



«МАШИНОСТРОЕНИЕ»

*М.А.Галахов, А.Н.Бурмистров*

# РАСЧЕТ ПОДШИПНИКОВЫХ УЗЛОВ



МОСКВА  
«МАШИНОСТРОЕНИЕ»  
1988

ББК 34.445

Г 15

УДК 621.822

Рецензент Г.П. Грошев

Г 15

Галахов М.А., Бурмистров А.Н.

Расчет подшипниковых узлов. — М.: Машиностроение,

1988. — 272 с.: ил.

ISBN 5-217-00026-9

Приведены расчетные схемы подшипниковых узлов и инженерные методы расчета их эксплуатационных характеристик. Даны примеры расчета ответственных подшипниковых узлов.

Для конструкторов, проектировщиков, расчетчиков, технологов и других инженерно-технических работников различных отраслей машиностроения.

Г 2702000000-192  
038(01)-88 192-88

ББК 34.445

ISBN 5-217-00026-9

© Издательство "Машиностроение", 1988

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Подшипниковые узлы (ПУ) являются важнейшими структурными элементами машин и приборов и составляют основную часть узлов трения. Отказы техники, как правило, происходят из-за отказов ПУ (наряду с отказами других узлов трения), которые, таким образом, ограничивают долговечность машин и приборов. Даже при достаточно качественном изготовлении деталей ПУ, например, подшипника качения или вкладыша, характеристики ПУ могут оказаться неудовлетворительными, и произойдет внезапный отказ. При этом под отказом следует понимать не обязательно разрушение труящихся (рабочих) поверхностей, а выход одной из характеристик ПУ за допускаемые пределы. Так, для ПУ, применяемых в системах управления, критериями отказа могут быть увеличение нестабильности момента сопротивления вращению ротора, чрезмерно большое и непостоянное смещение центра масс ротора, нестабильность частоты и амплитуды радиальных и осевых биений ротора на некоторых частотах. Для шпиндельных ПУ типичные критерии отказа — малая точность вращения, повышенная вибрация, малая жесткость, большой момент сопротивления вращению и тепловое заклинивание. ПУ газотурбинных двигателей часто выходят из строя вследствие проскальзывания комплекта тел качения вместе с сепаратором относительно внутреннего кольца. Это проскальзывание приводит к износу рабочих поверхностей, недопустимому радиальному смещению вала и возможному заклиниванию турбины. ПУ букс подвижного состава отказывают из-за разрыва сепаратора, вызванного силами его взаимодействия с телами качения, из-за усталостного выкрашивания дорожек качения, боковых поверхностей роликов, изнашивания торцов роликов и рабочих поверхностей бортиков колец, из-за сколов бортиков под действием импульсной осевой нагрузки. ПУ сельхозтехники выходят из строя в основном из-за абразивного изнашивания, связанного с попаданием грязи и пыли. Наиболее распространенный критерий отказа ПУ общего применения, работающих в автомобилях, тракторах, насосах, редукторах, станках, подъемно-транспортном оборудовании, — усталостное разрушение. В то же время для ПУ специального применения важны и другие характеристики, такие, как жесткость, уровень и спектр вибрации, момент сопротивления вращению, долговечность.

Таким образом, во-первых, долговечность ПУ далеко не всегда совпадает с циклической долговечностью рабочих поверхностей подшипника, а часто оказывается во много раз меньшей и даже равной нулю, как, например, для ПУ, не имеющих требуемых характеристик уже при установке в изделие. Во-вторых, достаточная долговечность отдельных деталей ПУ, испытанных на стендах, не гарантирует достаточной долговечности ПУ. Последнее обстоятельство связано с тем, что нагрузки, действующие в узле, а также температуры могут существенно отличаться от стендовых. Кроме того, сборка и монтаж меняют зазоры, натяги и форму рабочих поверхностей ПУ. Особенно отчетливо противоречие между качеством ПУ и собст-

венно подшипника проявляется в узлах с подшипниками качения. Подшипники качения производят на подшипниковых заводах в огромных количествах и в широком ассортименте на автоматических линиях и при достаточно совершенной технологии, однако особенности работы ПУ при изготовлении подшипника не учитываются. Это приводит, например, к тому, что параметры волнистости и шероховатости рабочих поверхностей подшипника определенных габаритов, предназначенного для установки в высокоскоростной шпиндель металлообрабатывающего станка, не соответствуют требуемым. Бывают более сложные ситуации. Например, шариковые подшипники для шпинделя имеют малую предельную быстроходность, причиной которой является значительное тепловыделение от трения скольжения и трения качения, приводящее к тепловому расширению внутреннего кольца и шариков и тепловому заклиниванию (недопустимому возрастанию момента сопротивления вращению вала). Решение проблемы требует конструктивных изменений в подшипнике. Снизить тепловыделение в 1,5 раза и поднять быстроходность можно, изголовив подшипник с большим числом более мелких шариков. Такие подшипники, разработанные В.Ф. Григорьевым, показали достаточно высокую быстроходность. Ясно, что при системном подходе к проектированию ПУ можно заранее, на стадии проектирования, обеспечить требуемое тепловыделение и, как следствие, требуемую предельную быстроходность подшипника.

Для узла, применяемого в приборах, состоящего из ротора и двух шарикоподшипниковых опор, бывает сложно избежать биений ротора на некоторых частотах вынужденных колебаний, вызванных отклонениями формы и размеров дорожек и шариков. Средние диаметры шариков в двух подшипниках оказываются различными из-за технологического разброса, что непременно приводит к биениям. Для устранения низкочастотных биений подшипники с различными диаметрами шариков следует установить так, чтобы в одном подшипнике все шарики были меньшего диаметра, чем в другом. Однако номенклатура имеющихся высокоточных подшипников не допускает такого выбора. При специализированном проектировании подшипников для ПУ в целом можно было бы избежать больших потерь, связанных с отказами дорогостоящих изделий, содержащих указанные ПУ.

В электродвигателях, особенно прецизионных, содержащих ротор на шарикоподшипниковых опорах, стараются избегать резонансов, возникающих при совпадении или близости вынуждающих и собственных частот. Такие резонансы снижают точность вращения, повышают уровень вибрации и способствуют падению долговечности из-за значительного увеличения динамической нагрузки на шарик по сравнению с номинальной, рассчитанной в условиях статического нагружения. Спектр вынуждающих сил определяется внутренними размерами подшипника и отклонениями формы и размеров рабочих поверхностей. Частоты в этом спектре настолько плотно расположены в диапазоне возможных значений собственных частот, что при конструировании очень трудно назначить собственные частоты

радиальных, осевых и угловых колебаний для обеспечения требуемой разности возмущающей и собственной частот. Изменять же собственные частоты в более широком диапазоне не всегда можно, так как они определяются усилием натяга и размерами узла. Увеличение натяга снижает долговечность, а его уменьшение приводит к росту уровня вибрации. Размеры узла определяют при проектировании всего изделия в целом, и их нельзя произвольно изменить. Существуют способы прореживания спектра за счет совмещения различных вынуждающих частот. Это можно сделать специальным выбором размеров шарика и дорожек. Заводы при производстве шариковых подшипников не решают задачу обеспечения нужного спектра вынужденных колебаний ротора. Поэтому даже при очень высоком качестве подшипников характеристики узла оказываются неудовлетворительными.

Цилиндрические роликовые подшипники для букс подвижного состава подвергаются наряду с радиальными эксплуатационным осевым нагрузкам. Эти нагрузки имеют динамический характер и довольно сложное распределение во времени. Осевая нагрузка воспринимается торцом ролика и бортиком кольца. В серийных подшипниках бортик и торец делают плоскими, без учета специфики работы подшипника в узле. При малейшем перекосе корпуса буксы относительно шейки оси колесной пары область торцевого контакта превращается из сегмента в точку, контактное давление резко возрастает, а условия смазывания ухудшаются, так как острый край ролика срезает смазочный материал с борта. Это приводит к значительной пластической деформации и износу торца и бортика. После начального периода эксплуатации ролики имеют закругленные торцы, а бортик оказывается смятым и "отваленным", иногда скальвается. В подшипнике, таким образом, происходит нежелательная и опасная эксплуатационная доводка роликов до нужной формы. Указанных явлений можно было бы избежать, изголовив ролики со специально профилированными сферическими или торOIDальными торцами.

Роликовые подшипники для станков, транспорта проектируют, как правило, без учета эксплуатационного перекоса и вытекающей отсюда несоосности колец. В частности, меридиан (образующая) ролика выполняется прямолинейным, с фасками и редко со скосами. Такая форма меридiana приводит при наличии перекосов к весьма неравномерному распределению контактного давления вдоль вытянутой области контакта. Давление у краев контакта намного превосходит среднее давление, что ведет к преждевременному усталостному выкрашиванию дорожек. Фактическая долговечность оказывается в несколько раз меньше расчетной, вычисленной без учета перекоса. Имеет смысл выполнять меридиан ролика не прямолинейным, а криволинейным, например, составленным из одной или несколько дуг окружностей, чтобы снизить максимальное контактное давление, сделать его возможно более близким к среднему. Подшипник с такими роликами имеет повышенную долговечность. Следует, однако, иметь в виду, что параметры оптимизированных очертаний зависят от диапазона угла перекоса, который должен быть задан из условий работы

узла. Для типичного диапазона углов перекоса можно выбрать некоторый достаточный универсальный меридиан.

В ПУ, отказывающих из-за разрыва сепаратора или нестабильности момента сопротивления вращению, важно правильно выбрать осевой и радиальный зазоры в окнах, зазор плавания, форму окон, способ базирования сепаратора, его материал. В приборных подшипниках для обеспечения стабильности смазывания целесообразно изготавливать сепаратор пористым и пропитывать его маслом, делать канавку на наружной поверхности сепаратора, базировать его относительно шариков. Если, как, например, в подшипниках бусс, силы взаимодействия между телами качения и сепаратором близки к допускаемым значениям или превышают их, то необходим расчет этих сил для рационального выбора параметров подшипника.

Из сказанного следует, что избежать отказов ПУ можно только при системном подходе к расчету и проектированию ПУ, предназначенного для установки в изделие, в целом. Исходя из назначения машины или прибора, формулируют требования к характеристикам ПУ: габаритам, массе, долговечности, допускаемому износу, точности вращения, уровню вибрации, жесткости, моменту сопротивления вращению. Расчет подшипника входит в расчет ПУ как составная часть, причем характеристики подшипника (например, жесткость) являются параметрами ПУ при расчете, например, его собственных частот. Для оптимального выбора параметров ПУ необходим расчет влияния этих параметров на характеристики.

Расчет ПУ является по существу междисциплинарной задачей. В книге сделана попытка изложения основ подхода к расчету ПУ, элементов системного анализа, принципов и уровней моделирования, расчетных схем ПУ, методов, методик, результатов и примеров расчета.

В гл. 1 даны примеры применения ПУ в машинах и приборах, приведена схема типичного ПУ. В гл. 2 содержатся некоторые результаты решения задач механики контакта. Изложены теория Герца, метод решения контактных задач для профилированных тел сложной формы, описаны элементы теории микропроскальзывания в контакте, приведены формулы для расчета напряженного состояния материала под областью контакта. В гл. 3 представлены расчетные схемы ПУ, описаны параметры ПУ, даны методы статического расчета, изложена теория вибрации и низкочастотных биений, приведены результаты исследования кинематики подшипников и сопротивления вращению ротора, особенности динамики сепаратора. В гл. 4 рассмотрены методы расчета долговечности подшипников. Изложение сопровождается примерами.

В книге приведены методы расчета ПУ в основном с радиально-упорными шариковыми и цилиндрическими роликовыми подшипниками. Многие результаты применимы и к подшипникам других типов: радиальным, упорно-радиальным и упорным шариковым, в том числе многорядным, коническим, игольчатым. Это, в частности, относится к формулам и алгоритмам для решения контактных задач, для выбора параметров торцового контакта, к основным выводам теорий микропроскальзывания, вибрации и долговечности.

Разумеется, в ответственных случаях результаты расчета необходимо проверять экспериментально.

В подготовке материалов книги принимали участие О.Ю. Анферов, А.И. Беспорточный (гл. 4) и С.Н. Козлов (подразд. 2.4).

## ВВЕДЕНИЕ

Применяемые в технике ПУ представляют собой сложные механические системы. В особенности трудны для описания и расчета ПУ с подшипниками качения. ПУ состоит из ротора, вращающегося на нескольких опорах с подшипниками корпуса, в который вмонтированы опоры, системы смазывания, уплотнений, демпферов, элементов привода. Ротором называют вращающуюся осесимметричную деталь: маховик в комплекте с ротором электродвигателя, вал газовой турбины, шпиндель токарного, сверлильного или шлифовального станка, планшайбу, колесную пару вагона или локомотива, ролик конвейера, колесо экипажа, зубчатое колесо на валу. Подшипник состоит из наружного и внутреннего колец, тел качения (шариков или роликов), сепаратора. При выполнении одного или обоих колец вместе с корпусом или валом опора называется совмещенной. Корпус представляет собой силовую конструкцию, внутри которой расположены опоры и ротор. Корпус, в частности, обеспечивает заданное положение опор относительно ротора, не допуская их больших перемещений. Смазывание осуществляют различными способами: масляным туманом, каплями, струей и др. Уплотнения предохраняют ПУ от загрязнений, герметизируют его. Резиновые или пружинные демпферы ставят для управления уровнем и спектром вибрации. Привод ротора может быть механическим, электрическим, пневматическим. Вид привода влияет на вибрационные и жесткостные характеристики ПУ, на его ресурс.

ПУ — система с весьма большим числом степеней свободы. По шесть степеней свободы имеют ротор, корпус, тела качения, сепараторы. При десяти телах качения и двух опорах общее число степеней свободы превышает сто. Ранее ПУ рассматривали как систему с одной степенью свободы — углом поворота ротора и характеризовали двумя величинами: долговечностью и моментом сопротивления вращению, вычисляемым как произведение нагрузки на средний радиус подшипника и некий приведенный (определенный экспериментально) коэффициент трения. В настоящее время, в зависимости от функционального назначения ПУ, надо учитывать значительно большее число степеней свободы, а иногда и все. Например, при расчете осевой жесткости ПУ требуется знать осевое перемещение, при расчете радиальной жесткости — радиальные перемещения, а при расчете угловой жесткости — также и угловые перемещения ротора. При расчете сил и моментов реакции подшипников на перемещение ротора необходимо рассмат-

ривать перемещения всех шариков в плоскостях, проходящих через их центры и ось подшипника. Таким образом, силовой расчет ПУ требует учета около сорока степеней свободы. Если надо знать момент сопротивления вращению, то не обойтись без анализа кинематики и проскальзывания шариков. Это еще 80 степеней свободы при двух опорах с десятью шариками каждая. Неполный учет степеней свободы приводит к потере информации и значительным погрешностям. Это объясняется тем, что на момент сопротивления вращению влияют и составляющая угловой скорости, перпендикулярная области контакта, и дифференциальное проскальзывание, и составляющая угловой скорости, направленная вдоль касательной к окружности центров, и окружное проскальзывание, и сопротивление качению. При исследовании нестабильности момента сопротивления вращению, биений ротора и их характеристик приходится изучать динамику сепараторов, каждый из которых имеет шесть степеней свободы. Теоретическая механика рассматривает системы с большим числом степеней свободы, однако ПУ является для нее нетрадиционным объектом, поскольку ограничения, накладываемые на движение деталей подшипника, нельзя считать связями. Эти ограничения не позволяют уменьшить число степеней свободы, и весь ПУ представляет собой свободную систему.

Итак, при расчете характеристик наиболее ответственных ПУ узел приходится описывать системой обыкновенных дифференциальных уравнений динамики второго порядка, которых около ста. Решение такой системы уравнений даже при заданных значениях правых частей представляет большие трудности в связи с тем, что происходящие в узле процессы имеют различные частоты, которые могут отличаться на 6...7 порядков. Например, момент сопротивления вращению приборного подшипника может меняться с частотой 1 Гц, частота же радиальных колебаний шарика составляет  $10^7$  Гц. Программы численного решения дифференциальных уравнений предусматривают решение задачи с начальными данными по шагам. Если шаг велик и близок к периоду низкочастотных процессов, то полностью теряется информация о высокочастотных процессах и решение оказывается ошибочным из-за их неучета. Если же шаг мал и близок к периоду высокочастотных процессов, то на современных ЭВМ удается рассчитать работу ПУ в течение десятков или сотен оборотов. Такой расчет подобен мгновенной фотографии ПУ, причем в начальный период, когда узел еще не вышел на стационарный режим работы. Увеличение быстродействия ЭВМ, по-видимому, не приведет к повышению точности на большом интервале времени за счет уменьшения шага, поскольку большое число шагов ведет к увеличению погрешностей. Вряд ли будет в ближайшее время возможно рассчитать работу ПУ в течение миллиона оборотов, что примерно соответствует одному часу работы.

Для расчета медленных процессов в ПУ применяют различные методы аналитического усреднения уравнений по периоду высокочастотного процесса. Проведение усреднения — довольно сложная операция вследствие громоздкости правых частей уравнений, однако в результате получаются системы уравнений меньшего порядка, которые уже допускают численное

или даже аналитическое решение. Усреднение можно проводить в несколько этапов, захватывая все более низкочастотные процессы и получая все более простые системы дифференциальных уравнений. При этом, конечно, часть информации о работе ПУ, касающуюся высокочастотных процессов, теряют.

Правые части дифференциальных уравнений, описывающих динамику ПУ, представляют собой силы взаимодействия деталей узла. Вычисление этих сил — трудная и до настоящего времени не полностью решенная задача. Даже нормальные силы взаимодействия деталей при их заданном относительном сближении не всегда можно точно определить из-за сложности расчета деформаций всей детали (например, сепаратора) и учета податливости неровностей и поверхностных пленок. Касательные силы определяют по какой-либо теории трения. Наиболее достоверные результаты получаются для режима гидродинамического трения, поскольку в этом случае можно свести задачу к решению уравнений теории смазки в зазоре между двумя поверхностями. Однако и здесь имеются трудности, впрочем, частично преодоленные. Распределение давления в смазочном слое определяют из решения контактно-гидродинамических задач, сводящихся к системам интегрально-дифференциальных уравнений с неизвестными границами. Границы могут быть неизвестны и при режиме ограниченной смазки, который часто возникает в контакте даже при обильном смазывании.

Касательное напряжение в смазочном слое находят, используя соответствующую реологическую модель смазочного материала, который при больших скоростях сдвиговой деформации (примерно  $10^6$  с<sup>-1</sup>) ведет себя отнюдь не как ньютонаевская жидкость, а проявляет релаксационные свойства. В частности, касательное напряжение устанавливается не сразу и не успевает достичь стационарного значения в течение времени пребывания частицы смазочного материала в области высокого давления. Кроме того, касательное напряжение нелинейно зависит от скорости сдвигового течения. Реологические модели смазочного материала построены на основании теории конечных деформаций. Вязкость, высокочастотный модуль сдвига смазочных материалов — трудно измеряемые характеристики, поскольку вискозиметр должен быть помещен в камеру высокого давления (до 1,5 ГПа). В настоящее время значения вязкости и модуля сдвига для ряда масел получены в работах Е.В. Золотых и Б.П. Дьяченко. Касательная сила в контакте — результат интегрирования касательного напряжения по области гидродинамического контакта. В каждой точке касательное напряжение зависит от скорости относительного проскальзывания поверхностей, т.е. от кинематики деталей.

Таким образом, правая часть какого-либо дифференциального уравнения динамики оказывается довольно сложным выражением. Режим ограниченной смазки с большой достоверностью рассчитан быть не может без решения задачи о миграции смазочного материала по поверхностям деталей и о его распределении. Нельзя достоверно предсказать, сколько смазочного материала находится на каждой детали и сколько в контакте,

так как на распределение влияют поверхностное натяжение и предел текучести смазочного материала, вибрация, плотность поверхностной энергии деталей, температурное поле. В связи с этим при исследовании режима ограниченной смазки необходимо проведение эксперимента.

Параметры смазочного материала, в особенности его вязкость, в большой степени зависят от температуры, поэтому расчет температурного поля ПУ чрезвычайно важен для определения его характеристик. Кроме того, термоупругие деформации заметно меняют распределение контактного давления и его значение и могут даже привести к тепловому заклиниванию подшипника. Расчет поля температур — чрезвычайно трудная задача, которую решают экспериментально. Коэффициенты теплоотдачи, тепловые сопротивления в контактах, как правило, не удается точно рассчитать, хотя распределение температуры в деталях при заданных температуре и тепловом потоке на поверхности можно получить, решая аналитически или численно уравнение теплопроводности. Для определения температур в некоторых точках используют специально сконструированные термопары; результаты измерений позволяют затем найти все поле температур расчетным путем.

Долговечность поверхностей, нагруженных переменным давлением, во многих случаях определяет долговечность ПУ. Расчет долговечности представляет собой серьезную проблему. Распределение давления находят из решения контактных задач теории упругости и иногда — теории пластичности. Теория Герца применима к решению задач о контакте тел, аппроксимирующихся поверхностями второго порядка, и позволяет найти максимальное контактное давление, размеры области контакта и сближение контактирующих тел. Однако эта теория не всегда годится для контакта дорожки и ролика со сложным меридианом, для контакта торца ролика и бортика, для контакта тел качения с сепаратором. Причина ограниченного применения в том, что размер области контакта может оказаться больше характерных радиусов кривизны поверхностей. В данной книге изложены некоторые результаты поиска решения таких контактных задач.

По заданному нормальному и касательному нагружениям поверхности находят напряженное состояние детали под областью контакта, определяют наиболее опасные точки и действующие в них максимальные касательные и растягивающие напряжения. Эти напряжения должны быть сопоставлены с допускаемыми значениями напряжений, которые не всегда известны, так как зависят от многих факторов: химического состава материала, технологии его выплавки, наличия металлических и неметаллических включений, их формы и размеров, поверхностного упрочнения, наличия на поверхности смазочного материала, который, проникая под высоким контактным давлением в трещину, может расклинить ее. Механика усталостного разрушения материала во многом неясна, поэтому для расчета применяют феноменологические теории, одна из которых разработана еще в 40-х годах Лундбергом и Пальмгреном. В этих теориях используется вероятностный подход, предполагается определенный закон разрушения частицы материала, а полученные формулы для расчета долговечности ПУ содержат несколь-

ко постоянных, определяемых впоследствии из испытаний на усталость подшипников. Указанные теории должны уточняться и в дальнейшем использовать физически содержательные постоянные, связанные с прочностью связей между отдельными структурными элементами материала и даже между атомами кристаллической структуры.

Базой для достоверного расчета ПУ является эксперимент. Интерферометрические и емкостные методы, методы определения электрической прочности и среднеинтегрального времени контакта позволяют довольно достоверно определить толщину смазочного слоя в контактах и несущую способность контактов. Дисковые машины трения дают значения коэффициентов трения для различных режимов качения и скольжения. По измеренным амплитудам и частотам вибрации ротора, дающим картину динамики ПУ, проводят его диагностирование на основании заранее сформулированных признаков. Измерение температур в различных точках термопарами или с помощью термовидения позволяет воссоздать температурное поле в труднодоступных для измерения местах. Определение жесткостей дает возможность проверить силовой расчет. Испытания на усталость партий подшипников необходимы для расчета долговечности. Измерение износа дорожек и тел качения дает возможность сопоставить скорости процессов усталостного разрушения и изнашивания и определить, какой из них преобладает.

Однако экспериментальный путь улучшения характеристик ПУ не всегда возможен. Причина в том, что ПУ имеет сотни параметров, влияющих на эксплуатационные характеристики, и даже планируемый эксперимент, направленный на улучшение характеристик, будет длиться годами, поскольку, например, для некоторых высокоточных ПУ циклы сборки и разборки узла занимают несколько месяцев. Исключительно велика и стоимость такого эксперимента. Поэтому основным инструментом расчета и усовершенствования ПУ является построение и исследование его математической модели, опирающейся на некоторые базовые эксперименты.

Из сказанного выше следует, что расчет ПУ давно перестал быть рядовой инженерной задачей, а требует привлечения сразу многих наук: математического моделирования, аналитических и численных методов решения дифференциальных, интегральных и интегрально-дифференциальных уравнений, динамики систем твердых тел, теории упругости, динамики жидкости, реологии, теории теплопередачи, физики высоких давлений и быстро протекающих процессов, метрологии, машиноведения и деталей машин, металловедения и материаловедения, физики прочности, химии смазочных материалов, механики полимеров. Теория расчета ПУ не является завершенной. Она должна быть построена как система, состоящая из блоков, объединенных связями и доведенная до пакета программ с банком данных о ПУ и программой оптимизации по назначенному потребителем критериям. В книге сделаны попытки начать построение такой системы.

Изучение ПУ связано с именами отечественных исследователей. В.Ф. Журавлев развел теорию вибрации роторов на двух шариковых подшипниках, собранных с предварительным осевым натягом и имеющих техно-

логические отклонения формы. Им предложены формулы для жесткостей ПУ, спектра и уровня вибрации, разработаны методы расчета вибрации гироскопов. С.А. Харламов решил ряд задач динамики высокоточных приборных шарикоподшипников. В.М. Петров, М.И. Курушин, П.Г. Рusanov разработали методы и программы исследования динамики шариковых подшипников для различного применения. А.И. Данильченко и Ю.Г. Соколов исследовали динамику роликовых подшипников авиационных газотурбинных двигателей. К.И. Заппаров применил к расчету характеристики ПУ эластогидродинамическую теорию смазки, исследовал кинематику и вибрацию шариковых подшипников. В.П. Ковалев и авторы данной книги развили общий подход к расчету ПУ, предложили методы решения контактных задач для тел сложной формы, исследовали динамику сепаратора, момент сопротивления вращению, разработали программы расчета характеристик ПУ. К.А. Бежанов изучал возможности стабилизации осевого натяга в шарико-подшипниковых узлах. Б.В. Федосов развил теорию низкочастотных биений в приборных ПУ. Е.М. Филатова и С.И. Матюшин занимались вопросами исследования и проектирования ПУ для букс подвижного состава, разработали роликовые подшипники с оптимизированными роликами. А.С. Райков и Э.В. Строганова создали методы вибродиагностики ПУ до их установки в изделия, предложили ПУ с увеличенным в несколько раз ресурсом. Ю.М. Санько разработал теоретико-экспериментальные методы определения несущей способности смазочного слоя в ПУ и применил их к диагностике ПУ в изделиях. П.П. Усов и В.В. Широбоков развили методы расчета коэффициентов трения и толщины смазочного слоя в эластогидродинамических контактах. А.И. Проценко экспериментально изучил влияние различных факторов на монтажную высоту и момент сопротивления вращению шариковых подшипников. О.Н. Черменский, А.В. Орлов и В.М. Нестеров провели работы, позволяющие приблизиться к пониманию механизма усталостного разрушения поверхностей деталей ПУ, к оптимизации формы поверхностей контакта. Н.П. Маслов и В.М. Григорьев изучали изнашивание и динамические характеристики высокоточных подшипников, Е.А. Панфилов, В.А. Матвеев и В.Б. Бальмонт – авторы ряда разработок по прецизионным и совмещенным опорам.

Несмотря на эти уже полученные результаты, расчет ПУ является развивающейся дисциплиной, поскольку практика ставит перед исследователями все новые и новые задачи.

## ГЛАВА 1

### ПОДШИПНИКОВЫЕ УЗЛЫ МАШИН И ПРИБОРОВ

#### 1.1. НЕКОТОРЫЕ КОНСТРУКЦИИ ПОДШИПНИКОВЫХ УЗЛОВ

Рассмотрим несколько примеров применения ПУ в технике.

На рис. 1.1 изображена часть газовой турбины. Частота вращения ротора турбины  $50\ 000 \text{ мин}^{-1}$ , на выходе встроенного редуктора –  $6\ 000 \text{ мин}^{-1}$ . Радиальная нагрузка на подшипники создается весом ротора турбины. Осевая нагрузка равна разности осевых сил, действующих на турбину и на компрессор. Со стороны турбины установлен прецизионный цилиндрический роликовый подшипник, являющийся совмещенной опорой, так как комплект роликов катится непосредственно по поверхности вала. Радиальный зазор в холодном состоянии от  $0,025$  до  $0,035$  мм. Подшипник расположен вблизи горячего диска турбины. Для сохранения стабильности размеров при высоких рабочих температурах подшипник подвергнут специальной термообработке. Сепаратор изготовлен из термостойкого материала (бронзы). Разность температур колец может достигать десятков градусов. В качестве фиксирующей опоры применен прецизионный шариковый подшипник, который воспринимает как радиальную, так и осевую нагрузку. Размеры этого подшипника также должны быть стабильны, однако рабочая температура здесь не настолько высока, чтобы надо было применять термостойкий сепаратор, – он изготовлен из легкого сплава. Поскольку частота вращения велика и турбина должна надежно работать при угле наклона к горизонту до  $35^\circ$ , предусмотрено циркуляционное смазывание под давлением; при этом масло впрыскивается в подшипник со стороны торца. Расход масла в подшипниках больших турбин достигает нескольких литров в минуту, тем не менее не всегда удается обеспечить обильное смазывание контактов – наступает масляное голодание.

Большую проблему представляет тепловой расчет узла. Узел разбивают на элементы, для каждого элемента приближенно или точно решают уравнение теплопроводности, а для описания тепlop передачи между элементами используют уравнение теплового баланса, включающее унос теплоты маслом (Рамбаргер, В.М. Демидович). Вибрация ротора турбины возникает вследствие дисбаланса ротора и неравномерности потока газа, направленного на лопатки. При пуске отмечается проскальзывание: комплект роликов вместе с сепаратором не успевает достичь номинальной частоты вращения, что приводит к изнашиванию внутреннего кольца. Вследствие неизбежной конусности роликов они при качении набегают на бортики колец, а это вызывает изнашивание торцов роликов и бортиков колец. Износ дорожек военикает и в шариковом подшипнике из-за дифференциального проскальзывания, в результате чего вместо одной точки максимального контактного давления, расположенной в средней плоскости под-

Рис. 1.1

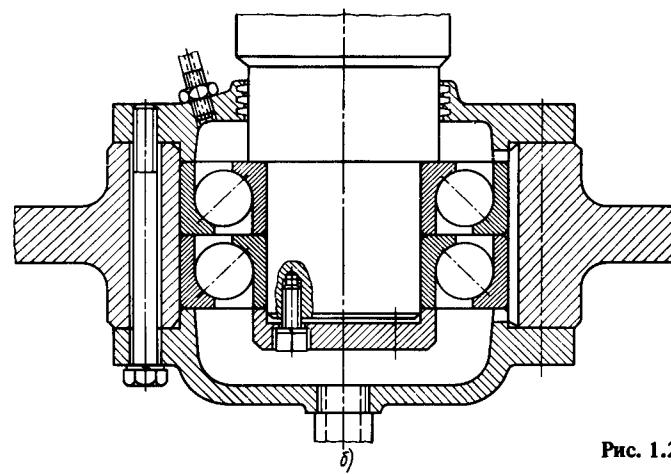
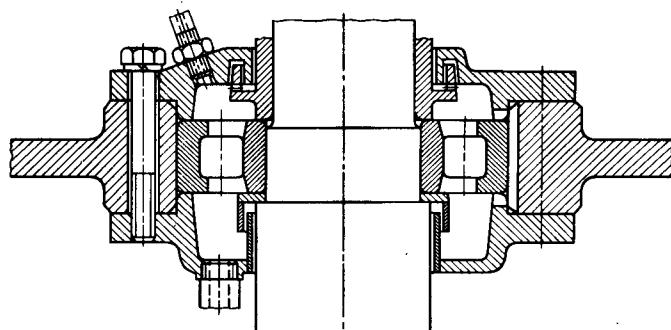
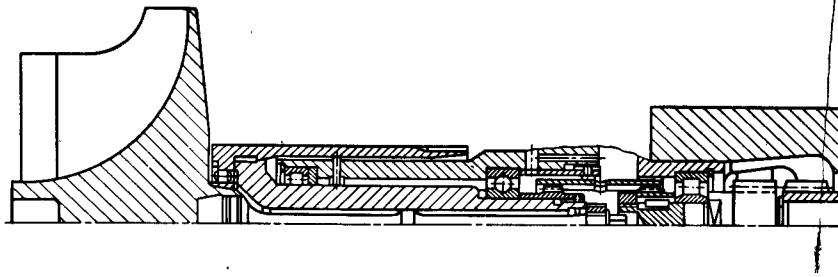
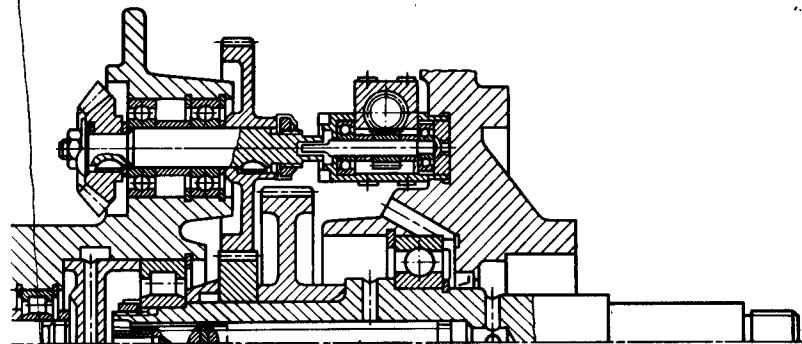


Рис. 1.2



шипника, появляются две, расположенные по сторонам от этой плоскости.

На рис. 1.2, а, б изображены два подшипника, на которые опирается вертикальный преобразователь электрического тока. Радиальные силы, действующие на опоры вертикальных умформеров и электродвигателей, складываются из сил магнитного происхождения и сил, вызванных дисбалансом ротора. На практике часто принимают радиальную нагрузку на подшипник равной половине веса ротора, деленной на число подшипников. Подшипник, изображенный на рис. 1.2, б, воспринимает в дополнение к радиальной нагрузке и вес ротора. Установлен двухрядный радиально-упорный подшипник по схеме тандем. Таким образом достигается более равномерное распределение нагрузки по рядам подшипника. В качестве верхней опоры использован цилиндрический роликовый подшипник (рис. 1.2, а). При таком расположении подшипников важно, чтобы ни в каком режиме работы осевая нагрузка не действовала вверх, – это приведет к частичной разборке узла и его повреждению. Масса ротора 1,2 т, частота вращения  $3000...3600 \text{ мин}^{-1}$ . Предусмотрены циркуляционное смазывание маслом, лабиринтное уплотнение и маслоулавливающие канавки.

На рис. 1.3 изображен скоростной шпиндель вертикально-фрезерного станка. Мощность привода  $1,8 ... 5,0 \text{ кВт}$ , частота вращения  $3000 ... 18\,000 \text{ мин}^{-1}$ . Радиальная и осевая нагрузки зависят от частоты вращения шпинделя и материала обрабатываемой детали. Нагрузки меняются от 150 до 1200 Н. Опоры должны обеспечивать точное положение фрезы и не должны сильно нагреваться, чтобы не снизилась точность обработки. Нижняя опора представляет собой сдвоенный по схеме "О" радиально-упорный подшипник с усилием предварительного натяга 350 Н. Предварительный натяг на верхнем подшипнике создается пружиной. Высокая жесткость опор достигается за счет дуплексирования и предварительного натяга. Смазывание одноразовое, пластичным смазочным материалом; предусмотрено лабиринтное уплотнение. На рис. 1.4 изображена часть двухцилиндрового четырехтактного тракторного двигателя. Максимальная частота вращения  $2600 \text{ мин}^{-1}$ , диаметр поршня 85 мм, длина шатуна 190 мм, радиус кривошипа 50 мм, масса поршня 1,1 кг, масса шатуна 1,4 кг, мак-

симальное давление в цилиндре 7 МПа. В качестве плавающей опоры применен роликовый подшипник без бортиков на наружном кольце, в качестве фиксирующей — роликовый подшипник с приставным бортиком. Подшипники часто выходят из строя по износу вследствие недостаточного смазывания, загрязнений, коррозии. Основной причиной отказа подшипников является не усталостное выкрашивание, а изнашивание. Для смазывания подшипников впрыскивается масло, в некоторых двигателях топливо.

На рис. 1.5 представлена опора заднего колеса легкового автомобиля; статическая нагрузка на колесо 3,9 кН, эффективный радиус шины 290 мм, максимальная скорость 150 км/ч. Каждое колесо опирается только на один

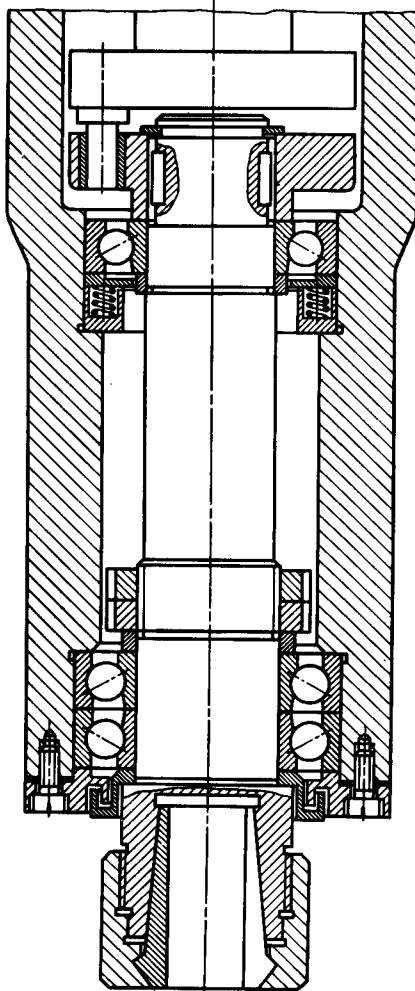


Рис. 1.3

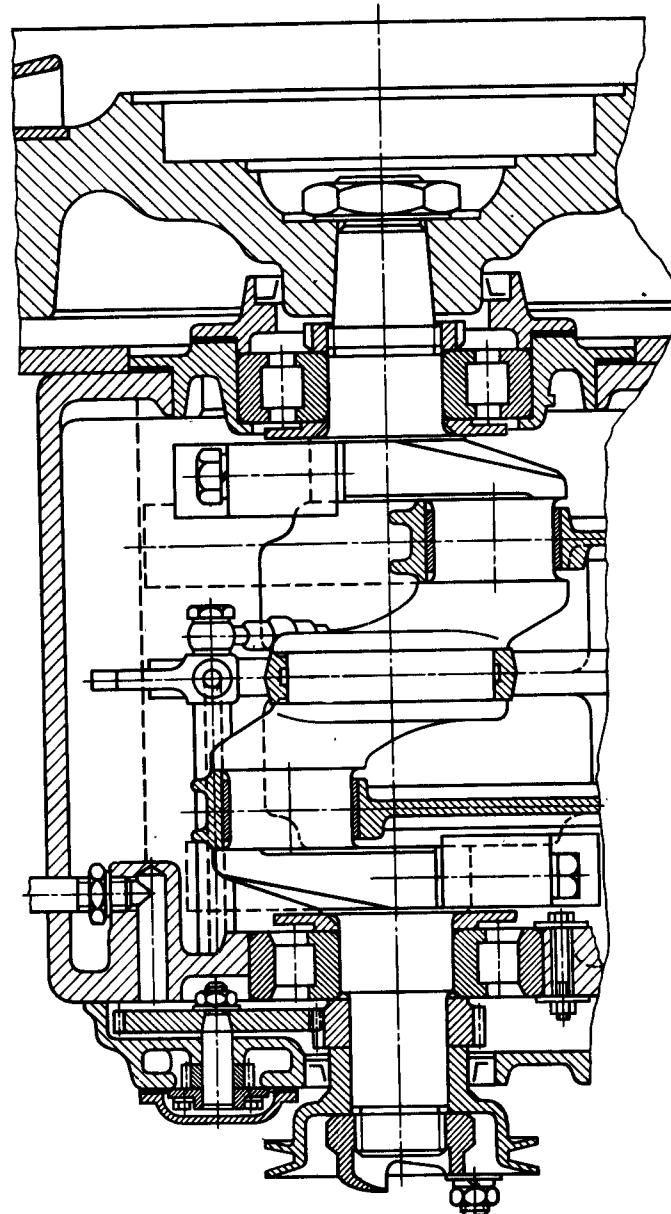


Рис. 1.4

радиальный шариковый подшипник. Эта конструкция экономична, зазор в подшипнике не надо регулировать, однако вал изгибается под действием радиального усилия от колеса, поэтому требуется увеличенное значение радиального зазора в подшипнике. Внутреннее кольцо вращается относительно линии действия нагрузки, в связи с чем посадка внутреннего кольца плотнее, чем у наружного. Подшипник изолирован от окружающего пространства манжетным уплотнением; смазывание маслом от привода заднего колеса.

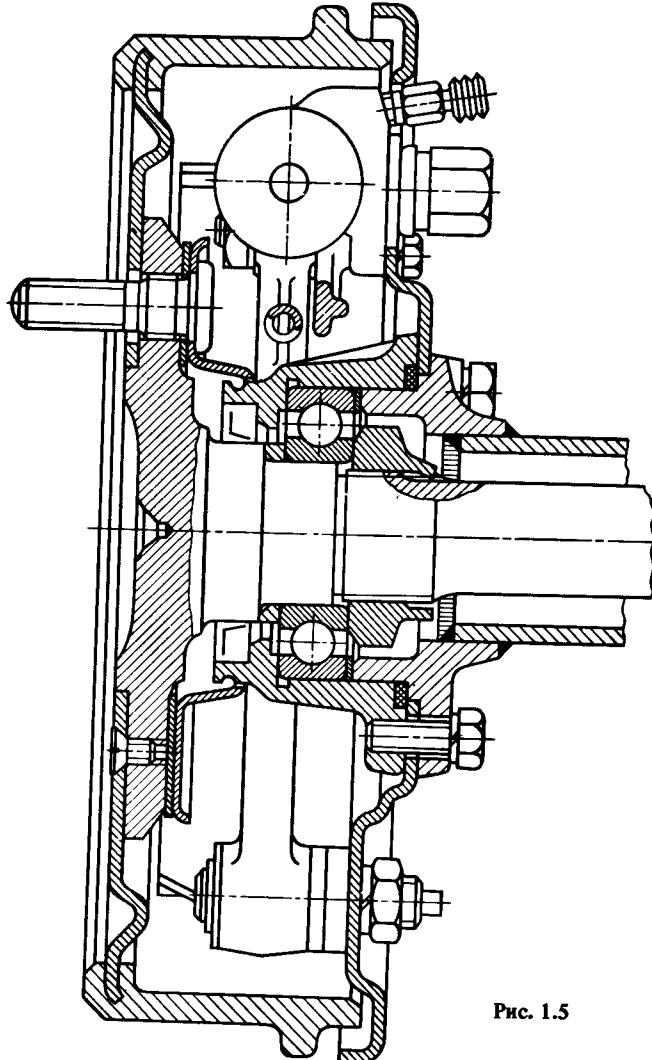


Рис. 1.5

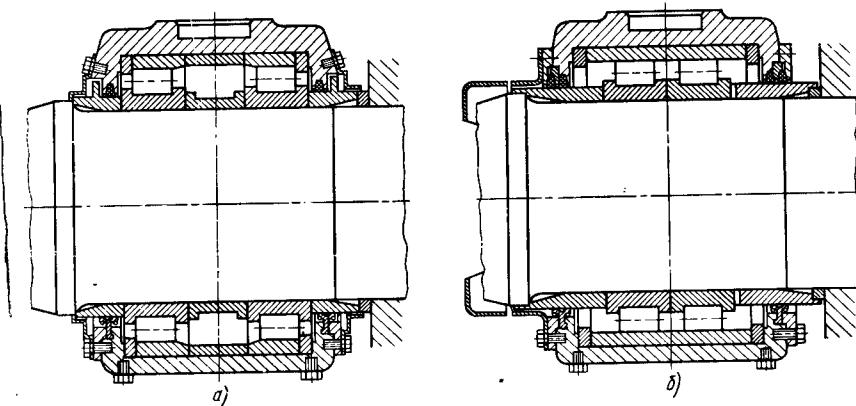


Рис. 1.6

На рис. 1.6 изображены буксовые узлы локомотива. Рама локомотива через рессоры опирается на буксовые узлы трех колесных пар. Чтобы локомотив мог свободно проходить повороты, средняя колесная пара должна иметь возможность перемещаться в осевом направлении. Масса локомотива 54 т, масса колесной пары 2 т, отношение добавочной динамической нагрузки к статической радиальной нагрузке составляет 0,45, диаметр колеса 1250 мм, максимальная скорость 60 км/ч. На первой и третьей осях установлены роликовые подшипники с короткими цилиндрическими роликами и приставными бортиками на наружных кольцах (рис. 1.6, а). Диаметр отверстия, наружный диаметр и ширина подшипника составляют соответственно 200, 310, 66 мм, динамическая грузоподъемность равна 600 кН. Установленный на средней оси роликовый подшипник (рис. 1.6, б) допускает перемещение оси на 30 мм в обе стороны. Подшипник состоит из двух внутренних колец с комплектами роликов и широкого наружного кольца (ширина вместе с приставными бортиками равна 192 мм). Динамическая грузоподъемность подшипника равна 1,2 МН. Внутренние кольца вращаются относительно линии действия нагрузки, поэтому их посадка на ось тугая. При посадке кольца расширяются, что приводит к уменьшению радиального зазора. При движении локомотива воздух сильнее охлаждает наружное кольцо, чем внутреннее. По этим причинам выбирают подшипник с увеличенным радиальным зазором. Для подшипников первой и третьей осей применяют лабиринтные уплотнения и фетровые прокладки. Для средней оси лабиринтное уплотнение неприменимо, здесь ставят по два фетровых уплотнения с каждой стороны. Возможны манжетные уплотнения. Отмечается выход из строя по усталостному выкрашиванию, износу торцов роликов и бортиков колец, разрыву пе-ремычек сепаратора, сколу бортика. Подшипники работают в нестандартных условиях, при комбинированном нагружении и наличии перекоса, который вызван перекосом буксы относительно оси, прогибом шейки оси и деформированием корпуса буксы.

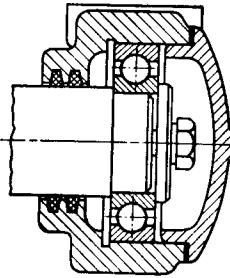


Рис. 1.7

На рис. 1.7 изображен буксовый узел вагонетки для обжига известняка. В автоклавах подшипники подвергаются воздействию горячего пара при температуре 573 К и под давлением 1,8 МПа. Подшипник должен быть хорошо защищен от проникновения щелочного конденсата, вызывающего

коррозию. Коррозионно-стойкие покрытия поверхностей не обеспечивают срока службы в течение одного года. Проблема может быть решена выбором порошкообразного синтетического смазочного материала, который и при высоких температурах устойчив к воздействию почти всех агрессивных сред, не теряет смазочных свойств и не поглощает воду. Имеющийся в подшипнике порошок проникает во все зазоры и образует смазочную пленку между шариками и дорожками качения, между шариками и сепаратором, а также между наружным кольцом подшипника и посадочной поверхностью корпуса. Пленка на посадочной поверхности корпуса способствует свободному перемещению подшипника в корпусе. В связи с этим чрезмерный осевой натяг, который ведет к перегрузке подшипника, отсутствует. Порошок служит не только смазочным материалом, но и уплотняющим веществом, так как проникает в уплотнительныестыки. Подшипники термически обработаны и имеют увеличенный радиальный зазор (200...250 мкм). Буксовые узлы спроектированы для двухосной вагонетки массой 3,5 т. Уплотнение на оси состоит из двух графитоасбестовых колец. Под фланец крышки подложена асбестовая шайба.

На рис. 1.8, а представлены опорные ролики конвейеров, вращающиеся на шариковых подшипниках. Для ленточного конвейера с тремя роликами на каждой опоре угол наклона внешних роликов к горизонту  $15^\circ$ , расстояние между опорами вдоль конвейера 1,2 м, диаметр ролика 110 мм, масса 1 м ленты 25 кг, масса ролика 6 кг, скорость ленты 3 м/с. Ленточные конвейеры могут быть длиной в несколько километров. В них применяют дешевые шариковые подшипники. Ролик вращается вокруг неподвижной оси (внутренняя опора). Динамическая грузоподъемность подшипников составляет 10 кН, однако из-за сильного загрязнения, например в горнодобывающей промышленности, подшипники отказывают вследствие изнашивания. Ресурс роликов зависит от затрат на уплотнение и уход. Пластичный смазочный материал обычно закладывают на два года, затем ролики демонтируют для технического осмотра. На рис. 1.8, б приведены также варианты уплотнения роликов для сортировочного устройства, горного конвейера и конвейерной установки, транспортирующей бурый уголь.

На рис. 1.9 показаны подшипники опорного валка стана горячей прокатки. На линии горячей прокатки с семью клетями обжимают полосы шириной 600 мм с уменьшением толщины от 25 до 2 мм. Скорость прокатки

в последней клети 9 м/с, усилие обжатия 4...5 МН. Диаметр рабочей поверхности валка, равный 860 мм, уменьшается в процессе работы до 810 мм. Чтобы толщина подушки в наиболее слабом месте не оказалась меньше 25 мм, наружный диаметр подшипника не должен превышать 760 мм. Диаметр цапфы равен 530 мм. Так как пространство, отведенное для подшипников, ограничено в радиальном направлении, частота вращения велика и значительна радиальная нагрузка, на каждой цапфе устанавливают два двухрядных роликовых подшипника размерами 530×760×260 мм. Динамическая грузоподъемность каждого подшипника 6 МН. Осевая нагрузка воспринимается парой радиально-упорных шариковых подшипников, установленных по схеме "X" слева, и одним шариковым подшипником, установленным справа. Внутренние кольца роликовых подшипников вращаются относительно линии действия силы, поэтому их посадка на вал с туга. Вследствие большего нагрева внутренних колец по сравнению с

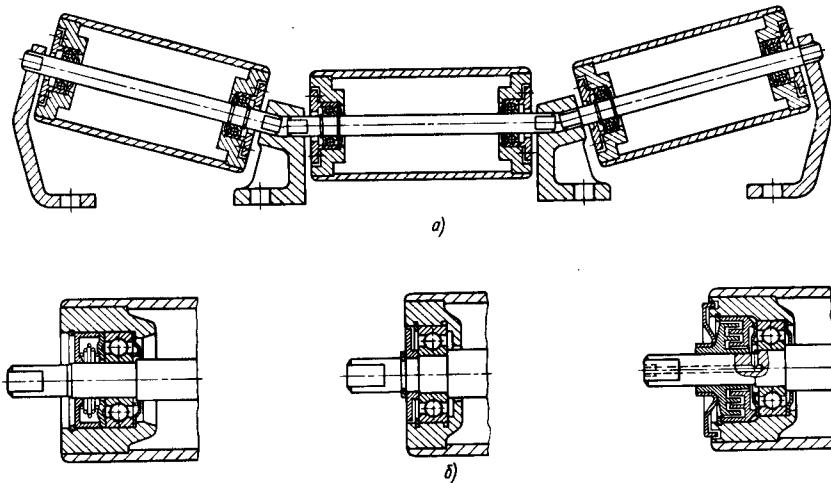


Рис. 1.8

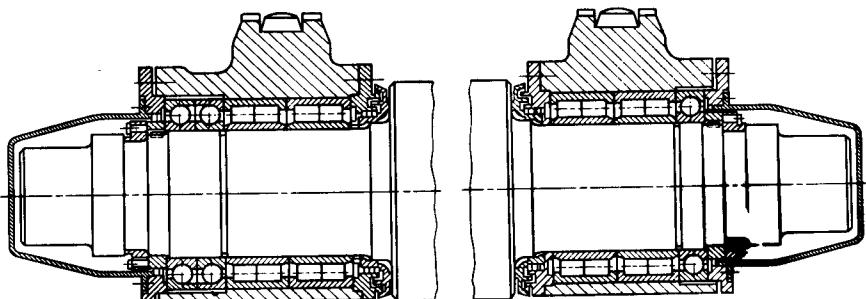


Рис. 1.9

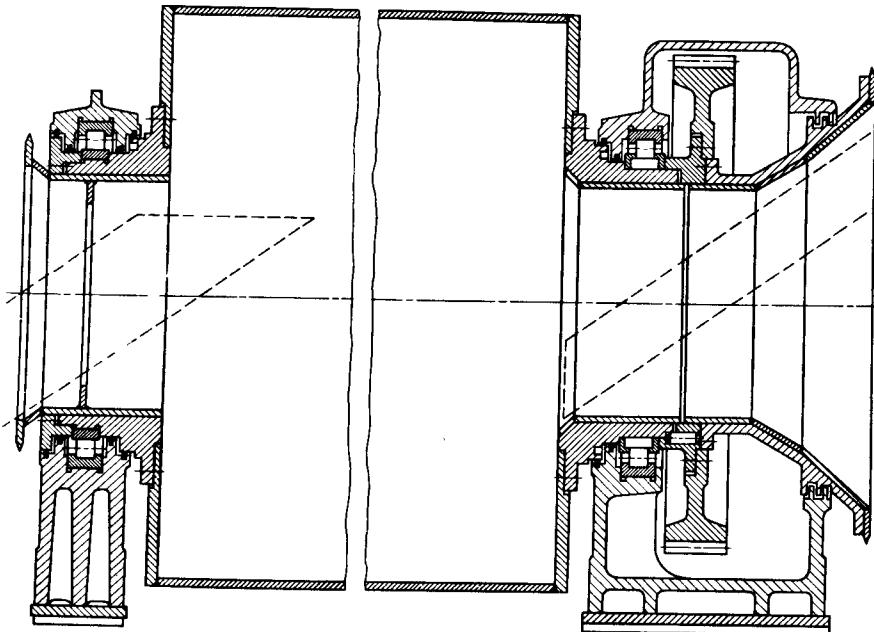


Рис. 1.10

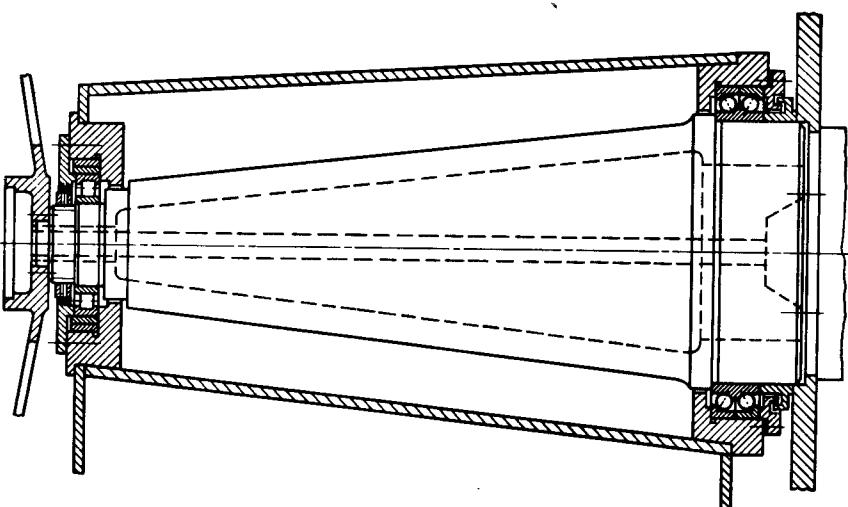


Рис. 1.11

наружными уменьшается радиальный зазор. Сдвоенные шариковые подшипники имеют осевой зазор 250..4000 мкм. Смазывание осуществляют погружением в ванну с жидким смазочным материалом. Чтобы из подшипников не вытекало масло, а окалина и охлаждающая жидкость не проникали в подшипники, предусмотрено лабиринтное уплотнение.

На рис. 1.10 представлены подшипники промывного барабана. Масса барабана 60 т, диаметр 2100 мм, длина 7,5 м, мощность привода 100 кВт, частота вращения 9 мин<sup>-1</sup>. Барабан опирается на пустотельные цапфы, через которые загружают и выгружают сыпучий материал. Из-за большого расстояния между подшипниками было бы целесообразно применять самоустанавливающиеся роликовые подшипники. Однако они имели бы слишком большие габариты и чрезмерную долговечность, поэтому применяют цилиндрические роликовые подшипники с закругленным меридианом роликов. Осевая нагрузка воспринимается фасонными кольцами со стороны фиксирующего подшипника.

На рис. 1.11 изображена опора оптического телескопа, длина которого 8 м, масса 10 т. Диаметр зеркала 1 м. Вследствие малой частоты вращения вильчатой оси (1 оборот за 24 ч) момент сопротивления ее вращению должен быть прежде всего постоянным и достаточно малым. Вилка должна быть ориентирована очень точно и жестко. В качестве фиксирующей опоры служит двухрядный радиально-упорный прецизионный шариковый подшипник с разъемным наружным кольцом. Подшипник имеет размеры 600Х730Х98 мм. Расстояние между обеими половинами наружного кольца должно быть выбрано так, чтобы обеспечить усилие натяга, равное 35 кН. Плавающая опора выполнена в виде цилиндрического роликового подшипника. Несмотря на коническую форму вильчатой оси, ее прогиб настолько велик, что может приводить к увеличению трения в двухрядном подшипнике. Поэтому роликовый подшипник снабжен двумя эксцентрическими кольцами, которые при монтаже врачают так, чтобы ликвидировать прогиб оси в месте расположения шарикового подшипника. Кроме того, для самоустановки меридиан дорожки внутреннего кольца роликового подшипника имеет форму дуги окружности с большим радиусом.

На рис. 1.12 представлена симметричная конструкция гиромотора с одним двигателем и составным маховиком. Такие конструкции применяют в приборах, где требуются малые значения кинетических моментов, например, в интегрирующих и дифференцирующих поплавковых гироприборах и в гирокомпасах.

Приведенные примеры использования ПУ дают представление о разнообразии конструктивного исполнения, условий работы и требований к характеристикам. Для одних ПУ важна высокая долговечность, для других — высокая жесткость, точность вращения, стабильность момента сопротивления вращению или низкий уровень вибрации. Расчет характеристик ПУ требует системного подхода. Но возможна единая расчетная схема ПУ. Действительно, во всех примерах ПУ представляет собой ротор, опирающийся на один, два или несколько подшипников, установленных в

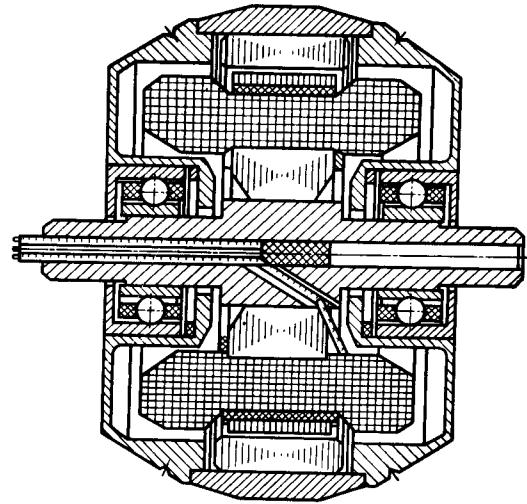


Рис. 1.12

корпусе. Вращаться может и корпус вокруг неподвижной оси, а у каждого подшипника вращающимся может быть как внутреннее, так и наружное кольцо, однако суть принципиальной расчетной схемы не меняется. Но даже для исследования такой простейшей расчетной схемы необходимо использовать уравнения теории упругости, динамики систем твердых тел, теории трения, смазки и изнашивания, механики разрушения и широко применять математические методы.

## 1.2. ПРИНЦИПИАЛЬНАЯ СХЕМА ПОДШИПНИКОВОГО УЗЛА

Выше были рассмотрены различные примеры применения подшипников качения. Неизменным функциональным узлом описанных конструкций является ротор на подшипниках качения, число, расположение и тип которых могут быть различными. Для обеспечения необходимой жесткости во многих узлах создается предварительный осевой натяг. При этом осевые люфты в подшипниках выбираются по-разному: пружинами, шайбами, прокладками, с помощью крепления колец в упругие крышки и (или) упругой стяжкой, проходящей внутри полого ротора (рис. 1.13).

Общий вид узла представляет собой ротор на нескольких подшипниках качения (в книге будут рассмотрены в основном шарикоподшипниковые опоры). Наиболее распространенный узел — ротор на двух радиально-упорных шариковых подшипниках. Такой узел обладает достаточными радиальной, осевой и угловой жесткостями и способен воспринимать радиальную и осевую нагрузки, а также моменты. Угловая жесткость равна отношению поперечного момента системы сил (с равнодействующей, равной нулю), действующего на ротор, к углу перекоса оси ротора.

Каждый подшипник (см. рис. 1.13) состоит из наружного 1 и внутреннего колец, сепаратора 3 и комплекта шариков 2. Как правило, внутренние кольца неподвижно крепятся на роторе, а наружные закреплены в корпусе. Однако возможно крепление наружных колец и на роторе. Некоторые узлы выполнены по обращенной схеме, когда статор находится внутри ротора.

Кольца закрепляют на роторе различными способами: kleem, напряженной посадкой или на винтах. Если внутреннее либо наружное кольцо выполнено непосредственно на роторе, то опора называется *смещенной*. Этот случай характерен для прецизионных шарикоподшипниковых узлов, поскольку позволяет избежать перекосов колец при посадке. В большинстве практически важных случаев крепление колец можно считать жестким, так как смещение тел в стыках пренебрежимо мало, хотя иногда

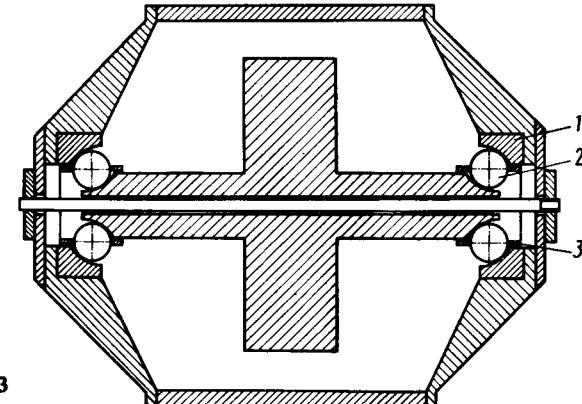


Рис. 1.13

следует учитывать демпфирующие свойства стыков, особенно при оценке уровня вибрации узла.

В процессе работы на ротор и элементы подшипников действуют внешние силы и моменты, в частности, от привода, врачающего ротор. Отдельные элементы подшипника взаимодействуют друг с другом по сравнительно малым областям контакта. Возникающие здесь силы взаимодействия будем считать внутренними. Выделение внешних сил до некоторой степени условно. Так, при включении в состав узла силовой схемы, создающей осевой натяг, силы со стороны стяжки и упругой крышки становятся внутренними.

Элементы подшипников с достаточной для практики степенью точности можно считать жесткими телами, локально упругодеформируемыми в малых областях контакта. Аналогичное предположение часто верно для ротора, если его длина не слишком велика и можно пренебречь упругим прогибом. Однако при расчете радиальной жесткости узла важно учесть прогиб. Глобальная упругая деформация колец подшипника во многих случаях может привести к перераспределению нагрузок в контактах с телами качения. Этот эффект особенно значителен, если радиальная нагрузка, действующая на подшипник, велика, толщина кольца мала по сравнению с его длиной и, кроме того, отсутствует жесткая заделка кольца по его поверхности, свободной от контактов с телами качения. Номинальная форма желобов кольца шарикоподшипника — тор. Отклонения геометрических параметров дорожек качения, а при напряженной посадке — отклонения от правильной геометрической формы посадочной поверхности, непосредственно влияют на вибрационные характеристики узла: уменьшение отклонений ведет к улучшению этих характеристик.

Сепаратор подшипника служит для разделения (сепарирования) тел качения и удержания их на определенном расстоянии друг от друга. Сепараторы различают по типу базирования. Если сепаратор в процессе движения касается наружного (внутреннего) кольца, то говорят о наружном (внутреннем) базировании. Если же касание отсутствует, то сепаратор базируется относительно тел качения. Возможен также случай смешанного базирования, т.е. касания сепаратором двух колец. Окна сепаратора могут быть различной формы. Наиболее распространены сепараторы с окнами в форме сферы или цилиндра. Иногда встречаются более сложные формы: например, конус при базировании относительно тел качения. Для этой цели возможно использовать окна в виде скошенных цилиндров, что имеет неоспоримые преимущества. В некоторых шариковых подшипниках сепаратор отсутствует. Как показывают эксперименты, прецизионные узлы с подобными подшипниками имеют хорошие характеристики, особенно по стабильности момента сопротивления вращению и толщины пленки в контактах шарик–кольца.

### 1.3. УРОВНИ МОДЕЛИРОВАНИЯ И ЭКСПЛУАТАЦИОННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ УЗЛА

К эксплуатационным характеристикам подшипникового узла относят нагрузки и давления в контактах; осевую, радиальную и угловую жесткости; толщину смазочной пленки в контактах; кинематику тел качения и сепараторов; момент сопротивления вращению вала; уровень и спектр вибрации; нагрузки, действующие на сепаратор со стороны шариков и центрирующих поверхностей; тип движения сепаратора; уровень нестабильности динамических параметров; долговечность. Для расчета перечисленных характеристик необходимо разработать математическую модель узла, включающую все существенные на выбранном уровне факты. Степень сложности модели следует выбирать, исходя из потребностей расчета.

Так, например, для расчета номинальных нагрузок в контакте шарик–дорожка при чисто осевом нагружении достаточно рассмотреть равновесие шарика между идеальными кольцами (рис. 1.14). На кольца извне действует сила  $F_z$ , приводящая к относительному осевому перемещению центров кривизны поперечного сечения желобов колец  $O_1$  и  $O_2$ . Единственной неизвестной величиной в этой задаче является длина отрезка  $O_1O_2$ . Определив  $O_1O_2$  из уравнения равновесия одного из колец, можно найти значения всех функционально зависимых величин: угол контакта  $\alpha$  (с наружным кольцом); нормальную нагрузку  $P$  в контактах;  $a$  и  $b$  — большую и малую полуоси эллиптической площадки контакта;  $P_0$  — максимальное давление в контакте;  $\delta_1$  ( $\delta_2$ ) — упругое сближение центра шарика с наружным (внутренним) кольцом. Угол контакта (см. рис. 1.14) отчитывают от вертикали против часовой стрелки, и для наружного кольца он отрицателен (либо превышает  $1,5\pi$ ), а для внутреннего кольца равен  $\alpha + \pi$ , так как при отсутствии центробежной силы центр  $O'$  шарика лежит на отрезке  $O_1O_2$ . При расчете нагрузок  $P_m$  в контактах шарика используют формулу Герца  $P_m = K_m \delta_m^{3/2}$ , где  $K_m$  — коэффициенты, зависящие от типоразмера подшипника и упругих постоянных материала колец и шариков.

При учете вращения каждого из колец подшипника модель усложняется. Если в центрах контактов шарика с кольцами, имеющими угловые скорости  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$ , предположить идеальную кинематику (т.е. отсутствие проскальзывания в этих точках), то можно определить угловую скорость движения центра шарика по круговой орбите

$$\omega_c = (R_1^* \Omega_1 + R_2^* \Omega_2) / (2R^*),$$

где  $2R^* = R_1^* + R_2^*$  — диаметр окружности центров шариков, и проекцию  $\omega_l$  угловой скорости шарика на линию, перпендикулярную линии контакта  $O_1O_2$ :

$$\omega_l = \frac{R_1^* \Omega_1 - R_2^* \Omega_2}{D_w},$$

где  $D_w$  — диаметр тела качения (шарика или ролика).

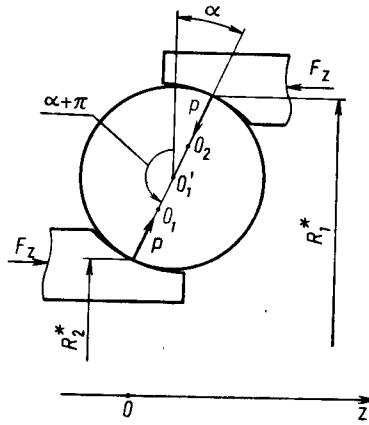


Рис. 1.14

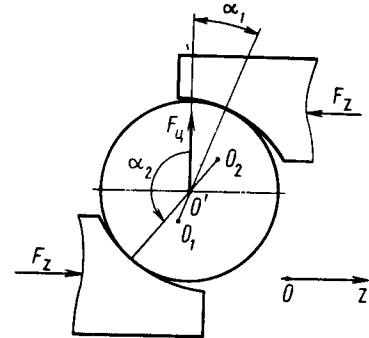


Рис. 1.15

Для подшипника, собранного с осевым натягом, проскальзывание практически отсутствует. На шарик массы  $m_b$  в связанной с ним системе координат (рис. 1.15) действует центробежная сила инерции  $F_{\text{ц}} = m_b \omega_c^2 R^*$ . Учет этой силы в уравнениях равновесия приводит к смещению центра шарика с отрезка  $O_1 O_2$ . Углы контакта с кольцами в этом случае не связаны соотношением  $\alpha_2 = \alpha_1 + \pi$ , а для определения положения центра шарика необходимо решить систему трех нелинейных уравнений (два уравнения определяют положение точки  $O'$  при заданном положении колец, а третье – осевое расстояние между центрами  $O_1$  и  $O_2$ ). После этого находим силы и максимальные давления в контактах, размеры площадок контакта и углы  $\alpha_1, \alpha_2$ .

Дальнейшее усложнение связано с необходимостью учета смазочной пленки в контактах, толщина которой зависит от переменных  $\omega_c, \omega_l, \omega_n, \omega_t$ , где  $\omega_n$  – составляющая угловой скорости шарика, перпендикулярная области контакта;  $\omega_t$  – составляющая угловой скорости, направленная вдоль касательной к окружности центров. Кроме того, толщина пленки зависит от нагрузок в контактах. С другой стороны, изменение толщины пленки приводит к изменению нагрузок. Моменты, действующие на шарик со стороны колец (с учетом гироскопических моментов), должны уравновешивать друг друга. Эти моменты определяются полем касательных напряжений на площадках контакта, которое непосредственно связано с полем скоростей проскальзывания, в свою очередь, выражаящихся через  $\omega_c, \omega_l, \omega_n, \omega_t$ . Таким образом, получаем систему уравнений, из которой определяем две координаты центра шарика и его кинематику. В этой модели необходимо иметь выражения для касательных напряжений по площадке контакта и формулу для расчета толщины пленки, полученные из эластогидродинамической теории смазки.

При расчете потерь мощности возникают дополнительные усложнения. В частности, если предположить, что сепаратор занимает центральное положение и взаимодействует с шариками, то в уравнения равновесия шарика добавляются силы и моменты со стороны сепаратора, которые зависят от указанных выше переменных и еще двух дополнительных неизвестных: осевого положения сепаратора и углового положения шарика в окне, для определения которых, в свою очередь, имеем уравнение равновесия сил, действующих на сепаратор, в проекции на ось  $Oz$  и условие равенства нулю осевой проекции момента, действующего на сепаратор.

Модель можно дополнительно расширить для определения поля температур всех элементов узла. При этом следует рассмотреть распространение теплоты во всех элементах с учетом теплообмена на границах и источников тепловой энергии как внутри, так и вне узла. К числу основных источников относят подвижные контакты с тепловыделением, обусловленным трением (без смазочного материала либо гидродинамическим, происходящим в тонких смазочных слоях из-за сдвиговых напряжений), обмотки электродвигателей привода с выделяющимся в них джоулевым теплом, токи Фуко в массивных телах. Перенос теплоты осуществляется внутри тел, газовой средой или охлаждающей жидкостью, в многофазной среде (при смазывании масляным туманом), а также посредством излучения. В общем случае задача определения поля температур ставится совместно с задачей нахождения кинематических и геометрических переменных. В результате получаем систему уравнений, включающую уравнения в частных производных (теплопроводности) и нелинейные соотношения статики.

Иногда с удовлетворительной степенью точности можно схематизировать сложную геометрию узла и заменить непрерывное температурное поле конечным набором неизвестных температур отдельных поверхностей и элементов конструкции (метод конечных элементов) с учетом сосредоточенных тепловых сопротивлений в сопряжениях. В результате указанной процедуры модель упрощается и сводится к системе нелинейных соотношений. Однако тепловой расчет уже сам по себе представляет весьма сложную задачу в том смысле, что очень трудно учесть все тепловые источники и стоки и правильно описать их количественно. Так, например, используемый часто в таких задачах закон конвективного теплообмена на границе твердого тела и газа, видимо, неточен. Более правильно было бы рассматривать теплопередачу в окружающей тело атмосфере. Однако эта задача еще сложнее, особенно если твердое тело вращается и, следовательно, газ в его окрестности движется. Для определения же температуры в потоке необходимо знать поле скоростей потока. Таким образом, задача становится чрезмерно сложной. Для упрощения ее обычно пользуются экспериментальными значениями температур в нескольких точках. Это позволяет получить решение, но, как правило, с невысокой точностью. Кроме того, определение температурного поля представляет собой весьма специальную задачу, и не для всех узлов ее решение является необходимым.

Все описанные выше модели по существу статические. Хотя кинематика шарика и учитывалась, она была заданной, не зависящей от времени.

Кроме того, нагружение сохраняло осевую симметрию подшипника, что позволяло ограничиться рассмотрением одного шарика. На практике ротор на подшипниках может подвергаться действию внешних радиальных нагрузок (в общем случае распределенных) и поперечных моментов, нарушающих осевую симметрию. Для учета этих факторов в модель необходимо ввести дополнительные степени свободы ротора – два радиальных перемещения и два угла перекоса оси ротора. Симметрия может нарушаться также вследствие неидеальности опор, а именно волнистости их поверхностей. Поэтому в модели следующего уровня сложности естественно учесть как силовую, так и геометрическую асимметрию. На этом уровне можно рассчитать радиальную и угловую жесткости узла, а также решить полную задачу статики при комбинированном нагружении.

На следующем этапе можно рассмотреть задачу динамики узла, причем динамические модели могут иметь различные степени сложности. Так, согласно линейной теории вибрации В.Ф. Журавлева, ротор вращается с постоянной угловой скоростью, а угловая скорость движения шариков по орбите предписана и равна кинематической. При этом уравнения движения деталей узла сводятся к уравнениям движения ротора по пяти переменным (линейным перемещениям центра масс и двум углам перекоса) под действием внешних сил, приложенных к ротору, и сил, обусловленных отклонением формы и размеров рабочих поверхностей (шариков и дорожек качения). Эта модель позволяет рассчитать собственную и вынужденную вибрацию ротора. Однако момент сопротивления вращению остается в этой модели неизвестным, поскольку кинематика шарика частично предписана (известны  $\omega_c$ ,  $\omega_l$ , а составляющие угловой скорости  $\omega_n$  и  $\omega_t$  неизвестны). Единственная составляющая момента сопротивления, которая может быть найдена, обусловлена отклонением формы и размеров колец и не зависит от скорости вращения ротора (момент не равен нулю даже тогда, когда ротор не вращается). Этот момент может оказаться источником погрешностей узлов, работающих при малых частотах вращения (чувствительные опоры, стабилизированные платформы).

Следующий по сложности уровень моделирования – включение в рассмотрение вращения сепаратора. При этом полагаем, что сепаратор занимает по-прежнему центральное положение, но может вращаться с произвольной угловой скоростью, причем комплект шариков вращается по круговой орбите с такой же скоростью. Если скорость вращения отличается от кинематической, то возникает момент сопротивления, действующий на систему *комплект шариков + сепаратор*. Этот момент обусловлен проскальзыванием комплекта шариков относительно дорожек качения и линейно зависит от отклонения скорости вращения от кинематического значения. В общем случае учитывают также и момент трения о базу. Эта модель, предложенная В.Ф. Журавлевым для описания режима самосинхронизации движения сепараторов в системе *ротор на двух подшипниках*, оказалась весьма плодотворной при изучении низкочастотных движений указанного узла.

Многие экспериментальные и расчетные исследования свидетельст-

вуют о сложном движении сепаратора в шариковом подшипнике. Центральное положение сепаратора неустойчиво, и вследствие этого центр сепаратора совершает определенное движение под действием сил со стороны шариков и базы. Режимы движения могут быть различными в зависимости от режима смазывания в зазоре плавания. Так, если смазывание обильно, то режим движения аналогичен режиму "полускоростного вихря" в подшипниках скольжения. При этом угловая скорость движения центра сепаратора примерно в 2 раза меньше угловой скорости вращения сепаратора. Для приборных подшипников с одноразовой закладкой смазочного материала этот режим маловероятен. Так, стробоскопические наблюдения, проведенные в Загорском филиале ВНИПП, показали, что центр сепаратора движется по круговой орбите, касаясь базы, причем частота этого движения (в указанном эксперименте около 200 Гц) отличается от частоты вращения сепаратора примерно на 1 Гц.

Наиболее полной моделью узла является механическая система твердых локально деформируемых тел с большим числом степеней свободы. Силы взаимодействия отдельных элементов этой системы определяются законами эластогидродинамической теории. Пространственные формы движения не предписываются (или предписываются лишь в самых общих чертах), а получаются в результате решения уравнений движения всей системы как единого целого при заданных внешних воздействиях. В такой модели в принципе возможно учесть все факторы, поддающиеся количественному описанию. Полная система уравнений, скажем, для ротора на двух подшипниках, содержащих по семь шариков, включает более ста дифференциальных уравнений первого порядка, правые части которых являются весьма сложными нелинейными функциями фазовых координат системы. Решают эти уравнения с применением наиболее быстро действующих ЭВМ. При этом получают большой объем информации о характеристиках узла. Однако для инженерных расчетов такой подход не всегда удобен. В данной книге изложены простые аналитические методики, позволяющие получать как количественные, так и качественные результаты на большом интервале времени работы подшипникового узла.

## ГЛАВА 2

### МЕХАНИКА КОНТАКТА

#### 2.1. ТЕОРИЯ ГЕРЦА

Теория Герца рассматривает статический контакт двух тел при следующих предположениях:

материалы соприкасающихся тел однородны, изотропны и идеально упруги;

область контакта мала по сравнению с радиусами кривизны поверхностей;

трение отсутствует.

При взаимном перемещении тел контакт можно считать статическим, если относительная скорость невелика по сравнению со скоростью распространения малых возмущений в телах.

В силу второго предположения, при определении перемещений точек поверхности тело можно считать полупространством. Из теории упругости известно, что нормальное перемещение  $w$  под действием давления  $p(x, y)$ , распределенного по области  $\Omega$  (рис. 2.1),

$$w(x, y) = \frac{1}{\pi E'} \int_{\Omega} \frac{p(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2}} ; E' \equiv \frac{E}{1 - \nu^2}, \quad (2.1)$$

где  $E$  – модуль упругости материала;  $\nu$  – коэффициент Пуассона.

Для определенности первым полупространством считаем нижнее, а вторым – верхнее.

После перехода к полярным координатам  $r, \varphi$  с полюсом в точке  $(x, y)$  выражение (2.1) принимает вид

$$w(x, y) = \frac{1}{\pi E'} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{r_0(\varphi)}^{r'(\varphi)} p(r, \varphi) dr d\varphi, \quad (2.2)$$

где  $r_0(\varphi)$  и  $r'(\varphi)$  – координаты точек пересечения луча  $\varphi = \text{const}$  с границей  $\partial\Omega$  области  $\Omega$  (если точка с координатами  $x, y$  лежит вне  $\Omega$ );  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  – крайние значения  $\varphi$ , при которых луч  $\varphi = \text{const}$  пересекает область  $\Omega$ . Если точка  $(x, y)$  принадлежит  $\Omega$ , то  $\varphi_1 = 0, \varphi_2 = 2\pi, r_0(\varphi) \equiv 0$ . Далее рассмотрим именно этот случай. Если в (2.2) взять интеграл по  $r$  от 0 до  $r(\varphi)$  при  $\varphi = \text{const}$ , а затем от 0 до  $r(\varphi + \pi)$  вдоль луча  $\varphi + \pi$ , то сумма интегралов будет представлять собой площадь  $S(\varphi)$  сечения области под графиком  $p(x, y)$  плоскостью, проходящей через линию  $\varphi = \text{const}$ . Эту площадь затем надо проинтегрировать по  $\varphi$  от 0 до  $\pi$ .

Указанный прием упрощает расчет перемещений по формуле (2.1). Пусть, например, границей области  $\Omega$  является эллипс

$$\xi^2/a^2 + \eta^2/b^2 = 1, \quad (2.3)$$

где  $a, b$  – его большая и малая полуоси, а давление  $p(\xi, \eta)$  распределено согласно полуэллипсоидальному закону

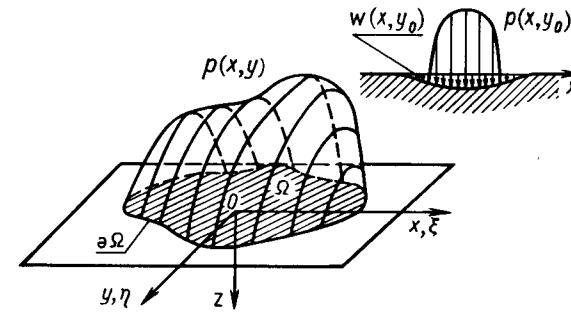


Рис. 2.1

$$p(\xi, \eta) = p_0 \sqrt{1 - (\xi/a)^2 - (\eta/b)^2}. \quad (2.4)$$

Уравнение границы  $r = r'(\varphi)$ , когда начало полярной системы помещено в точку  $(x, y)$ , получаем подстановкой  $\xi = x + r \cos \varphi, \eta = y + r \sin \varphi$  в (2.3). В сечении полуэллипса плоскостью, проходящей через линию  $\varphi = \text{const}$ , получается полуэллипс с горизонтальной полуосью  $(r_1 + r_2)/2$ , где  $r_1 = r'(\varphi), r_2 = r'(\varphi + \pi)$ . Чтобы найти вертикальную полуось, надо определить середину хорды  $\varphi = \text{const}$  эллипса  $\Omega$ . Этой середине соответствует  $r_* = |r_1 - r_2|/2$ . По формуле (2.4) вычисляем значение  $p_*$  в точке  $\xi = x + r_* \operatorname{sgn}(r_1 - r_2) \cos \varphi, \eta = y + r_* \operatorname{sgn}(r_1 - r_2) \sin \varphi$ . Оно равно длине вертикальной полуоси рассматриваемого полуэллипса, площадь которого

$$S(\varphi) = \frac{\pi p_0 ab}{2} \frac{(a^2 - x^2) \sin^2 \varphi + (b^2 - y^2) \cos^2 \varphi + xy \sin 2\varphi}{(b^2 \cos^2 \varphi + a^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}}.$$

После замены  $\operatorname{tg} \varphi = (b/a) \operatorname{tg} \psi$  выражение (2.2) приводим к виду

$$\begin{aligned} w_j(x, y) &= \frac{1}{\pi E'_j} \int_0^\pi S(\varphi) d\varphi = \\ &= \frac{p_0}{2E'_j} \int_0^\pi \frac{ab - \frac{b}{a} x^2 \sin^2 \psi - \frac{a}{b} y^2 \cos^2 \psi + xy \sin 2\psi}{\sqrt{1 - (1 - b^2/a^2) \sin^2 \psi}} d\psi. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Перемещение  $w_j(x, y)$  поверхности полупространства является квадратичной функцией координат для точек, лежащих внутри  $\Omega$ . Интеграл (2.5) сводится к полным эллиптическим интегралам первого рода

$$K = \int_0^{\pi/2} [1 - (1 - \frac{b^2}{a^2}) \sin^2 \varphi]^{-0.5} d\varphi \quad (2.6)$$

и второго рода

$$L = \int_0^{\pi/2} [1 - (1 - \frac{b^2}{a^2}) \sin^2 \varphi]^{0.5} d\varphi, \quad (2.7)$$

и формула для  $w_j$  принимает окончательный вид

$$w_j(x, y) = (p_0 b / E'_j) [K - Dx^2/a^2 - (K - D)y^2/b^2], \quad (2.8)$$

где

$$D = \frac{K - L}{1 - (b/a)^2}.$$

Вблизи точки контакта  $O$  (рис. 2.2) уравнения номинальных поверхностей  $z_j = f_j(x, y)$  при  $j = 1, 2$  могут быть представлены отрезками рядов Тейлора

$$z_j \approx \frac{x_j^2}{2R_{j1}} + \frac{y_j^2}{2R_{j2}}, \quad (2.9)$$

где  $R_{jm}$  ( $m = 1, 2$ ) — главные радиусы кривизны, измеряемые в плоскостях  $Ox_j z_j$ ,  $Oy_j z_j$  главных нормальных сечений тел;  $m = 1$  для оси  $Ox_j$ ,  $m = 2$  для оси  $Oy_j$ .

Если в сечении тела плоскостью получается кривая, обращенная выпуклостью внутрь тела, то радиус кривизны отрицателен; если кривая обращена выпуклостью наружу, то — положителен. В координатах  $x, y$  (см. рис. 2.2), связанных с  $x_j, y_j$  зависимостями

$$x_j = x \cos \omega_j - y \sin \omega_j, \quad y_j = x \sin \omega_j + y \cos \omega_j, \quad (2.10)$$

зазор  $z_1 + z_2$  между поверхностями определяем из выражения

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{\cos^2 \omega_1}{R_{11}} + \frac{\sin^2 \omega_1}{R_{12}} + \frac{\cos^2 \omega_1}{R_{21}} + \frac{\sin^2 \omega_2}{R_{22}} \right) x^2 + \right. \\ &\quad + \left( \frac{\sin^2 \omega_1}{R_{11}} + \frac{\cos^2 \omega_1}{R_{12}} + \frac{\sin^2 \omega_2}{R_{21}} + \frac{\cos^2 \omega_2}{R_{22}} \right) y^2 - \\ &\quad \left. - \left[ \left( \frac{1}{R_{11}} - \frac{1}{R_{12}} \right) \sin 2\omega_1 + \left( \frac{1}{R_{21}} - \frac{1}{R_{22}} \right) \sin 2\omega_2 \right] xy \right\} \equiv \\ &\equiv \frac{x^2}{2R_x} + \frac{y^2}{2R_y} + Cxy. \end{aligned} \quad (2.11)$$

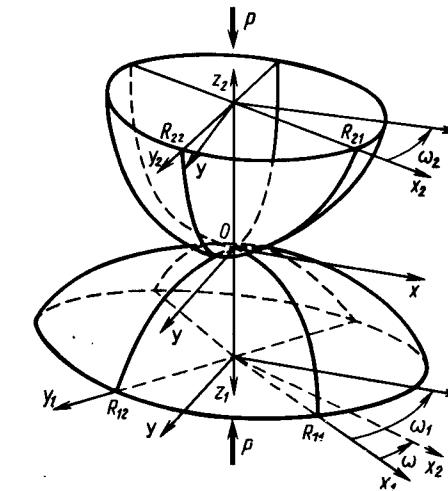


Рис. 2.2

Это выражение упрощается, если угол  $\omega_2$  выбрать из условия  $C = 0$ :

$$\operatorname{tg} 2\omega_2 = \frac{(1/R_{12} - 1/R_{11}) \sin 2\omega}{(1/R_{11} - 1/R_{12}) \cos 2\omega + (1/R_{21} - 1/R_{22})}. \quad (2.12)$$

Угол  $\omega_2 \in (-\pi/4, \pi/4]$ , если

$$\left( \frac{1}{R_{11}} - \frac{1}{R_{12}} \right) \cos 2\omega + \frac{1}{R_{21}} - \frac{1}{R_{22}} < 0,$$

$\omega_2 \in (\pi/4, 3\pi/4]$  в противном случае.

При таком выборе  $\omega_2$  большая ось эллипса направлена по оси  $Ox$ , а малая — по оси  $Oy$ .

По углу  $\omega_2$  находим угол  $\omega_1 = \omega_2 + \omega$  и значения  $R_x, R_y$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{R_x} &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{R_{11}} + \frac{1}{R_{12}} + \frac{1}{R_{21}} + \frac{1}{R_{22}} - \Phi \right); \\ \frac{1}{R_y} &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{R_{11}} + \frac{1}{R_{12}} + \frac{1}{R_{21}} + \frac{1}{R_{22}} + \Phi \right), \end{aligned} \quad (2.13)$$

где

$$\Phi = \sqrt{\left( \frac{1}{R_{11}} - \frac{1}{R_{12}} \right)^2 + \left( \frac{1}{R_{21}} - \frac{1}{R_{22}} \right)^2 + 2 \left( \frac{1}{R_{11}} - \frac{1}{R_{12}} \right) \left( \frac{1}{R_{21}} - \frac{1}{R_{22}} \right) \cos 2\omega}.$$

Перемещения  $w_j$ , вычисляемые по формуле (2.1), стремятся к нулю при  $x^2 + y^2 \rightarrow \infty$ , и поэтому можно определить сближение  $\delta$  тел как относительное сближение двух достаточно удаленных от зоны контакта точек тел

в направлении  $Oz$ . В процессе сближения в некоторой точке  $(x, y)$  сначала выбирается зазор, затем возникают упругие перемещения точек поверхности. Уравнение контактных перемещений для точек  $(x, y)$ , принадлежащих области контакта, имеет вид

$$\delta = z_1 + z_2 + w_1 + w_2. \quad (2.14)$$

Вне области контакта, когда сближение недостаточно для возникновения упругих перемещений, выполняется неравенство  $\delta < z_1 + z_2 + w_1 + w_2$ .

Подстановка в (2.14) выражений (2.8) для  $w_j$  и (2.11) для  $z_1 + z_2$  приводит к равенству

$$\delta - \left( \frac{x^2}{2R_x} + \frac{y^2}{2R_y} \right) = \frac{2p_0 b}{E'} [K - D \frac{x^2}{a^2} - (K - D) \frac{y^2}{b^2}], \quad (2.15)$$

где

$$E' = 2E'_1 E'_2 / (E'_1 + E'_2),$$

которое показывает, что уравнению (2.14) удовлетворяет полуэллипсоидальное распределение давления по эллиптической области контакта. Приравняв свободные члены и коэффициенты при  $x^2$  и  $y^2$  в (2.15), получаем формулы для определения  $a$ ,  $b$ ,  $p_0$  и  $\delta$  по заданным  $E'$ ,  $R_x$ ,  $R_y$  и сжимающей нагрузке  $P$ :

$$a = k_a^3 \sqrt{\frac{PR}{E'}}, \quad b = k_b^3 \sqrt{\frac{PR}{E'}}, \quad (2.16)$$

$$p_0 = k_p^3 \sqrt{P \left( \frac{E'}{R} \right)^2}; \quad (2.17)$$

$$\delta = k_\delta^3 \sqrt{\frac{1}{R} \left( \frac{P}{E'} \right)^2}. \quad (2.18)$$

В этих формулах

$$k_a = \sqrt[3]{\frac{6D}{\pi} \left( 1 + \frac{R_x}{R_y} \right)}; \quad k_b = \sqrt[3]{\frac{6(K - D)b}{\pi a} \left( 1 + \frac{R_y}{R_x} \right)},$$

$$k_\delta = K \sqrt[3]{\frac{9}{2\pi^2 D (1 + R_x/R_y)}} = \frac{3K}{\pi k_a};$$

$$k_p = \frac{3}{2\pi k_a k_b};$$

$$R = \left( \frac{1}{R_{11}} + \frac{1}{R_{12}} + \frac{1}{R_{21}} + \frac{1}{R_{22}} \right)^{-1} = \frac{R_x R_y}{R_x + R_y};$$

а отношение  $a/b = \gamma$  вычисляем из трансцендентного уравнения

$$\frac{D}{(K - D) \gamma^2} = \frac{R_y}{R_x}. \quad (2.19)$$

Значения  $k_a$ ,  $k_b$ ,  $k_p$ ,  $k_\delta$  можно определить из табл. 2.1 (вычисления проведены В.В. Власовым) по заданному значению  $R_x/R_y$  [ $\beta = \arcsin e$ , где  $e = \sqrt{1 - (b/a)^2}$ ].

При  $e \ll 1$  значение  $D = (K - L)/e^2$  целесообразно вычислять по асимптотической формуле

$$D = \pi \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{(2n-1)!!}{2^n n!} \right]^2 \frac{n}{2n-1} \left\{ \exp 2(n-1) \ln e \right\}.$$

При  $1 \leq R_x/R_y \leq 34$  ( $1 \leq \gamma \leq 10$ ) коэффициенты  $k_a$ ,  $k_b$ ,  $k_p$ ,  $k_\delta$ ,  $\gamma$  можно определять приближенно с погрешностью не более 3 %:

$$\begin{aligned} \tilde{k}_a &= \frac{1,4664}{Y^{0,0945}} \left( \frac{R_x}{R_y} \right)^{0,318}; \\ \tilde{k}_b &= \frac{1,4184}{Y^{0,0945}} \left( \frac{R_y}{R_x} \right)^{0,318}; \\ \tilde{k}_p &= 0,2295 Y^{0,189}; \quad \tilde{k}_\delta = 1,0401 Y^{0,2}; \end{aligned} \quad (2.20)$$

$$\gamma = 1,0339 \left( \frac{R_x}{R_y} \right)^{0,636}; \quad Y \equiv 1 - (1 - \frac{R_y}{R_x})^3.$$

**Пример 2.1.** Вычислить размеры эллипса контакта, максимальное давление и контактное сближение для контакта шарика с внутренним кольцом подшипника 306. Диаметр шарика  $D_w = 12,303$  мм, диаметр по дну желоба  $d_2 = 45,848$  мм, радиус желоба  $r_2 = 6,34$  мм, нагрузка на шарик  $P = 1600$  Н; материал шариков и колец – сталь ШХ15, модуль упругости  $E = 210$  ГПа, коэффициент Пуассона  $\nu = 0,33$ ; угол контакта равен нулю.

**Решение.** Вследствие симметрии угол  $\omega = 0$ ; первое тело – шарик, второе – кольцо:

$$R_{11} = R_{12} = D_w/2 = 6,151 \text{ мм}; \quad R_{21} = -r_2;$$

$$R_{22} = d_2/2 = 22,924 \text{ мм}.$$

Средний приведенный радиус кривизны

$$R = 1/(1/6,151 + 1/6,151 - 1/6,34 + 1/22,924) = 4,738 \text{ мм};$$

$$R_x = R_{11} R_{21} / (R_{11} + R_{21}) = 6,151 \cdot 6,34 / (6,34 - 6,151) = 206,3 \text{ мм};$$

$$R_y = R_{12} R_{22} / (R_{12} + R_{22}) = 6,151 \cdot 22,924 / (6,151 + 22,924) = 4,85 \text{ мм};$$

Таблица 2.1

$\beta$	$a/b$	$R_x/R_y$	$k_a$	$k_b$	$k_p$	$k_\delta$
0,0	1,0000	1,0000	1,4422	1,4422	0,2295	1,0400
1,0	1,0002	1,0002	1,4424	1,4421	0,2295	1,0400
2,0	1,0006	1,0009	1,4427	1,4418	0,2295	1,0401
3,0	1,0014	1,0021	1,4432	1,4413	0,2295	1,0401
4,0	1,0024	1,0036	1,4440	1,4405	0,2295	1,0400
5,0	1,0038	1,0057	1,4450	1,4395	0,2295	1,0400
6,0	1,0055	1,0083	1,4462	1,4383	0,2295	1,0400
7,0	1,0075	1,0113	1,4477	1,4369	0,2295	1,0400
8,0	1,0097	1,0148	1,4493	1,4352	0,2295	1,0400
9,0	1,0124	1,0187	1,4512	1,4333	0,2295	1,0400
10,0	1,0154	1,0231	1,4533	1,4313	0,2295	1,0400
11,0	1,0187	1,0282	1,4557	1,4290	0,2295	1,0400
12,0	1,0224	1,0336	1,4583	1,4264	0,2295	1,0400
13,0	1,0263	1,0396	1,4612	1,4237	0,2295	1,0400
14,0	1,0306	1,0461	1,4642	1,4208	0,2295	1,0399
15,0	1,0352	1,0530	1,4676	1,4176	0,2295	1,0399
16,0	1,0405	1,0606	1,4712	1,4142	0,2295	1,0398
17,0	1,0460	1,0686	1,4750	1,4106	0,2295	1,0398
18,0	1,0515	1,0772	1,4791	1,4067	0,2295	1,0397
19,0	1,0576	1,0875	1,4835	1,4027	0,2295	1,0396
20,0	1,0641	1,0984	1,4882	1,3984	0,2294	1,0395
21,0	1,0712	1,1098	1,4931	1,3939	0,2294	1,0394
22,0	1,0787	1,1197	1,4983	1,3892	0,2294	1,0393
23,0	1,0897	1,1325	1,5039	1,3843	0,2293	1,0391
24,0	1,0947	1,1460	1,5097	1,3792	0,2293	1,0390
25,0	1,1033	1,1587	1,5159	1,3738	0,2293	1,0388
26,0	1,1123	1,1739	1,5224	1,3683	0,2292	1,0386
27,0	1,1223	1,1888	1,5292	1,3625	0,2292	1,0383
28,0	1,1325	1,2049	1,5364	1,3565	0,2291	1,0381
29,0	1,1441	1,2234	1,5439	1,3503	0,2290	1,0377
30,0	1,1547	1,2408	1,5518	1,3439	0,2289	1,0374
31,0	1,1668	1,2606	1,5601	1,3373	0,2289	1,0369
32,0	1,1792	1,2808	1,5688	1,3304	0,2288	1,0365
33,0	1,1924	1,3026	1,5779	1,3234	0,2287	1,0360
34,0	1,2062	1,3252	1,5875	1,3161	0,2285	1,0355
35,0	1,2207	1,3494	1,5975	1,3086	0,2284	1,0349
36,0	1,2360	1,3748	1,6080	1,3090	0,2283	1,0342
37,0	1,2521	1,4013	1,6190	1,2930	0,2281	1,0335
38,0	1,2690	1,4292	1,6304	1,2848	0,2279	1,0327
39,0	1,2867	1,4602	1,6425	1,2765	0,2277	1,0318
40,0	1,3054	1,4914	1,6551	1,2679	0,2275	1,0309
41,0	1,3250	1,5260	1,6683	1,2591	0,2273	1,0298
42,0	1,3456	1,5613	1,6822	1,2501	0,2270	1,0287
43,0	1,3673	1,5996	1,6967	1,2409	0,2268	1,0275
44,0	1,3902	1,6400	1,7120	1,2315	0,2265	1,0261
45,0	1,4144	1,6824	1,7279	1,2218	0,2262	1,0247
46,0	1,4388	1,7287	1,7447	1,2120	0,2258	1,0230
47,0	1,4662	1,7773	1,7623	1,2019	0,2254	1,0213
48,0	1,4947	1,8284	1,7807	1,1915	0,2250	1,0195
49,0	1,5244	1,8838	1,8002	1,1810	0,2246	1,0174
50,0	1,5576	1,9427	1,8206	1,1703	0,2241	1,0152
51,0	1,5898	2,0061	1,8421	1,1593	0,2236	1,0129

Таблица 2.1

Продолжение табл. 2.1

$\beta$	$a/b$	$R_x/R_y$	$k_a$	$k_b$	$k_p$	$k_\delta$
52,0	1,6224	2,0740	1,8648	1,1481	0,2230	1,0103
53,0	1,6616	2,1463	1,8887	1,1366	0,2224	1,0075
54,0	1,7013	2,2237	1,9138	1,1249	0,2218	1,0046
55,0	1,7434	2,3083	1,9405	1,1130	0,2211	1,0013
56,0	1,7883	2,3986	1,9687	1,1009	0,2203	0,9978
57,0	1,8361	2,4966	1,9985	1,0885	0,2195	0,9941
58,0	1,8871	2,6021	2,0301	1,0758	0,2186	0,9900
59,0	1,9446	2,7177	2,0636	1,0628	0,2177	0,9856
60,0	2,0000	2,8431	2,0993	1,0497	0,2167	0,9809
61,0	2,0627	2,9732	2,1373	1,0362	0,2156	0,9759
62,0	2,1301	3,1287	2,1778	1,0224	0,2144	0,9704
63,0	2,2074	3,2937	2,2212	1,0084	0,2132	0,9645
64,0	2,2881	3,4745	2,2676	0,9940	0,2118	0,9582
65,0	2,3662	3,6744	2,3174	0,9794	0,2104	0,9514
65,5	2,4114	3,7832	2,3437	0,9719	0,2096	0,9478
66,0	2,4585	3,8967	2,3710	0,9644	0,2088	0,9440
66,5	2,5077	4,0170	2,3993	0,9567	0,2080	0,9402
67,0	2,5592	4,1444	2,4288	0,9490	0,2072	0,9361
67,5	2,6131	4,2800	2,4595	0,9412	0,2063	0,9319
68,0	2,6694	4,4226	2,4914	0,9333	0,2054	0,9275
68,5	2,7286	4,5744	2,5246	0,9253	0,2044	0,9230
69,0	2,7904	4,7353	2,5593	0,9172	0,2034	0,9183
69,5	2,8554	4,9072	2,5955	0,9090	0,2024	0,9134
70,0	2,9237	5,0903	2,6333	0,9006	0,2013	0,9083
70,5	2,9957	5,2857	2,6728	0,8922	0,2002	0,9029
71,0	3,0716	5,4942	2,7141	0,8836	0,1991	0,8974
71,5	3,1515	5,7180	2,7575	0,8750	0,1979	0,8917
72,0	3,2358	5,9502	2,8030	0,8662	0,1967	0,8857
72,5	3,3256	6,2166	2,8507	0,8572	0,1954	0,8795
73,0	3,4201	6,4966	2,9010	0,8482	0,1941	0,8730
73,5	3,5210	6,7969	2,9538	0,8389	0,1927	0,8663
74,0	3,6279	7,1225	3,0096	0,8296	0,1912	0,8593
74,5	3,7419	7,4773	3,0685	0,8200	0,1898	0,8519
75,0	3,8639	7,8623	3,1308	0,8103	0,1882	0,8443
75,5	3,9940	8,2835	3,1969	0,8004	0,1866	0,8363
76,0	4,1339	8,7443	3,2670	0,7904	0,1849	0,8280
76,5	4,2837	9,2514	3,3417	0,7801	0,1832	0,8193
77,0	4,4454	9,8108	3,4213	0,7696	0,1813	0,8101
77,5	4,6206	10,430	3,5064	0,7589	0,1794	0,8006
78,0	4,8100	11,118	3,5975	0,7480	0,1774	0,7906
78,5	5,0153	11,886	3,6953	0,7367	0,1754	0,7802
79,0	5,2413	12,750	3,8009	0,7252	0,1732	0,7692
79,5	5,4867	13,724	3,9150	0,7134	0,1709	0,7577
80,0	5,7593	14,830	4,0387	0,7013	0,1686	0,7456
80,2	5,8754	15,315	4,0912	0,6964	0,1676	0,7406
80,4	5,9988	15,827	4,1456	0,6914	0,1666	0,7355
80,6	6,1237	16,370	4,2020	0,6863	0,1656	0,7302
80,8	6,2554	16,942	4,2604	0,6812	0,1645	0,7249
81,0	6,3930	17,551	4,3211	0,6760	0,1635	0,7194
81,2	6,5368	18,224	4,3855	0,6709	0,1623	0,7136
81,4	6,6853	18,882	4,4495	0,6654	0,1613	0,7081
81,6	6,8446	19,612	4,5176	0,6599	0,1601	0,7023

Продолжение табл. 2.1

$\beta$	$a/b$	$R_x/R_y$	$k_a$	$k_b$	$k_p$	$k_\delta$
81,8	7,0126	20,389	4,5885	0,6544	0,1590	0,6963
82,0	7,1859	21,218	4,6623	0,6489	0,1578	0,6902
82,2	7,3691	22,107	4,7395	0,6432	0,1566	0,6840
82,4	7,5631	23,060	4,8200	0,6375	0,1554	0,6775
82,6	7,7634	24,082	4,9042	0,6316	0,1541	0,6710
82,8	7,9763	25,180	4,9923	0,6257	0,1528	0,6643
83,0	8,2075	26,363	5,0847	0,6197	0,1515	0,6574
83,2	8,4423	27,645	5,1817	0,6135	0,1502	0,6503
83,4	8,6989	29,027	5,3835	0,6073	0,1488	0,6431
83,6	8,9726	30,530	5,3908	0,6009	0,1474	0,6357
83,8	9,2584	32,166	5,5038	0,5944	0,1459	0,6280
84,0	9,5657	33,949	5,6231	0,5878	0,1445	0,6202
84,2	9,8951	35,907	5,7495	0,5810	0,1429	0,6121
84,4	10,251	38,049	5,8832	0,5741	0,1414	0,6038
84,6	10,624	40,413	6,0254	0,5670	0,1397	0,5952
84,8	11,028	43,026	6,1766	0,5598	0,1381	0,5864
85,0	11,466	45,933	6,3382	0,5524	0,1364	0,5773
85,2	11,945	49,166	6,5107	0,5448	0,1346	0,5679
85,4	12,471	52,794	6,6958	0,5370	0,1328	0,5582
85,6	13,029	56,876	6,8950	0,5290	0,1309	0,5482
85,8	13,642	61,497	7,1099	0,5207	0,1290	0,5378
86,0	14,431	66,758	7,3428	0,5122	0,1270	0,5271
86,2	15,084	72,799	7,5959	0,5034	0,1249	0,5159
86,4	15,940	79,774	7,8724	0,4943	0,1227	0,5043
86,6	16,862	87,897	8,1759	0,4849	0,1204	0,4922
86,8	17,909	97,457	8,5111	0,4751	0,1181	0,4796
87,0	19,909	108,80	8,8831	0,4649	0,1156	0,4664
87,2	20,502	122,44	9,2990	0,4543	0,1130	0,4526
87,4	22,038	139,05	9,7677	0,4431	0,1103	0,4381
87,6	23,844	159,60	10,3010	0,4314	0,1075	0,4228
87,8	25,994	185,50	10,9141	0,4190	0,1044	0,4067
88,0	28,630	218,82	11,6278	0,4058	0,1012	0,3895
88,2	31,846	262,85	12,4715	0,3917	0,0977	0,3712
88,4	35,814	322,90	13,4881	0,3766	0,0940	0,3515
88,6	40,930	408,18	14,7422	0,3602	0,0899	0,3303
88,8	47,749	535,57	16,3353	0,3421	0,0854	0,3071
89,0	57,297	739,80	18,4450	0,3219	0,0804	0,2814
89,1	63,662	892,17	19,7858	0,3108	0,0776	0,2674
89,2	71,623	1100,7	21,4012	0,2988	0,0747	0,2525
89,3	81,853	1397,8	23,3928	0,2858	0,0714	0,2364
89,4	90,521	1843,4	25,9237	0,2715	0,0678	0,2190
89,5	114,59	2560,3	29,2341	0,2555	0,0639	0,1999
89,6	143,25	3833,8	33,9672	0,2371	0,0593	0,1785
89,7	190,99	6468,7	41,1482	0,2154	0,0539	0,1541
89,8	286,53	13578	53,9176	0,1882	0,0471	0,1248
89,9	572,87	48727	85,5889	0,1494	0,0373	0,0863

Отношение радиусов кривизны  $R_y/R_x = 4,85/206,3 = 0,0235$ . По табл. 2.1  $\gamma = 11,03$ ;  $k_a = 6,1745$ ;  $k_b = 0,5599$ ;  $k_p = 0,1381$ ;  $k_\delta = 0,5866$ . По формулам (2.16) – (2.18)

$$a = 6,1745^3 \sqrt{\frac{1600 \cdot 4,738 \cdot 10^{-3} (1 - 0,33^2)}{2,1 \cdot 10^{11}}} = 1,996 \text{ мм};$$

$$b = a/\gamma = 1,996/11,03 = 0,181 \text{ мм};$$

$$p_0 = 0,1381 \sqrt[3]{\frac{1600 \cdot 2,1^2 \cdot 10^{22}}{(1 - 0,33^2)^2 4,738^2 \cdot 10^{-6}}} = 2,18 \text{ ГПа};$$

$$\delta = 0,5866 \sqrt[3]{\frac{1600^2 (1 - 0,33^2)^2}{4,738 \cdot 10^{-3} \cdot 2,1^2 \cdot 10^{22}}} = 12,5 \text{ мкм.}$$

**Пример 2.2.** В подшипнике 42726 профилированный ролик катится по кольцу с рысканием на угол 0,02 рад. Найти полуоси эллипса контакта и положение большой оси, максимальное давление и сближение в контакте. Диаметр цилиндрической дорожки качения внутреннего кольца  $d_2 = 158$  мм, диаметр ролика  $D_w = 32$  мм, меридиан ролика представляет собой дугу окружности радиусом  $R = 20$  м; материал ролика и кольца – сталь ШХ15,  $E = 210$  ГПа,  $\nu = 0,33$ ; нагрузка на ролик  $P = 15$  кН. Первое тело – ролик, второе – кольцо, ось  $Ox_2$  параллельна оси подшипника;  $R_{11} = 20$  м,  $R_{12} = 16$  мм,  $R_{21} = \infty$ ,  $R_{22} = d_2/2 = 79$  мм,  $\omega = 0,02$ .

Решение. Из формулы (2.13)

$$R_x \approx \left\{ \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2 \cdot 10^4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{79} - \sqrt{\left( \frac{1}{2 \cdot 10^4} - \frac{1}{16} \right)^2 + \left( \frac{1}{79} \right)^2 + 2 \left( \frac{1}{2 \cdot 10^4} - \frac{1}{16} \right) \left( -\frac{1}{79} \right) \cos 0,04} \right]^{-1} \right\}^{-1} = 18 \text{ м};$$

$$R_y \approx \left\{ \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2 \cdot 10^4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{79} + \sqrt{\left( \frac{1}{2 \cdot 10^4} - \frac{1}{16} \right)^2 + \left( \frac{1}{79} \right)^2 + 2 \left( \frac{1}{2 \cdot 10^4} - \frac{1}{16} \right) \left( -\frac{1}{79} \right) \cos 0,04} \right]^{-1} \right\}^{-1} = 13,3 \text{ мм.}$$

Отношение радиусов кривизны  $R_y/R_x = 7,38 \cdot 10^{-4}$ . По табл. 2.1  $\gamma = 80,2$ ;  $k_a = 23,1699$ ;  $k_b = 0,2874$ ;  $k_p = 0,0718$ ;  $k_\delta = 0,2383$ .

Средний приведенный радиус кривизны  $R = 1/[1/(2 \cdot 10^4) + 1/16 + 1/79] = 13,3$  мм. По формулам (2.16) – (2.18)

$$a = 23,17 \sqrt[3]{\frac{15000 \cdot 13,3 \cdot 10^{-3} (1 - 0,33^2)}{2,1 \cdot 10^{11}}} = 21,88 \text{ мм};$$

$$b = a/\gamma = 0,273 \text{ мм};$$

$$P_0 = 0,0718 \sqrt[3]{\frac{15000 \cdot 2,1^2 \cdot 10^{22}}{13,29^2 \cdot 10^{-6} (1 - 0,33^2)^2}} = 1,196 \text{ ГПа};$$

$$\delta = 0,238 \sqrt[3]{\frac{15000^2 \cdot (1 - 0,33^2)^2}{26,59 \cdot 2,1^2 \cdot 10^{22} \cdot 10^{-3}}} = 16 \text{ мкм.}$$

По формуле (2.12)

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 2\omega_2 &= - \frac{(16 - 2 \cdot 10^4) \sin 0,04}{(16 - 2 \cdot 10^4) \cos 0,04 - 2 \cdot 10^4 \cdot 16/79} = \\ &= \frac{799,36}{-19968 - 4050} = -0,033; \end{aligned}$$

$$2\omega_2 \approx -0,033; \quad \omega_2 \approx -0,0167 = -0,95^\circ.$$

Таким образом, большая ось эллипса повернута на  $0,95^\circ$  относительно оси кольца в ту же сторону, что и ось ролика.

**Пример 2.3.** Данные те же, что в примере 2.2, но без рыскания. Вследствие симметрии  $\omega = 0$ ;  $R_x = 2 \cdot 10^4$  мм;  $R_y = 16 \cdot 79 / (16 + 79) = 13,3$  мм;  $R = R_x R_y / (R_x + R_y) = 2 \cdot 10^4 \cdot 13,3 / (2 \cdot 10^4 + 13,3) = 13,25$  мм;  $R_y/R_x = 13,3 / (2 \cdot 10^4) = 6,65 \times 10^{-4}$ .

**Решение.** По табл. 2.1  $\gamma = 85,8$ ;  $k_a = 24,153$ ;  $k_b = 0,28096$ ;  $k_p = 0,0705$ ;  $k_\delta = 0,23128$ . По формулам (2.16) – (2.18)  $a = 22,81$  мм;  $b = 0,266$  мм;  $p_0 = 1,17$  ГПа;  $\delta = 15,5$  мкм.

Для соприкасающихся цилиндрических тел ( $R_{j_1} = \infty$ ;  $j = 1, 2$ ) формулы для  $b$  и  $p_0$  получаем при  $\gamma \rightarrow \infty$  из (2.16) и (2.17) соответственно. В этом случае  $K \rightarrow \infty$ ,  $D \rightarrow \infty$ ,  $R_y/R_x \rightarrow 0$ ,  $k_a \rightarrow \infty$ ,  $a \rightarrow \infty$ ,  $K - D \rightarrow 1$ . Сила  $P$  связана с нагрузкой  $q = \pi p_0 b / 2$  на единицу длины области контакта формулой  $P = 4qa/3$ . Преобразование формулы (2.16) при  $\gamma \rightarrow \infty$  дает

$$b = 1,6 \sqrt{\frac{qR}{E'}}, \quad (2.21)$$

где  $R = R_1 R_2 / (R_1 + R_2)$ ;  $R_1 \equiv R_{12}$ ;  $R_2 \equiv R_{22}$ . Подстановка в формулу  $p_0 = 2q / (\pi b)$  дает

$$p_0 = 0,4 \sqrt{qE'/R}. \quad (2.22)$$

Формулу (2.18) при  $\gamma \rightarrow \infty$  приводим к виду

$$\delta = \frac{4Kq}{\pi E'} = \frac{4q}{\pi E'} \ln \frac{4a}{b}. \quad (2.23)$$

Это же выражение для  $\delta$  получается из (2.15) при  $R_x \rightarrow \infty$ ,  $x = y = 0$ ,  $\gamma \rightarrow \infty$

Распределение давления в контакте, согласно формуле (2.4), можно представить в виде

$$p(x,y) = p_0(x) \sqrt{1 - y^2/b^2(x)}, \quad (2.24)$$

где  $p_0(x) = p_0 \sqrt{1 - x^2/a^2}$ ;  $b(x) = b \sqrt{1 - x^2/a^2}$  – переменные максимальное давление и полуширина области контакта в сечении  $x = \text{const}$ . При  $\gamma \rightarrow \infty$ , фиксированных  $x$  и  $p_0$  из (2.21) получаем предельное распределение давления

$$p(y) = p_0 \sqrt{1 - y^2/b^2}. \quad (2.25)$$

## 2.2. КОНТАКТ УПРУГИХ ТЕЛ ПО УЗКОЙ ОБЛАСТИ

При расчете распределения давления в контактах двух упругих тел (в частности, шариков или роликов с кольцами подшипники качения) тела в области контакта заменяют на упругие полупространства. Тогда задача определения давления сводится к двухмерному интегральному уравнению. Во многих практических случаях область контакта оказывается вытянутой в одном направлении. Таким свойством обладают контакты шарик – кольцо и ролик – кольцо. Но если в контакте шарика с кольцом давление определяют из задачи Герца, то в контакте ролик – кольцо давление найти сложнее, поскольку ролик в общем случае имеет криволинейный меридиан. При решении этой задачи пользуются методом плоских сечений, предполагая, что профиль давления в поперечном направлении представляет собой половину эллипса.

Область контакта (рис. 2.3, а) считается узкой, если ее характерный размер  $L$  в направлении оси  $Ox$  много больше характерного размера  $B$  в другом направлении ( $Oy$ ). В этом случае полагают, что в каждом сечении  $x = \text{const}$  (рис. 2.3, б) происходит контакт двух цилиндров с радиусами  $R_{1y}$  и  $R_{2y}$ . Распределение давления в области  $\Omega$ :

$$p(x, y) = p_0(x) \sqrt{1 - y^2/b^2(x)}, \quad (2.26)$$

где максимальное значение давления  $p_0(x)$  в сечении и местная полуширина  $b(x)$  области контакта определяются формулами (2.21), (2.22) для контакта цилиндров:

$$p_0(x) = \sqrt{\frac{q(x)E'}{2\pi R_y}}; \quad b(x) = \sqrt{\frac{8q(x)R_y}{\pi E'}}. \quad (2.27)$$

Здесь  $q(x) = \pi p_0(x)b(x)/2$  – интенсивность распределенной вдоль оси  $Ox$  нагрузки, или площадь под графиком  $p(x, y)$  в сечении  $x = \text{const}$ ,

$$E' = \frac{2E'_1 E'_2}{E'_1 + E'_2}; \quad E'_j = \frac{E_j}{1 - \nu_j^2} (j = 1, 2);$$

$$R_y = \frac{R_{1y} R_{2y}}{R_{1y} + R_{2y}}.$$

В соответствии с (2.1) уравнение для давления в контакте имеет вид

$$\frac{2}{\pi E'} \iint_{\Omega} \frac{p(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2}} = \delta + (x - x_0)\theta - f_\delta(x, y) \equiv w(x, y), \quad (2.28)$$

где  $\delta$  – суммарное перемещение тел в точке  $x_0$  первоначального контакта, равное сближению тел на бесконечности;  $f_\delta(x, y) = f_1(x, y) + f_2(x, y)$ ;  $f_j(x, y)$  при  $j = 1, 2$  – расстояние от поверхности  $j$ -го тела до касательной плоскости к телу в точке  $x_0$ ;  $\theta$  – угол перекоса.

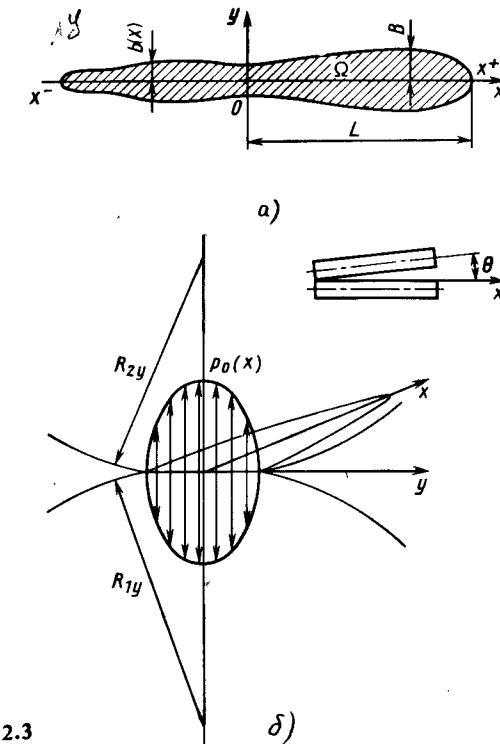


Рис. 2.3

Подставив (2.26) в (2.28) с учетом (2.27) и приняв  $y = 0$ , получаем уравнение для  $q(x)$ :

$$\frac{8}{\pi^2 E'} \int_{x^-}^{x^+} J(x, \xi) q(\xi) d\xi = w(x, o), \quad (2.29)$$

$$J(x, \xi) \equiv \int_0^1 \left[ \frac{1 - t^2}{(\xi - x)^2 + b^2(\xi) t^2} \right]^{1/2} dt.$$

Границы  $x^-$  и  $x^+$  области контакта (см. рис. 2.3) заданы, если тела ограничены острыми кромками. Если же тела гладкие, то  $x^-$  и  $x^+$  определяют из условий

$$q(x^-) = q(x^+) = 0. \quad (2.30)$$

Условие равновесия имеет вид

$$\int_{x^-}^{x^+} q(\xi) d\xi = P, \quad (2.31)$$

где  $P$  – сила, сжимающая тела.

Величину  $b(\xi)$ , входящую в  $J(x, \xi)$ , определяют по второй формуле (2.27). Уравнение (2.29) – нелинейное одномерное интегральное с неизвестными границами, для численного решения которого, наряду с асимптотическими методами, применяют итерационный (метод последовательных приближений). Для этого на интервале  $[x^-, x^+]$  вводят равномерную сетку

$$x_i = x^- + (i - 1)h, \quad h = (x^+ - x^-)/n, \quad i = 1, \dots, n + 1,$$

и уравнения (2.29) – (2.31) приводят к виду

$$\frac{8h}{\pi^2 E'} \sum_{i=1}^{n+1} c_i J_{ji}^{(k-1)} q_i^{(k)} = \Phi_j, \quad (2.32)$$

$$h \sum_{i=1}^{n+1} c_i q_i^{(k)} = P; \quad (2.33)$$

$$q_1^{(k)} = q_{n+1}^{(k)} = 0; \quad (2.34)$$

где  $j = 1, \dots, n + 1$ ;  $q_i^{(k)} = q^{(k)}(\xi_i)$ ;  $J_{ji} = J(x_j, \xi_i)$ ,  $\Phi_j = w(x_j, 0)$ ;  $k$  – номер приближения;  $c_1 = c_{n+1} = 0,5$ ;  $c_i = 1$  для  $2 \leq i \leq n$  (формула трапеций).

При вычислении  $J_{ji}$  используют значение  $q_j$ , полученное при предыдущем приближении, что позволяет рассматривать (2.32) как линейное уравнение. Сначала задают некоторые  $q_i^{(1)}$  и близкие значения  $x^-$  и  $x^+$ . По  $q_i^{(1)}$  вычисляют  $b_i^{(1)} = b^{(1)}(\xi_i)$  и  $J_{ji}^{(1)}$ . В  $n + 4$  уравнения (2.32) – (2.34) входят  $n + 4$  неизвестных:  $q_i^{(1)} (i = 1, \dots, n + 1)$ ,  $x^-, x^+, \delta$ . Значение  $\delta$  вычисляют из выражения для  $\Phi_j$ . При решении системы (2.32) – (2.34) находят  $q_i^{(2)}$ , увеличивая отрезок  $[x^-, x^+]$  до тех пор, пока условие (2.34) не будет выполняться с определенной точностью ( $x^-$  уменьшают, а  $x^+$  увеличивают на значение шага  $h$ ). Процесс обрывают при  $k = m$ , если  $q_i^{(m)}$  достаточно близко к  $q_i^{(m-1)}$ . Особенность задачи – необходимость вычисления сингулярного интеграла. В уравнении (2.29), содержащем сходящийся двойной интеграл, при переходе ко второму интегралу при  $\xi = 0$  или  $t = 0$  получаем расходящиеся одномерные интегралы. Можно воспользоваться непрерывностью по  $z$  интеграла

$$I(x, z) = \int_{x^-}^{x^+} \int_0^1 q(\xi) \left[ \frac{1 - t^2}{(\xi - x)^2 + b^2(\xi)t^2 + z^2} \right]^{1/2} qtd\xi,$$

заменить его суммой типа (2.32) и перейти к пределу при  $h$  и  $z$ , одновременно стремящихся к нулю. Практически  $J_{ii}$  определяют линейной экстраполяцией по двум значениям  $z = \chi h$ , где  $\chi$  – параметр настройки метода.

Изложенный метод решения задачи полезен при расчете давления в

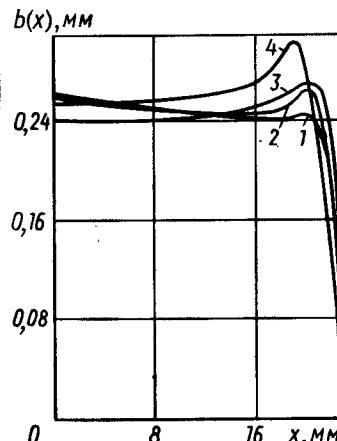


Рис. 2.4

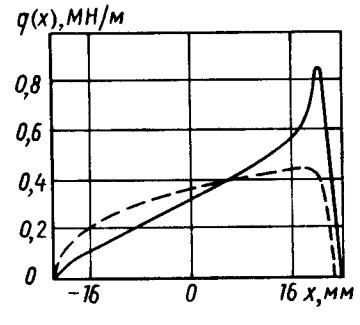


Рис. 2.5

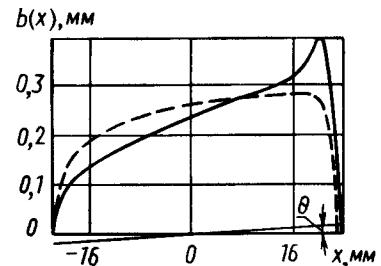


Рис. 2.6

контакте деталей сложной формы, которую вблизи точки первоначального контакта нельзя описать полиномом второй степени по  $x$  и  $y$ . Такую форму имеуют, например, профилированные ролики, применяемые в подшипниках букс и в опорах главного вала некоторых газотурбинных двигателей. Форма двухрадиусного меридиана ролика задается функцией

$$f_2(x, o) = \begin{cases} R_0 - \sqrt{R_0^2 - x^2}, & |x| \leq a, \\ a_1 - \sqrt{r^2 - (x - a_2)^2}, & x > a, \\ a_1 - \sqrt{r^2 - (x + a_2)^2}, & x < -a, \end{cases}$$

где

$$a_1 = R_0 [1 - (1 - \frac{r}{R_0}) \sqrt{1 - \frac{a^2}{R_0^2}}]; \quad a_2 = a(1 - \frac{r}{R_0}),$$

$a$ ,  $R_0$  и  $r$  – параметры меридиана, составленного из трех сопряженных дуг окружностей.

На рис. 2.4 приведены зависимости от  $x$  полуширины  $b$  области кон-

такта такого ролика и внутреннего кольца подшипника 42726. Диаметр ролика  $D_w = 32$  мм, его длина  $l = 46$  мм,  $P = 15$  кН,  $r = 0,4$  мм,  $a = 20$  мм, радиус дорожки качения  $R_1 = 79$  мм, материал — сталь; кривая  $I - R_0 = 65$  м, кривая 2 — 80 м, кривая 3 —  $10^4$  м, кривая 4 —  $10^7$  м.

На рис. 2.5 и 2.6 представлены зависимости от  $x$  интенсивности  $q$  распределенной вдоль оси  $Ox$  нагрузки и формы области контакта для  $R_0 = 80$  м при перекосе  $\theta = 435$  мкрад  $\approx 1,5'$  (штриховые линии — расчет по методу независимых плоских сечений).

### 2.3. ПЕРЕМЕЩЕНИЯ И МИКРОПРОСКАЛЬЗЫВАНИЕ В КОНТАКТЕ

**Упругие перемещения.** При расчете нормальных и касательных перемещений детали подшипникового узла (шарики, ролики, кольца, сепаратор) заменяют на упругие полупространства (рис. 2.7). Ось  $Oz$  декартовой системы координат  $Oxyz$  направлена внутрь нижнего полупространства.

Пусть на детали, контактирующие по некоторой области  $\Omega$  плоскости  $Oxy$  и находящиеся под давлением  $p(x, y) \geq 0$ , действует распределенная касательная нагрузка с компонентами  $\tau_x(x, y)$ ,  $\tau_y(x, y)$  для нижнего тела и  $-\tau_x(x, y)$ ,  $-\tau_y(x, y)$  для верхнего. Тогда для составляющих вектора перемещения точки полупространства имеем

$$u_j(x, y, z) = \frac{1 + \nu_j}{2\pi E_j} \iint_{\Omega} \left[ \frac{(x - x')|z|}{r^3} - \frac{(1 - 2\nu_j)(x - x')}{r(|z| + r)} \right] p(x', y') + \\ + (-1)^{j-1} \left( \left[ \frac{1}{r} + \frac{1 - 2\nu_j}{|z| + r} + \frac{(x - x')^2}{r^3} - \frac{(1 - 2\nu_j)(x - x')^2}{r(|z| + r)^2} \right] \times \right. \\ \times \tau_x(x', y') + \left. \left[ \frac{(x - x')(y - y')}{r^3} - \frac{(1 - 2\nu_j)(x - x')(y - y')}{r(|z| + r)^2} \right] \tau_y(x', y') \right] \times \\ \times dx'dy';$$

$$v_j(x, y, z) = \frac{1 + \nu_j}{2\pi E'_j} \iint_{\Omega} \left[ \frac{(y - y')|z|}{r^3} - \frac{(1 - 2\nu_j)(y - y')}{r(|z| + r)} \right] p(x, y') + \\ + (-1)^{j-1} \left( \left[ \frac{(x - x')(y - y')}{r^3} - \frac{(1 - 2\nu_j)(x - x')(y - y')}{r(|z| + r)^2} \right] \times \right. \\ \times \tau_x(x', y') + \left. \left[ \frac{1}{r} + \frac{1 - 2\nu_j}{|z| + r} + \frac{(y - y')^2}{r^3} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{(1 - 2\nu_j)(y - y')^2}{r(|z| + r)^2} \right] \tau_y(x', y') \right] dx'dy'; \quad (2.35)$$

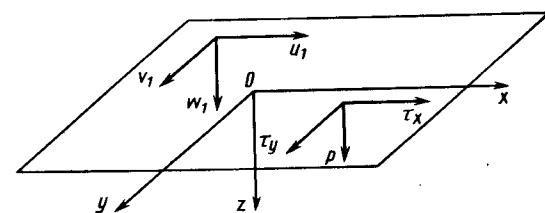


Рис. 2.7

$$w_j(x, y, z) = \frac{1 + \nu_j}{2\pi E'_j} \iint_{\Omega} \left\{ (-1)^j - 1 \left[ \frac{z^2}{r^3} + \frac{2(1 - \nu_j)}{r} \right] p(x'y') + \right. \\ + \left[ \frac{(x - x')|z|}{r^3} + \frac{(1 - 2\nu_j)(x - x')}{r(|z| + r)} \right] \tau_x(x', y') + \left[ \frac{(y - y')|z|}{r^3} + \right. \\ \left. \left. + \frac{(1 - 2\nu_j)(y - y')}{r(|z| + r)} \right] \tau_y(x', y') \right\} dx'dy',$$

где

$$r \equiv \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + z^2}.$$

Из формул следует, что в телах из одного материала ( $E_1 = E_2$ ,  $\nu_1 = \nu_2$ ) при  $\tau_x = \tau_y = 0$  касательные ( $u$ ,  $v$ ) перемещения равны, но нормальные имеют противоположные знаки. При  $p = 0$ , наоборот, равны и имеют одинаковые знаки нормальные перемещения, а касательные, равные по абсолютному значению, направлены в противоположные стороны. Для решения контактных задач необходимо задавать в области контакта  $\Omega$  при  $z = 0$  разности

$$u(x, y) = u_1(x, y, 0) - u_2(x, y, 0); \quad v(x, y) = v_1(x, y, 0) - v_2(x, y, 0); \\ w(x, y) = w_1(x, y, 0) - w_2(x, y, 0)$$

касательных и нормальных перемещений поверхностей. Для описания упругих свойств пары тел введем величины

$$E'_j = \frac{E_j}{1 - \nu_j^2} \quad (j = 1, 2); \quad E' = \frac{2E'_1 E'_2}{E'_1 + E'_2};$$

$$\nu = \frac{\nu_1(1 + \nu_1)E_2 + \nu_2(1 + \nu_2)E_1}{(1 + \nu_2)E_1 + (1 + \nu_1)E_2};$$

$$k = E' \left[ \frac{1 - 2\nu_1}{(1 - \nu_1)E'_1} - \frac{1 - 2\nu_2}{(1 - \nu_2)E'_2} \right].$$

Для тел из одного материала при  $E' = E'_1 = E'_2$ ,  $\nu = \nu_1 = \nu_2$ ,  $k = 0$  из (2.35) следует:

$$u = O[F_x/(E's)] + O[vF_y/(E's)] + O[kP/(E's)]; \\ v = O[vF_x/(E's)] + O[F_y/(E's)] + O[kP/(E's)], \quad w = O[kF_x/(E's)] + \\ + O[kF_y/(E's)] + O[P/(E's)],$$

где  $F_x$ ,  $F_y$ ,  $P$  – силы, действующие на нижнее тело в направлениях  $O_x$ ,  $O_y$ ,  $O_z$ ;  $s$  – характерный размер области контакта  $\Omega$ .

Поскольку касательные силы  $F_x$ ,  $F_y$  имеют тот же порядок, что и  $f^p$  ( $f$  – коэффициент трения), можно пренебречь влиянием  $F_x$ ,  $F_y$  на  $w$ , внося при этом относительную погрешность порядка  $kf \ll 1$ . Таким образом, даже для тел из разных материалов можно с большой точностью находить распределение давления в контакте, не учитывая влияния касательных сил. Например, для контакта стали с бронзой или алюминием значение  $k$  равно нескольким сотым, поэтому  $kf \sim 0,05 \cdot 0,2 = 0,01$ . Для тел из одного материала  $k = 0$ , и касательные силы совсем не влияют на значение давления в контакте. При  $k = 0$  задачу о распределении касательной нагрузки также можно решать без учета распределения давления. Однако для различных материалов такой подход приводит к существенной погрешности, приблизительно равной  $k/f$ . Поэтому давление может заметно влиять на разность касательных перемещений в контакте тел из различных материалов. Будем считать, что либо тела из одного материала, либо значения величин  $kf$  и  $k/f$  пренебрежимо малы по сравнению с единицей. Тогда

$$u(x, y) = \frac{1}{\pi G} \iint_{\Omega} \left\{ \left[ \frac{1 - \nu}{R} + \frac{\nu(x - x')^2}{R^3} \right] \tau_x(x', y') + \right. \\ \left. + \frac{\nu(x - x')(y - y')}{R^3} \tau_y(x', y') \right\} dx'dy'; \\ v(x, y) = \frac{1}{\pi G} \iint_{\Omega} \left[ \frac{\nu(x - x')(y - y')}{R^3} \tau_x(x', y') + \right. \\ \left. \left[ \frac{1 - \nu}{R} + \frac{\nu(y - y')^2}{R^3} \right] \tau_y(x', y') \right] dx'dy'; \\ w(x, y) = \frac{2}{\pi E'} \iint_{\Omega} \frac{p(x', y')}{R} dx'dy', \quad (2.36)$$

где  $1/G = 0,5(1/G_1 + 1/G_2)$ ;  $G_j = E_j/[2(1 + \nu_j)]$  – модуль сдвига материалов тел;  $R = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2}$ .

**Связь перемещений с нагружением.** Обозначим  $J(x, y) = 1/\sqrt{1 - (x/a)^2 - (y/b)^2}$ , где  $a$  и  $b$  – полуоси эллипса контакта. Представим вектор  $[\tau_x, \tau_y, p]$  внешних нагрузок полиномом по  $x, y$ :

$$[\tau_x, \tau_y, p] = J(x, y) G \sum_{m=0}^M \sum_{q=0}^{M-m} [d_{mq}, e_{mq}, f_{mq}] x^m y^q. \quad (2.37)$$

Дж. Калькер показал, что в этом случае разности перемещений внутри  $\Omega$  вычисленные по (2.36), представляют собой полиномы степени  $M$ :

$$[u, v, w] = \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^{M-m} [a_{mn}, b_{mn}, c_{mn}] x^m y^n. \quad (2.38)$$

Коэффициенты  $a_{mn}$ ,  $b_{mn}$ ,  $c_{mn}$  в (2.38) выразим через  $d_{pq}$ ,  $e_{pq}$ ,  $f_{pq}$  в (2.37):

$$a_{mn} = \frac{2}{m! n!} \sum_{\substack{p+q \geq m+n \\ p \geq 0, q \geq 0}}^M [d_{pq}(E_m^{0;pq} - \nu E_{m+2;n}^{1;pq}) - \nu e_{pq} E_{m+1;n+1}^{1;pq}];$$

$$b_{mn} = \frac{2}{m! n!} \sum_{\substack{p+q \geq m+n \\ p \geq 0, q \geq 0}}^M [-\nu d_{pq} E_{m+1;n+1}^{1;pq} + e_{pq}(E_m^{0;pq} - \nu E_{m+2;n}^{1;pq})];$$

$$c_{mn} = \frac{2(1-\nu)}{m! n!} \sum_{\substack{p+q \geq m+n \\ p \geq 0, q \geq 0}}^M f_{pq} E_{mn}^{0;pq} \quad (2.39)$$

Коэффициенты  $E_{mn}^{h;pq}$  отличны от нуля при четных  $p+m$ ,  $q+n$  и  $2h+p+q-m-n \geq 0$  и выражаются через эллиптические интегралы:

$$E_{2\gamma+\epsilon;2\delta+\omega}^{h;2\alpha+\epsilon;2\beta+\omega} = \frac{\Gamma(\frac{1}{2}+h)}{\Gamma(\frac{1}{2})} (-2)^{\epsilon+\omega} \times$$

$$\times \sum_{k=0}^{\gamma} \sum_{l=0}^{\delta} \frac{4^{k+l} (2\gamma+\epsilon)! (2\delta+\omega)! s^{2d+1}}{(\gamma-k)! (\delta-l)! (2k+\epsilon)! (2l+\omega)!} \times$$

$$\times I(d, k+\alpha+\epsilon, l+\beta+\omega, e), \quad (2.40)$$

где

$$I(d, i, j, e) = \frac{\Gamma(0.5-d+i+j)}{d! \Gamma(0.5-d)} \int_0^{\pi/2} \frac{(-\cos^2 \psi)^i (-\sin \psi)^j d\psi}{(1-e^2 \sin^2 \psi)^{d+1/2}};$$

$$d = h + \alpha + \beta - \gamma - \delta \geq 0; \quad (2.41)$$

$\Gamma$  – гамма-функция Эйлера;  $s = b$  (малая полуось);  $e$  – эксцентриситет эллипса контакта;  $\epsilon$  и  $\omega$  принимают значения 0 или 1. При  $d = -1, -2, \dots$  значения величин, вычисляемые по (2.40), равны нулю.

Из (2.37) и (2.38) следует, что при произвольном задании локальных относительных перемещений (т.е. функций  $u$ ,  $v$ ,  $w$ ) распределенная нагрузка может оказаться неограниченно возрастающей вблизи границы эллипса. В контактных задачах с неизвестной областью контакта равенство значения давления или касательной нагрузки на границе нулю обеспечивается выбором этой границы. Если граница – эллипс, то полином в (2.37) должен делиться на  $1 - (x/a)^2 - (y/b)^2$ , т.е. должно быть

$$[t_x, t_y, p] = \frac{G}{J(x, y)} \sum_{p=0}^M \sum_{q=0}^{M-p} [d'_{pq}, e'_{pq}, f'_{pq}] x^p y^q. \quad (2.42)$$

Разности перемещений при этом задаются формулой (2.38) с заменой  $M$  на  $M+2$ . Связь  $[a_{mn}, b_{mn}, c_{mn}]$  с  $[d'_{pq}, e'_{pq}, f'_{pq}]$  дается формулами (2.39), в которых надо заменить  $[d_{pq}, e_{pq}, f_{pq}]$  на  $[d'_{pq}, e'_{pq}, f'_{pq}], E_m^{h;pq}$  на  $F_m^{h;pq} = E_m^{h;pq} - \frac{1}{a^2} E^{h;p+2;q} - \frac{1}{b^2} E^{h;p;q+2}$ , а суммирование проводить по  $p+q \geq m+n-2, p \geq 0, q \geq 0$ .

Полные эллиптические интегралы первого и второго рода даются формулами (2.6), (2.7), эллиптические интегралы

$$C = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 \psi \cos^2 \psi d\psi}{\sqrt{(1-e^2 \sin^2 \psi)^3}};$$

$$D = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 \psi d\psi}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 \psi}}, \quad B = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 \psi d\psi}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 \psi}};$$

связаны с  $K$  и  $L$  соотношениями

$$K = 2D - e^2 C, \quad L = (2-e^2)D - e^2 C,$$

$$B = D - e^2 C = [L - (1-e^2)K]/e^2,$$

$$D = (K-L)/e^2, \quad C = [(2-e^2)K - 2L]/e^4.$$

Приведем значения  $E_{mn}^{h;pq}$  и  $F_{mn}^{h;pq}$  для  $h \leq 2, p \leq 2, q \leq 2, m \leq 4, n \leq 4$ ,  $s = b; g = \sqrt{1-e^2}$  – отношение длины меньшей полуоси к длине большей;  $K$  и  $L$  – см. (2.6) и (2.7):

$$E_{00}^{0;00}/2 = F_{00}^{0;00} = sK/2; \quad E_{00}^{0;20}/4 = F_{00}^{0;20} = s^3 D/8;$$

$$F_{20}^{0;00} = -B/s; \quad E_{20}^{0;20}/2 = F_{20}^{0;20} = s(2B-D+C)/2;$$

$$F_{02}^{0;00} = -g^3 D/s; \quad E_{02}^{0;20}/2 = F_{02}^{0;20} = -sg^2 C/2;$$

$$\begin{aligned}
E_{10}^{0;10}/2 &= F_{10}^{0;10} = sB/2; \quad E_{11}^{0;11}/2 = F_{11}^{0;11} = s(D-C)/2; \\
F_{30}^{0;10} &= (D-3B-C)/s; \quad E_{00}^{0;02}/4 = F_{00}^{0;02} = s^3 B/(8g^2); \\
F_{12}^{0;10} &= -g^2(D-C)/s; \quad E_{20}^{0;02}/2 = F_{20}^{0;02} = -sC/2; \\
E_{01}^{0;01}/2 &= F_{01}^{0;01} = sD/2; \quad E_{02}^{0;02}/2 = F_{02}^{0;02} = s(D+C)/2; \\
F_{21}^{0;01} &= -(D-C)/s; \quad E_{00}^{1;00}/4 = F_{00}^{1;00} = s^3 L/(8g^2); \\
F_{03}^{0;01} &= -g^2(2D+C)/s; \quad E_{20}^{1;00}/2 = F_{20}^{1;00} = sD/2; \\
E_{02}^{1;00}/2 &= F_{02}^{1;00} = sB/2; \quad E_{30}^{1;10}/2 = F_{30}^{1;10} = s(D-C)/2; \\
F_{40}^{1;00} &= -(D-C)/s; \quad E_{12}^{1;10}/2 = F_{12}^{1;10} = g^2 sC/2; \\
F_{22}^{1;00} &= -g^2 C/s; \quad E_{01}^{1;01}/4 = F_{01}^{1;01} = -s^3 B/(8g^2); \\
F_{04}^{1;00} &= -g^2(D-C)/s; \quad E_{21}^{1;01}/2 = F_{21}^{1;01} = sC/2; \\
E_{10}^{1;10}/4 &= F_{10}^{1;10} = -s^3 D/8; \quad E_{03}^{1;01}/2 = F_{03}^{1;01} = s(D-C)/2.
\end{aligned} \tag{2.43}$$

**Решение контактных задач.** Изложенный метод позволяет найти распределение давления в контакте двух упругих тел по эллиптической области с фиксированными полуосами (например, если одно из тел является жестким, плоским эллиптическим в плане штампом или если поверхности тел содержат плоские участки, соприкасающиеся по эллипсу, а тела при этом все же с некоторой погрешностью можно считать полупространствами). Приведенное ниже решение используют для приблизительной оценки распределения давления в контакте торца ролика с бортиком кольца (рис. 2.8). Область контакта  $ABC$  имеет форму луночки, которую можно аппроксимировать эллипсом. Основная погрешность вносится при этом значительным отличием формы тел от полупространства.

Итак, пусть тела сжаты силой  $P$ , приложенной в точке с координатами  $x_0, y_0$ . Разность  $w$  нормальных перемещений задана формулой

$$w = c_{00} + c_{10}x + c_{01}y, \tag{2.44}$$

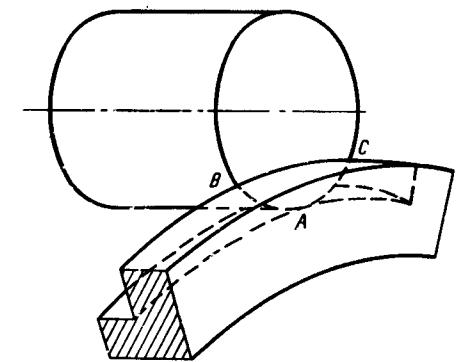
где  $c_{00}$  — сближение тел в центре;  $c_{10}$  и  $c_{01}$  — углы перекосов в плоскостях  $Oxz$  и  $Oyz$ . Постоянные  $c_{00}$ ,  $c_{10}$ ,  $c_{01}$  определяем из условия уравновешивания внешней нагрузки силой и моментами, возникающими в контакте. Считаем, что трение отсутствует. Распределение давления

$$p = G(f_{00} + f_{10}x + f_{01}y) [1 - (x/a)^2 - (y/b)^2]^{-1/2} \tag{2.45}$$

Рис. 2.8

Условия равновесия имеют вид

$$\begin{aligned}
P &= \iint pdxdy \equiv 2\pi abGf_{00}; \\
Px_0 &= \iint xpdxdy \equiv \frac{2}{3}\pi a^3 bGf_{10}; \\
Py_0 &= \iint ypdxdy \equiv \frac{2}{3}\pi ab^3 Gf_{01}.
\end{aligned}$$



То, что тела контактируют по эллипсу, равносильно неотрицательности давления, т.е.

$$f_{00} + f_{10}x + f_{01}y = \frac{P}{2\pi abG} \left(1 + \frac{3xx_0}{a^2} + \frac{3yy_0}{b^2}\right) \geq 0.$$

Отсюда следует условие

$$\frac{x_0^2}{(a/3)^2} + \frac{y_0^2}{(b/3)^2} \leq 1,$$

означающее, что точка с координатами  $x_0, y_0$  должна лежать внутри эллипса, концентричного и подобного  $\Omega$ , так же ориентированного, но длина осей которого в 3 раза меньше. Сближение и углы перекосов определяем по формулам (2.39), (2.43):

$$\begin{aligned}
c_{00} &= 2(1-\nu)E_{00}^{0;00}f_{00} = \frac{(1-\nu)P}{\pi bG} K; \\
c_{10} &= 2(1-\nu)E_{10}^{0;10}f_{10} = \frac{3(1-\nu)Px_0}{\pi a^2 bG} B; \\
c_{01} &= 2(1-\nu)E_{01}^{0;01}f_{01} = \frac{3(1-\nu)Py_0}{\pi b^3 G} D.
\end{aligned} \tag{2.46}$$

Согласно (2.45), давление обращается в бесконечность на границе области контакта. Это означает, что в узкой полоске вблизи границы напряжения в материале превышают предел текучести, вследствие чего теория упругости становится неприменимой. Для приближенной оценки фактического давления  $p^*$  следует принять  $p^* = \min(p, HB)$ , где  $HB$  — твердость материала.

Формулы (2.39) позволяют решать задачи о распределении касательной нагрузки в эллиптическом контакте двух тел под действием внешних

касательных сил  $F_x, F_y$  и момента  $M_z$ . Несущественно, является ли область контакта эллипсом фиксированных размеров, определяемых формой контактирующих тел, или же ее размеры зависят от нагрузки в силу решения Герца. Предполагаем, что проскальзывание в контакте отсутствует. Разности касательных перемещений

$$u = \delta_x - \beta y = a_{00} + a_{01}y; v = \delta_y + \beta x = b_{00} + b_{10}y,$$

где  $[\delta_x, \delta_y]$  – касательные смещения;  $\beta$  – угол поворота верхнего тела относительно нижнего.

Распределение касательной нагрузки имеет вид

$$\tau_x = G(d_{00} + d_{01}y)/\sqrt{1 - (x/a)^2 - (y/b)^2};$$

$$\tau_y = G(e_{00} + e_{10}x)/\sqrt{1 - (x/a)^2 - (y/b)^2},$$

поэтому

$$F_x = 2\pi abGd_{00}, F_y = 2\pi abGe_{00};$$

$$M_z = \iint_{\Omega} (x\tau_y - y\tau_x)dx dy = \frac{2}{3}\pi abG(a^2e_{10} - b^2d_{01}).$$

По формулам (2.39), (2.43)

$$\delta_x = a_{00} = 2(E^{0;00}_{00} - \nu E^{1;00}_{02})d_{00} = 2(K - \nu D)ad_{00};$$

$$\delta_y = b_{00} = 2(E^{0;00}_{00} - \nu E^{1;00}_{02})e_{00} = 2(K - \nu B)ae_{00};$$

$$\begin{aligned} b_{10} &= \beta = 2(E^{0;10}_{10} - \nu E^{1;10}_{12})e_{10} - 2\nu E^{1;01}_{21}d_{01} = \\ &= 2(B - \nu g^2 C)ae_{10} - 2\nu aCd_{01}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{01} &= -\beta = 2(E^{0;01}_{01} - \nu E^{1;01}_{21})d_{01} - 2\nu E^{1;10}_{12}e_{10} = \\ &= 2(D - \nu C)ad_{01} - 2\nu ag^2 Ce_{10}. \end{aligned}$$

Отсюда следует связь  $e_{10}$  с  $d_{01}$ , а с учетом выражений для  $F_x, F_y, M_z$  получаем зависимости

$$\begin{aligned} \delta_x &= \frac{K - \nu D}{\pi b G} F_x; \quad \delta_y = \frac{K - \nu B}{\pi b G} F_y; \\ \beta &= \frac{3(BD - \nu LC)}{\pi b^3 G(L - 4\nu g^2 C)}, \end{aligned} \tag{2.47}$$

по которым можно определять упругие касательные смещения и поворот шарика или профилированного ролика, например, при оценке момента

начала вращения вала в подшипнике качения. Касательная нагрузка обращается в бесконечность на границе эллипса. Это означает, что в достаточно узкой полоске вблизи границы эллипса касательное напряжение превышает предельное кулоновское напряжение трения  $fp$  и при этом возникает относительное проскальзывание поверхностей.

В описанных выше задачах напряжения (нормальное и касательное) имели особенность на границе области контакта. Если границы области контакта неизвестны, то они в процессе контактирования формируются так, чтобы напряжения на границе обратились в нуль. Примером такой ситуации является задача Герца. Пусть после распределения давления согласно этой задаче к одному из тел приложена касательная сила  $[F_x, F_y]$  и требуется найти касательное смещение  $[\delta_x, \delta_y]$  верхнего тела относительно нижнего. Предположим, что в контакте может возникать проскальзывание, причем  $F \equiv |[F_x, F_y]| \leq fp$ .

Область контакта состоит из области сцепления  $\Omega_h$ , в которой нет относительного движения частиц поверхности, и области проскальзывания  $\Omega_g$ , в которой касательная нагрузка достигает напряжения кулоновского трения:  $|[\tau_x, \tau_y]| = fp$ . В области  $\Omega_h$  задаем  $u = \delta_x$  и  $v = \delta_y$ , а в  $\Omega_g$ , помимо условия  $|[\tau_x, \tau_y]| = fp$ , требуется, чтобы локальное проскальзывание происходило в направлении локальной касательной нагрузки  $[\tau_x, \tau_y]$ . Приведенное ниже решение удовлетворяет этому последнему условию приближенно, так как считаем, что нагрузка  $[\tau_x, \tau_y]$  направлена так же, как  $[F_x, F_y]$ , а не в сторону локального проскальзывания. Для построения поля распределенной касательной нагрузки из значения  $[\tau'_x, \tau'_y]$ , соответствующего полному скольжению, вычитаем значение  $[\tau''_x, \tau''_y]$ , отличное от нуля только в области  $\Omega_h$  и пропорциональное  $[\tau'_x, \tau'_y]$ . Область сцепления при этом является эллипсом с полуосями  $a'', b''$ , концентричным и подобным эллипсу контакта и так же ориентированным. Пусть  $[u', v']$  и  $[u'', v'']$  – разности перемещений тел, соответствующие нагрузкам  $[\tau'_x, \tau'_y]$  и  $[\tau''_x, \tau''_y]$ . Тогда в области  $\Omega$

$$[\tau'_x, \tau'_y] = fp \frac{[F_x, F_y]}{F} = \frac{fGf_{00}}{F} [F_x, F_y] \sqrt{1 - (\frac{x}{a})^2 - (\frac{y}{b})^2},$$

а вне  $\Omega$  вектор  $[\tau'_x, \tau'_y] = 0$ . В области  $\Omega_h$

$$[\tau''_x, \tau''_y] = fGf_{00}'' \frac{[F_x, F_y]}{F} \sqrt{1 - (\frac{x}{a''})^2 - (\frac{y}{b''})^2},$$

а вне  $\Omega_h$  вектор  $[\tau''_x, \tau''_y] = 0$ . Здесь  $[\tau'_x, \tau'_y] - [\tau''_x, \tau''_y] = [\tau_x, \tau_y]$ .

Для разностей перемещений верны равенства:  
в области  $\Omega$

$$[u', v'] = [a_{00}, b_{00}] + [a_{20}, b_{20}]x^2 + [a_{11}, b_{11}]xy + [a_{02}, b_{02}]y^2;$$

$$[u'', v''] = [a''_{00}, b''_{00}] + [a''_{20}, b''_{20}]x^2 + [a''_{11}, b''_{11}]xy + [a''_{02}, b''_{02}]y^2;$$

в области  $\Omega_h$

$$[u, v] = [u' - u'', v' - v''] = [\delta_x, \delta_y].$$

Согласно (2.39) и (2.42),

$$a_{00} = 2(F^{0;00}_{20} - \nu F^{1;00}_{20})Y_x;$$

$$a_{20} = (F^{0;00}_{20} - \nu F^{1;00}_{40})Y_x;$$

$$b_{11} = -2\nu F^{1;00}_{22}Y_x;$$

$$a_{02} = (F^{0;00}_{02} - \nu F^{1;00}_{22})Y_x; \quad Y_x \equiv f f_{00} F_x / F;$$

$$a''_{00} = 2(F''^{0;00}_{00} - \nu F''^{1;00}_{20})Y_x'';$$

$$a''_{20} = (F''^{0;00}_{20} - \nu F''^{1;00}_{40})Y_x'';$$

$$b''_{11} = -2\nu F''^{1;00}_{22}Y_x'';$$

$$a''_{02} = (F''^{0;00}_{02} - \nu F''^{1;00}_{22})Y_y''; \quad Y_x'' \equiv f f_{00} F_x / F;$$

$$b_{00} = 2(F^{0;00}_{00} - \nu F^{1;00}_{02})Y_y;$$

$$b_{20} = (F^{0;00}_{20} - \nu F^{1;00}_{22})Y_y;$$

$$a_{11} = -2\nu F^{1;00}_{22}Y_y;$$

$$b_{02} = (F^{0;00}_{02} - \nu F^{1;00}_{04})Y_y; \quad Y_y \equiv f f_{00} F_y / F;$$

$$b''_{00} = 2(F''^{0;00}_{00} - \nu F''^{1;00}_{02})Y_y'';$$

$$b''_{20} = (F''^{0;00}_{20} - \nu F''^{1;00}_{20})Y_y'';$$

$$a''_{11} = -2\nu F''^{1;00}_{22}Y_y'';$$

$$b''_{02} = (F''^{0;00}_{02} - \nu F''^{1;00}_{04})Y_y'';$$

$$Y_y'' \equiv f f_{00} F_y / F.$$

Здесь коэффициенты  $F^{h;pq}_{mn}$  взяты для малой полуоси эллипса контакта, а  $F''^{h;pq}_{mn}$  — для малой полуоси эллиптической области сцепления. Из (2.40) и (2.42) следует, что коэффициенты  $F^{h;pq}_{mn}$  и  $F''^{h;pq}_{mn}$  при  $x^2$ ,  $xy$  и  $y^2$  отличаются только множителями  $1/a$  и  $1/a''$ , так как в

(2.40)  $d = -1$ . Для равенства нулю членов второго порядка по  $x$  и  $y$  в области  $\Omega_h$ , как того требует граничное условие, положим  $f''_{00} = a'' f_{00}/a$ . Теперь выразим  $a''$  через  $a$  с помощью формул для сил  $F_x$  и  $F_y$ :

$$\begin{aligned} F_x &= \iint_{\Omega} \tau'_x dx dy - \int_{\Omega_h} \tau''_x dx dy = \iint_{\Omega} \tau'_x dx dy - \int_{\Omega} \frac{a'' b'' a''}{aba} \tau'_x dx dy = \\ &= [1 - (\frac{a''}{a})^3] f P F_x / F; \\ F_y &= [1 - (\frac{a''}{a})^3] f P F_y / F. \end{aligned}$$

При этом  $b''/b = a''/a = (1 - F/(fP))^{1/3}$ ,  $F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$ . Что касается членов нулевого порядка в перемещениях, то из равенства  $d = 0$  в (2.40) следует  $F'' = Fa''/a$ , так что

$$a''_{00} = a_{00} \frac{f''_{00} a''}{f_{00} a} = a_{00} (1 - \frac{F}{fP})^{2/3};$$

$$b''_{00} = b_{00} (1 - F/fP)^{2/3}.$$

Согласно формулам (2.43),  $F^{0;00}_{00} = aK/2$ ,  $F^{1;00}_{20} = aD/2$ ,  $F^{1;00}_{20} = aB/2$ . Для  $\delta_x$  и  $\delta_y$  верны формулы

$$\begin{aligned} \delta_x &= [1 - (1 - \frac{F}{fP})^{2/3}] (K - \nu D) \frac{3fP F_x}{2\pi b GF}; \\ \delta_y &= [1 - (1 - \frac{F}{fP})^{2/3}] (K - \nu B) \frac{3fP F_y}{2\pi b GF}. \end{aligned} \quad (2.48)$$

При  $F \rightarrow 0$  получаем тот же результат, что и при расчете по формуле (2.47). При  $F = fP$  формулы (2.48) дают

$$\delta_x^{\max} = (K - \nu D) \frac{3fP F_x}{2\pi b GF}; \quad (2.49)$$

$$\delta_y^{\max} = (K - \nu B) \frac{3fP F_y}{2\pi b GF},$$

где  $\delta_x^{\max}, \delta_y^{\max}$  — максимальное предварительное смещение под действием силы  $[F_x, F_y]$ , равной по абсолютному значению  $fP$ .

При дальнейшем увеличении силы начинается скольжение. При  $\nu \neq 0$  направление локального проскальзывания не совпадает с направлением силы  $[F_x, F_y]$ . Пусть, например,  $F_y = 0$ , а  $F_x$  возрастает от нуля до  $fP$ . Напряжения трения, по предположению, в каждой точке параллельны

оси  $Ox$ , то же относится и к проскальзыванию, определяемому вектором  $[\partial(\delta_x - u)/\partial t, \partial(\delta_y - v)/\partial t]$ , у-компоненты которого должна обращаться в нуль. Поскольку при  $F_y = 0$  смещение  $\delta_y = 0$ , то  $\partial v / \partial t = 0$  в любой момент времени. Это значит, что в конечном состоянии полного скольжения  $v = 0, a'' = 0, v'' = 0$  и  $v = v' = b_{11}xy$ , где  $b_{11} \neq 0$  при  $\nu \neq 0$ . Таким образом, разность перемещений  $[u, v]$  не всегда коллинеарна  $[\tau_x, \tau_y] = [\tau_x, 0]$ . Для круговой области контакта наибольший угол между  $[u, v]$  и  $[\tau_x, 0]$  равен  $9,6^\circ$  при  $\nu = 0,5$  и  $4,1^\circ$  при  $\nu = 0,25$ . Это позволяет считать угол между  $[u, v]$  и  $[\tau_x, \tau_y]$  малым. Формулы (2.48) и (2.49) используют для расчета предварительного упругого смещения в контактах подшипниковых узлов при определении моментов сил, необходимых для начала движения.

#### 2.4. НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ В ОБЛАСТИ КОНТАКТА

Общие формулы для напряжений под эллиптическим контактом при нормальном нагружении. Напряжение в упругом полупространстве, нагруженном распределенным по области  $\Omega$  давлением  $p(x, y)$ , определяются формулами

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{1}{2\pi} \left[ -\frac{\partial^2 x}{\partial z^2} + 2\nu \frac{\partial v}{\partial z} - (1-2\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right]; \\ \sigma_y &= \frac{1}{2\pi} \left[ -z \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + 2\nu \frac{\partial v}{\partial z} - (1-2\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right]; \\ \sigma_z &= \frac{1}{2\pi} \left( -z \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{\partial v}{\partial z} \right); \\ \tau_{xy} &= -\frac{1}{2\pi} \left[ z \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + (1-2\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right]; \\ \tau_{zx} &= -\frac{z}{2\pi} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z}; \\ \tau_{yz} &= -\frac{z}{2\pi} \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z};\end{aligned}\tag{2.50}$$

где

$$v(x, y, z) = \iint_{\Omega} \frac{p(\xi, \eta)}{r} d\xi d\eta;$$

$$w(x, y, z) = \iint_{\Omega} p(\xi, \eta) \ln(r + z) d\xi d\eta;\tag{2.51}$$

$$r \equiv \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + z^2}.$$

Начало  $O$  системы координат  $Oxyz$  и оси  $Ox, Oy$  лежат на поверхности, ось  $Oz$  направлена вглубь по нормали к поверхности (рис. 2.9). Если область  $\Omega$  – эллипс, как на рисунке, а давление распределено согласно Герцу:

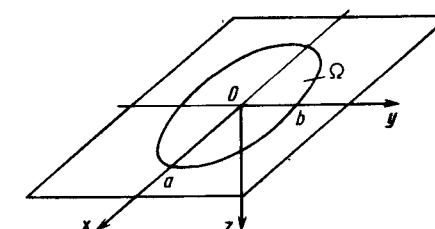


Рис. 2.9

$$p = p_0 \sqrt{1 - (\xi/a)^2 - (\eta/b)^2},$$

где  $a$  и  $b$  – соответственно большая и малая полуоси эллипса, то

$$\begin{aligned} v(x, y, z) = & \frac{3P}{4} \int_{s_0}^{\infty} \left( 1 - \frac{x^2}{a^2 + s} - \frac{y^2}{b^2 + s} - \right. \\ & \left. - \frac{z^2}{s} \right) \frac{ds}{\sqrt{(a^2 + s)(b^2 + s)s}}, \end{aligned} \quad (2.52)$$

где  $s_0$  – наибольший корень уравнения третьей степени

$$\frac{x^2}{a^2 + s_0} + \frac{y^2}{b^2 + s_0} + \frac{z^2}{s_0} = 1; \quad (2.53)$$

$P$  – нормальная сила, действующая на область  $\Omega$ .

Поскольку

$$\partial w / \partial z = v;$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x, y, \infty) = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}(x, y, \infty) = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}(x, y, \infty) = 0,$$

по известному значению  $v$  производные от  $w$ , входящие в формулы (2.51), можно найти интегрированием:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^\alpha \partial y^{2-\alpha}} = - \int_z^{\infty} \frac{\partial^2 v}{\partial x^\alpha \partial y^{2-\alpha}} dz \quad (\alpha = 0, 1, 2). \quad (2.54)$$

Таким образом, для вычисления напряжений достаточно найти одну функцию  $v(x, y, z)$ .

Так как подынтегральная функция в (2.52) с учетом (2.53) обращается в нуль при  $s = s_0$ , то для производных от  $v$  верны следующие формулы:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial z} = & - \frac{3Pz}{2} \int_{s_0}^{\infty} \frac{ds}{s^{3/2} \sqrt{(a^2 + s)(b^2 + s)}}, \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = & \frac{3P}{2} \left[ \frac{x}{(a^2 + s_0)^{3/2} \sqrt{(b^2 + s_0)s_0}} \frac{\partial s_0}{\partial x} - \right. \\ & \left. - \int_{s_0}^{\infty} \frac{ds}{(a^2 + s)^{3/2} \sqrt{(b^2 + s)s}} \right]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = & \frac{3P}{2} \left[ \frac{y}{(b^2 + s_0)^{3/2} \sqrt{(a^2 + s_0)s_0}} \frac{\partial s_0}{\partial y} - \right. \\ & \left. - \int_{s_0}^{\infty} \frac{ds}{(b^2 + s)^{3/2} \sqrt{(a^2 + s)s}} \right]; \\ \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = & \frac{3P}{2} \left[ \frac{z}{s_0^{3/2} \sqrt{(a^2 + s_0)(b^2 + s_0)}} \frac{\partial s_0}{\partial z} - \right. \\ & \left. - \int_{s_0}^{\infty} \frac{ds}{s_0^{3/2} \sqrt{(a^2 + s)(b^2 + s)}} \right]. \end{aligned} \quad (2.55)$$

Производные от  $s_0$  определяем дифференцированием уравнения (2.53):

$$\begin{aligned} \frac{\partial s_0}{\partial x} = & \frac{2x}{(a^2 + s_0)Y}, \quad \frac{\partial s_0}{\partial y} = \frac{2y}{(b^2 + s_0)Y}; \\ \frac{\partial s_0}{\partial z} = & \frac{2z}{s_0 Y}; \\ Y = Y(x, y, z) = & \frac{x^2}{(a^2 + s_0)^2} + \frac{y^2}{(b^2 + s_0)^2} + \frac{z^2}{s_0^2}. \end{aligned} \quad (2.56)$$

**Напряжение под центром контакта.** На оси  $Oz$  координаты  $x$  и  $y$  равны нулю; при этом решением уравнения (2.53) является  $s_0 = z^2$ , а смешанные производные от  $v$  в (2.55) обращаются в нуль. Поэтому на оси  $Oz$  отсутствуют касательные напряжения, а  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  и  $\sigma_z$  являются главными напряжениями. Из формул (2.55) следует, что

$$\frac{\partial v}{\partial z} - z \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = - \frac{3P}{\sqrt{(a^2 + z^2)(b^2 + z^2)}},$$

а из (2.51) с учетом  $P = 2\pi p_0 ab/3$

$$\frac{\sigma z}{p_0} = - \frac{1}{\sqrt{(1 + \xi^2)(1 + \beta^2 \xi^2)}}, \quad (2.57)$$

где  $\xi = z/b$  – безразмерная глубина;  $\beta = b/a$  – отношение длин полуосей эллипса контакта.

Формула (2.57) получена В.М. Макушиным. Напряжение  $\sigma_z$ , на поверхности равное  $-p_0$ , монотонно убывает по абсолютному значению, стремясь к нулю при  $z \rightarrow \infty$ .

В выражениях для  $\sigma_x$  и  $\sigma_y$  входят нормальные эллиптические интегралы первого и второго рода

$$F(\psi, e) = \int_0^\psi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} ; \quad E(\psi, e) = \int_0^\psi \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi} d\varphi, \quad (2.58)$$

где  $e = \sqrt{1 - \beta^2}$  – эксцентриситет эллипса контакта.

Для любого  $s_0$  верно проверяемое дифференцированием тождество

$$\frac{b^2}{2} \int_{s_0}^{\infty} \frac{ds}{s^{3/2} \sqrt{(a^2 + s)(b^2 + s)}} = \sqrt{\frac{b^2 + s_0}{(a^2 + s_0)s_0}} - \frac{1}{a} E(\operatorname{arcctg} \frac{\sqrt{s_0}}{a}, e).$$

Отсюда следует

$$\frac{\partial v}{\partial z} = \frac{2\pi p_0 z}{\beta} \left[ \frac{1}{a} E(\operatorname{arcctg} \frac{\sqrt{s_0}}{a}, e) - \sqrt{\frac{b^2 + s_0}{s_0(a^2 + s_0)}} \right]. \quad (2.59)$$

Интеграл в формуле (2.55) для  $\partial^2 v / \partial x^2$  заменой  $s = a^2 \operatorname{ctg} \varphi$  приводим к виду

$$-\frac{2}{a^3 e^2} [E(\operatorname{arcctg} \frac{\sqrt{s_0}}{a}, e) - F(\operatorname{arcctg} \frac{\sqrt{s_0}}{a}, e)],$$

откуда

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{2\pi p_0 \beta}{ae^2} [E(\operatorname{arcctg} \frac{\sqrt{s_0}}{a}, e) - F(\operatorname{arcctg} \frac{\sqrt{s_0}}{a}, e)]. \quad (2.60)$$

Интегрирование этого равенства по частям от  $z$  до  $\infty$  при  $s_0 = z^2$  дает

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= \frac{2\pi p_0 \beta}{e^2} \left\{ \frac{z}{a} [E(\operatorname{arcctg} \frac{z}{a}, e) - F(\operatorname{arcctg} \frac{z}{a}, e)] + \right. \\ &\quad \left. + 1 - \sqrt{\frac{b^2 + z^2}{a^2 + z^2}} \right\}. \end{aligned} \quad (2.61)$$

В силу тождества

$$\int_0^{\psi} \frac{\sin^2 \varphi d\varphi}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}} = \frac{1}{e^2} \left[ \frac{E(\psi, e)}{\beta^2} - F(\psi, e) \right] - \frac{\sin \psi \cos \psi}{\beta^2 \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \psi}} \quad (2.62)$$

интеграл в формуле (2.55) для  $\partial^2 v / \partial y^2$  при  $s = a^2 \operatorname{ctg}^2 \varphi$  сводится к

$$2 \left\{ \frac{1}{a^3 e^2} \left[ \frac{1}{\beta^2} E(\operatorname{arcctg} \frac{\sqrt{s_0}}{a}, e) - F(\operatorname{arcctg} \frac{\sqrt{s_0}}{a}, e) \right] - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{b^2} \sqrt{\frac{s_0}{(a^2 + s_0)(b^2 + s_0)}} \right\},$$

а с учетом  $s_0 = z^2$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} &= -\frac{2\pi p_0}{\beta} \left\{ \frac{1}{ae^2} [E(\operatorname{arcctg} \frac{z}{a}, e) - \right. \\ &\quad \left. - \beta^2 F(\operatorname{arcctg} \frac{z}{a}, e)] - \frac{z}{\sqrt{(a^2 + z^2)(b^2 + z^2)}} \right\}. \end{aligned} \quad (2.63)$$

Представив  $\partial^2 v / \partial y^2$  через левую часть (2.62) и проинтегрировав по частям от  $z$  до  $\infty$ , получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} &= \frac{2\pi p_0}{\beta} \left\{ -\frac{z}{ae^2} [E(\operatorname{arcctg} \frac{z}{a}, e) - \beta^2 F(\operatorname{arcctg} \frac{z}{a}, e)] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{z^2}{\sqrt{(a^2 + z^2)(b^2 + z^2)}} + \frac{\beta}{e^2} \left( \sqrt{\frac{a^2 + z^2}{b^2 + z^2}} - 1 \right) \right\}. \end{aligned} \quad (2.64)$$

По формулам (2.55), (2.60), (2.61) определяем

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_x}{p_0} &= -\frac{1}{e^2} \left\{ \beta(1 - 2\nu) + (2\nu - \beta^2) \sqrt{\frac{1 + \xi^2}{1 + \beta^2 \xi^2 + \xi^2}} + \right. \\ &\quad \left. + 2\xi[(\beta^2 - \nu) E(\operatorname{arcctg}(\beta\xi), e) - \beta^2(1 - \nu) F(\operatorname{arcctg}(\beta\xi), e)] \right\}, \end{aligned} \quad (2.65)$$

а по формулам (2.55), (2.60), (2.63), (2.64)

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_y}{p_0} &= -\frac{1}{e^2} \left\{ \beta(2\nu - 1) + 2\xi[(\beta^2 \nu - 1) E(\operatorname{arcctg}(\beta\xi), e) + \right. \\ &\quad \left. + \beta^2(1 - \nu) F(\operatorname{arcctg}(\beta\xi), e)] + \frac{[2 - (1 + 2\nu)\beta^2]\xi^2 + 1 - 2\nu\beta^2}{\sqrt{(1 + \xi^2)(1 + \beta^2 \xi^2)}} \right\}. \end{aligned} \quad (2.66)$$

Выражения для  $\sigma_x$  и  $\sigma_y$  можно привести к формулам, полученным В.М. Макушиным:

на поверхности ( $\xi = 0$ )

$$\frac{\sigma_z}{p_0} = -1, \quad \frac{\sigma_x}{p_0} = -\frac{2\nu + \beta}{1 + \beta}, \quad \frac{\sigma_y}{p_0} = -\frac{1 + 2\nu\beta}{1 + \beta};$$

для цилиндров ( $\beta = 0$ )

$$\begin{aligned}\frac{\sigma_z}{p_0} &= -\frac{1}{\sqrt{1+\xi^2}} ; \\ \frac{\sigma_x}{p_0} &= 2\nu(\xi - \sqrt{1+\xi^2});\end{aligned}\quad (2.67)$$

$$\frac{\sigma_y}{p_0} = 2\xi - \frac{1+2\xi^2}{\sqrt{1+\xi^2}};$$

для круговой площадки контакта ( $\beta = 1$ )

$$\begin{aligned}\frac{\sigma_z}{p_0} &= -\frac{1}{1+\xi^2}; \\ \frac{\sigma_x}{p_0} = \frac{\sigma_y}{p_0} &= -[(1-\nu)(1-\xi \operatorname{arcctg} \xi) - \frac{1}{2(1+\xi^2)}].\end{aligned}\quad (2.68)$$

Для получения этих формул из (2.65), (2.66) необходимо раскрыть неопределенность при  $e \rightarrow 0$ . Все напряжения стремятся к нулю при  $\xi \rightarrow \infty$ .

**Напряжения в плоскости  $Oyz$ .** Наибольший интерес представляет распределение напряжений в плоскости, проходящей через малую ось эллипса контакта перпендикулярно к поверхности. При качении шарика по желобу в направлении  $Ox$  каждая частица материала шарика или кольца испытывает цикл переменного нагружения. Согласно Лундбергу и Пальмгрену, на поверхности, т.е. при  $x = 0$ , для удобства выкладок вводим углы  $\gamma$  и  $\varphi$ , связанные с декартовыми координатами  $y, z$  следующими равенствами:

$$y = \sqrt{b^2 + a^2 \operatorname{tg}^2 \gamma} \sin \varphi; \quad z = a \operatorname{tg} \gamma \cos \varphi. \quad (2.69)$$

Тогда решением уравнения (2.53) является

$$s_0 = a^2 \operatorname{tg}^2 \gamma. \quad (2.70)$$

Кривые  $\gamma = \text{const}$  представляют собой части эллипсов с центром в точке  $O$  и полуосями  $\sqrt{b^2 + a^2 \operatorname{tg}^2 \gamma}$  и  $a \operatorname{tg} \gamma$  (рис. 2.10), кривые  $\varphi = \text{const}$  — гиперболы с асимптотами  $y = z \operatorname{tg} \varphi$ , проходящие через точки  $z = 0, y = b \sin \varphi$  ( $\beta = 0,2$ ).

Из формул (2.55) следует, что при  $x = 0$  равны нулю  $\partial^2 v / \partial x \partial y$  и  $\partial^2 v / \partial x \partial z$  и, следовательно,  $\tau_{xy} = \tau_{xz} = 0$ . Согласно (2.51), (2.55), (2.56), (2.70),

$$\frac{\tau_{yz}}{p_0} = -\beta \frac{\cos^2 \varphi \sin \varphi \sin \gamma}{\operatorname{tg}^2 \gamma + \beta^2 \cos^2 \varphi}. \quad (2.71)$$

Напряжение  $\tau_{yz} = 0$  при  $y = 0$  ( $\varphi = 0$ ), при  $z = 0$  ( $\varphi = \pm \pi/2$  или  $\gamma = 0$ ), при  $y^2 + z^2 \rightarrow \infty$  ( $\gamma \rightarrow \pi/2$ ). Наибольшее значение  $|\tau_{yz}|$  определяем с помощью уравнений  $\partial \tau_{yz} / \partial \varphi = \partial \tau_{yz} / \partial \gamma = 0$ , которые сводятся к системе

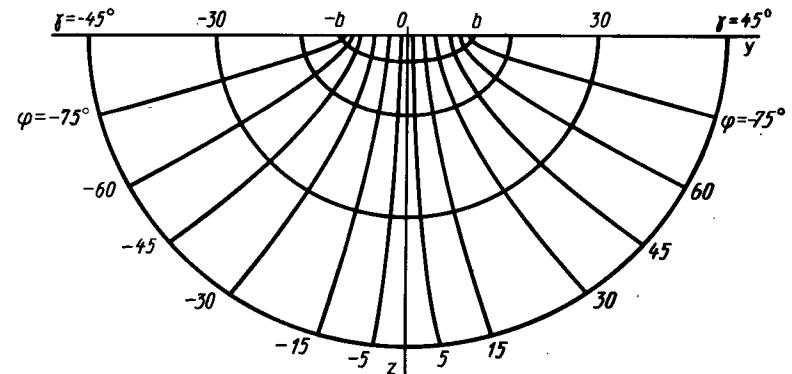


Рис. 2.10

$$\operatorname{tg}^2 \gamma (2 \operatorname{tg}^4 \varphi + \operatorname{tg}^2 \varphi - 1) = \beta^2;$$

$$\operatorname{tg}^2 \gamma (1 + \operatorname{tg}^2 \varphi) (2 \operatorname{tg}^2 \gamma + 1) = \beta^2;$$

откуда  $\operatorname{tg}^2 \gamma = \operatorname{tg}^2 \varphi - 1 \equiv t - 1$ , где  $t$  — решение уравнения  $(t^2 - 1)(2t - 1) = \beta^2$ . Значение  $t$  как функция  $\beta$  с точностью  $\pm 2\%$  представим, согласно Б. Хэмроку и Д. Даусону, формулой

$$t = 1 + 0,3044 \beta^{1,8559}. \quad (2.72)$$

Координаты точки максимума  $|\tau_{yz}|$  находим по формулам

$$\begin{aligned}z_0 &= \xi_0 b \equiv b / [(t+1)\sqrt{2t-1}] = a \sqrt{(t-1)/(t+1)}; \\ y_0 &= \pm \eta_0 b \equiv \pm bt \sqrt{(2t+1)(2t-1)/(t+1)}.\end{aligned}\quad (2.73)$$

Максимум  $|\tau_{yz}|$  есть

$$\tau_0 = p_0 \sqrt{2t-1} / [2t(t+1)]. \quad (2.74)$$

Напряжения  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  определить несколько сложнее. Формулы (2.59) и (2.60) верны для любых  $x, y, z$ . Подстановка в них  $s_0$  из (2.70) дает

$$\frac{\partial v}{\partial z} = -2\pi p_0 \xi \left[ \frac{\cos \gamma}{\operatorname{tg} \gamma} \sqrt{\beta^2 + \operatorname{tg}^2 \gamma} - E\left(\frac{\pi}{2} - \gamma, e\right) \right]; \quad (2.75)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{2\pi p_0 \beta}{ae^2} [E\left(\frac{\pi}{2} - \gamma, e\right) - F\left(\frac{\pi}{2} - \gamma, e\right)].$$

В выражении (2.55) для  $\partial^2 v / \partial y^2$  появляется отличное от нуля слагаемое,

содержащее  $\partial s_0 / \partial y$ . Подстановка (2.69) и (2.70) с учетом (2.63) в (2.55) и следующей из (2.69) зависимости  $z$  от  $\gamma$  и  $y$  приводит к результату

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{3P}{ab^2} \left\{ \begin{aligned} & (\operatorname{tg}^2 \gamma + \beta^2)^{3/2} \sin \gamma \\ & - \frac{1}{e^2} [E(\frac{\pi}{2} - \gamma, e) - \beta^2 F(\frac{\pi}{2} - \gamma, e)] \end{aligned} \right\}, \quad (2.76)$$

где  $\eta = y/b$ .

Согласно (2.51), (2.55) и (2.70),

$$\frac{\sigma_z}{p_0} = -\frac{\beta \cos \gamma (\operatorname{tg}^2 \gamma + \beta^2 - \beta^2 \eta^2)^{3/2}}{(\operatorname{tg}^2 \gamma + \beta^2)^2 - \beta^4 \eta^2}. \quad (2.77)$$

Видно, что при  $\eta = 0$  это выражение совпадает с (2.57). а при  $|y| > b$  и  $z = 0$  ( $\varphi = \pm \pi/2$ ) напряжение  $\sigma_z = 0$ . В соответствии с (2.54), интегрирование равенства (2.75) дает

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = & \frac{2\pi p_0 \beta}{e^2} \left\{ \beta \xi [E(\frac{\pi}{2} - \gamma, e) - F(\frac{\pi}{2} - \gamma, e)] + 1 - Y - \right. \\ & \left. - \frac{\beta \eta}{e} [\arctg \frac{e}{\beta \eta} - \arctg \frac{eY}{\beta \eta}] \right\}; \quad Y \equiv \sqrt{1 - (e^2 + \beta^2 \eta^2) \cos^2 \gamma}. \end{aligned} \quad (2.78)$$

Из (2.51), (2.75), (2.78) следует

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_x}{p_0} = & -\frac{1}{e^2} \left\{ \beta(1 - 2\nu)[1 + Y - \frac{\beta \eta}{e} (\arctg \frac{eY}{\beta \eta} - \arctg \frac{e}{\beta \eta})] + \right. \\ & + 2\nu(1 - \beta^2) \xi \frac{\cos \gamma}{\operatorname{tg} \gamma} \sqrt{\operatorname{tg}^2 \gamma + \beta^2} + 2\xi[(\beta^2 - \nu)E(\frac{\pi}{2} - \gamma, e) - \right. \\ & \left. - \beta^2(1 - \nu)F(\frac{\pi}{2} - \gamma, e)] \right\}. \end{aligned} \quad (2.79)$$

При  $y = 0$  эта формула совпадает с (2.65), а на малой оси эллипса контакта, т.е. при  $\gamma = 0$  ( $\xi = 0, |\eta| < 1$ ),

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_x}{p_0} = & -\frac{1}{e^2} [\beta(1 - 2\nu) + (2\nu - \beta^2) \sqrt{1 - \eta^2} - \\ & - \frac{\beta^2(1 - 2\nu)\eta}{e} (\arctg \frac{e}{\beta \eta} - \arctg \frac{e\sqrt{1 - \eta^2}}{\eta})], \end{aligned} \quad (2.80)$$

при  $\eta = \pm 1$ , т.е. на концах малой оси,

$$\frac{\sigma_x}{p_0} = -(1 - 2\nu) \frac{\beta}{e^2} \left( 1 - \frac{\beta}{e} \arctg \frac{e}{\beta} \right). \quad (2.81)$$

Интегрирование выражения (2.76) в соответствии с (2.54) дает

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = & \frac{2\pi p_0}{e^2} \left\{ e^2 \xi \left[ \frac{\cos \gamma \sin \gamma}{\sqrt{1 - e^2 \cos^2 \gamma}} - E(\frac{\pi}{2} - \gamma, e) + \right. \right. \\ & + \beta^2 F(\frac{\pi}{2} - \gamma, e) \left. \right] + \frac{\beta^2 \eta}{e} \left[ \arctg \frac{e}{\beta \eta} - \arctg \left( \frac{e}{\beta \eta} \sqrt{\sin^2 \gamma + \beta^2(1 - \eta^2) \cos^2 \gamma} \right) \right] + \\ & \left. \left. + \beta \left( \frac{\sqrt{\sin^2 \gamma + \beta^2(1 - \eta^2) \cos^2 \gamma}}{\sin^2 \gamma + \beta^2 \cos^2 \gamma} - 1 \right) \right\}. \right. \end{aligned} \quad (2.82)$$

Из (2.51), (2.76), (2.82) и (2.75) следует

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_y}{p_0} = & -\frac{1}{e^2} \left\langle e^2 \xi \left[ \frac{(\operatorname{tg}^2 \gamma + \beta^2)^{3/2}}{(\operatorname{tg}^2 \gamma + \beta^2)^2 - \beta^4 \eta^2} + \right. \right. \\ & + 2\nu \frac{\sqrt{\operatorname{tg}^2 \gamma + \beta^2}}{\operatorname{tg}^2 \gamma} + \frac{1 - 2\nu}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 \gamma + \beta^2}} \sin \gamma + \\ & + \beta(1 - 2\nu) \left[ \frac{\beta \eta}{e} \left[ \arctg \frac{e}{\beta \eta} - \arctg \left( \frac{e}{\beta \eta} \sqrt{\sin^2 \gamma + \beta^2(1 - \eta^2) \cos^2 \gamma} \right) \right] + \right. \\ & \left. \left. + \frac{\sqrt{\sin^2 \gamma + \beta^2(1 - \eta^2) \cos^2 \gamma}}{\sin^2 \gamma + \beta^2 \cos^2 \gamma} - 1 \right] + 2\xi[(\beta^2 \nu - 1)E(\frac{\pi}{2} - \gamma, e) + \right. \\ & \left. \left. + (1 - \nu)\beta^2 F(\frac{\pi}{2} - \gamma, e)] \right\rangle. \right. \end{aligned} \quad (2.83)$$

При  $y = 0, \operatorname{tg} \gamma = z/a$  эта формула сводится к (2.66); при этом на малой оси эллипса контакта

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_y}{p_0} = & -\frac{1}{e^2} [\beta(2\nu - 1) + (1 - 2\nu\beta^2) \sqrt{1 - \eta^2} + \\ & + \frac{\beta^2(1 - 2\nu)\eta}{e} (\arctg \frac{e}{\beta \eta} - \arctg \frac{e\sqrt{1 - \eta^2}}{\eta})]; \end{aligned} \quad (2.84)$$

на концах малой оси

$$\frac{\sigma_y}{p_0} = -(1 - 2\nu) \frac{\beta}{e^2} \left( \frac{\beta}{e} \arctg \frac{e}{\beta} - 1 \right). \quad (2.85)$$

Формулы (2.77), (2.79) и (2.83) можно также записать в переменных  $\eta$  и  $\xi$  через  $\varphi$  и  $\gamma$  с учетом соотношений (2.69).

**Линейный контакт.** Эллипс контакта в подшипниках качения, как правило, достаточно вытянут ( $\beta = 0,1 \dots 0,3$ ), поэтому представляют интерес формулы для напряжений при  $\beta \ll 1$ . Для роликового подшипника  $\beta = 0$ . При  $\beta \rightarrow 0$  координаты (2.69) неудобны, так как  $a \rightarrow \infty$ . Используем переменные  $\eta$ ,  $\xi$  и  $\lambda = s_0/b^2$ ; тогда при  $\beta = 0$

$$\frac{\tau_{yz}}{p_0} = -\frac{\eta\xi^2}{(\lambda^2 + \xi^2)\sqrt{1+\lambda}}, \quad \frac{\sigma_z}{p_0} = -\frac{\xi^3\sqrt{1+\lambda}}{(\lambda^2 + \xi^2)\sqrt{\lambda}}. \quad (2.86)$$

При необходимости учесть следующий порядок в разложении  $\tau_{yz}$  и  $\sigma_z$  по степеням  $\beta$  выражения (2.86) следует умножить на  $1 - \lambda\beta^2/2$ . Тогда они будут верны на расстояниях от центра контакта, много меньших длины большой оси эллипса. По формулам (2.79) и (2.83) с учетом связи  $\operatorname{tg}\gamma = \sqrt{s_0}/a$

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_x}{p_0} &= -2\nu\xi\left(\sqrt{\frac{1+\lambda}{\lambda}} - 1\right); \\ \frac{\sigma_y}{p_0} &= -\xi\left[\sqrt{\frac{1+\lambda}{\lambda}}\left(\frac{\lambda^2}{\lambda^2 + \xi^2} + 1\right) - 2\right]. \end{aligned} \quad (2.87)$$

В переменных  $\varphi$ ,  $\alpha = \sqrt{s_0}/b = \sqrt{\lambda}$

$$\begin{aligned} \frac{\tau_{yz}}{p_0} &= -\frac{\alpha \cos^2 \varphi \sin \varphi}{\alpha^2 + \cos^2 \varphi}; \\ \frac{\sigma_z}{p_0} &= -\frac{\sqrt{1+\alpha^2} \cos^3 \varphi}{\alpha^2 + \cos^2 \varphi}; \\ \frac{\sigma_y}{p_0} &= -\cos \varphi\left[\left(\frac{\lambda^2}{\alpha^2 + \cos^2 \varphi} + 1\right)\sqrt{\alpha^2 + 1} - 2\alpha\right]. \end{aligned} \quad (2.88)$$

Одним из главных напряжений является  $\sigma_x$ . Два других определяем по формулам

$$\frac{\sigma_{1,2}}{p_0} = -\cos \varphi (\sqrt{\alpha^2 + 1} - \alpha) \left(1 \pm \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \cos^2 \varphi}}\right). \quad (2.89)$$

Максимальное по всем возможным ортогональным к плоскости  $Oyz$  площадкам касательное напряжение

$$\frac{\tau_{\max}}{p_0} = \frac{(\alpha \sqrt{\alpha^2 + 1} - \alpha) \cos \varphi}{\sqrt{\alpha^2 + \cos^2 \varphi}}. \quad (2.90)$$

Условия экстремума  $\tau_{\max}(\partial\tau_{\max}/\partial\varphi = \partial\tau_{\max}/\partial x = 0)$  приводят к равенствам  $\varphi = 0$ ,  $\alpha \sqrt{\alpha^2 + 1} = 1$ . Корень последнего уравнения  $\alpha \approx 0,786$ . Таким образом, максимальное по осям  $Oy$  и  $Oz$  значение  $\tau_{\max} = 0,3 p_0$  достигается на глубине  $z = 0,786 b$ . На оси  $Oz$  главные напряжения  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  совпадают с  $\sigma_z$  и  $\sigma_y$ , так что площадки, на которых касательное напряжение максимально, делят углы между осями  $Oy$  и  $Oz$  пополам.

С точки зрения наблюдателя, связанного с точкой или линией контакта, при качении шарика или ролика частицы материала проходят через поле напряжений, испытывая цикл нагружения. При фиксированном значении  $z$  имеем  $\sqrt{s_0} = z/\cos \varphi$ ,  $\alpha = \xi/\cos \varphi$ . Формулы (2.88) при заданном  $\xi$  принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{\tau_{yz}}{p_0} &= -\frac{\xi \cos^3 \varphi \sin \varphi}{\xi^2 + \cos^4 \varphi}; \\ \frac{\sigma_z}{p_0} &= -\cos^4 \varphi \frac{\sqrt{\xi^2 + \cos^2 \varphi}}{\xi^2 + \cos^4 \varphi}; \\ \frac{\sigma_y}{p_0} &= 2\xi - \frac{2\xi^2 + \cos^4 \varphi}{\xi^2 + \cos^4 \varphi} \sqrt{\xi^2 + \cos^2 \varphi}. \end{aligned} \quad (2.91)$$

Видно, что в процессе движения частицы, т.е. при изменении  $\varphi$ , напряжение  $\tau_{yz}$  меняет знак, а  $\sigma_z$  и  $\sigma_y$  остаются скжимающими. На площадке, наклоненной под углом  $\psi$  к плоскости  $Oxy$  (рис. 2.11), действует касательное напряжение

$$\tau_\psi = -\tau_{yz} \cos 2\psi - 0,5(\sigma_y - \sigma_z) \sin 2\psi.$$

С учетом формул (2.91)

$$\frac{\tau_\psi}{p_0} = \xi \frac{\cos^3 \varphi \sin \varphi \cos 2\psi - [\cos^4 \varphi - \xi(\sqrt{\xi^2 + \cos^2 \varphi} - \xi)] \sin 2\psi}{\xi^2 + \cos^4 \varphi}. \quad (2.92)$$

Для  $\varphi = \pm \pi/2$  при всех  $\psi$  напряжение  $\tau_\psi$  равно нулю. Другие значения  $\varphi$ , при которых  $\tau_\psi$  обращается в нуль, определяем из условия

$$\frac{\cos^3 \varphi \sin \varphi}{\cos^4 \varphi - \xi(\sqrt{\xi^2 + \cos^2 \varphi} - \xi)} = \operatorname{tg} 2\psi. \quad (2.93)$$

Корни  $t = \cos^2 \varphi$  знаменателя можно найти из уравнения  $t^4 = (1 - 2t)\xi^2$ . При  $\xi \gg 1$   $t = 0,5$ ,  $\varphi = \pm 0,57$ . Для больших  $\xi$  условие (2.93) имеет вид

$$\operatorname{tg} 2\psi = \operatorname{tg} 2\varphi.$$

Таким образом, для любого  $\psi \neq 0$  напряжение  $\tau_\psi$  обращается в нуль два раза на интервале  $(-\pi/2, \pi/2)$ , а для  $\psi = 0$  — один раз. Достаточно

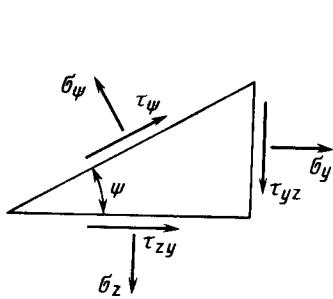


Рис. 2.11

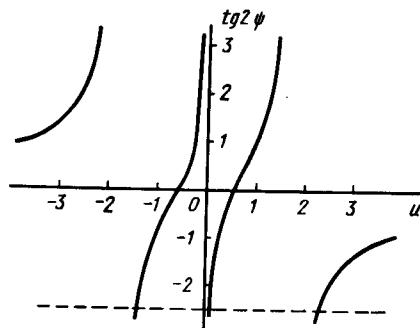


Рис. 2.12

знать распределение  $\tau_\psi$  на интервале  $0 \leq \psi < \pi/2$ , так как при увеличении  $\psi$  на  $\pi/2$  величины  $\cos 2\psi$ ,  $\sin 2\psi$  и  $\tau_\psi$  меняют знак, а при увеличении  $\psi$  на  $\pi$  сохраняют прежние значения. При  $\psi = 0$  напряжение  $\tau_\psi = -\tau_{yz}$  определяется из (2.91); при  $\psi = \pi/8$

$$\frac{\tau_{\pi/8}}{p_0} = \xi \frac{\cos^3 \varphi \sin \varphi - \cos^4 \varphi + \xi(\sqrt{\xi^2 + \cos^2 \varphi} - \xi)}{(\xi^2 + \cos^4 \varphi)\sqrt{2}};$$

при  $\psi = \pi/4$

$$\frac{\tau_{\pi/4}}{p_0} = \xi \frac{\xi(\sqrt{\xi^2 + \cos^2 \varphi} - \xi) - \cos^4 \varphi}{\xi^2 + \cos^4 \varphi};$$

при  $\psi = 3\pi/8$

$$\frac{\tau_{3\pi/8}}{p_0} = -\xi \frac{\cos^3 \varphi \sin \varphi + \cos^4 \varphi - \xi(\sqrt{\xi^2 + \cos^2 \varphi} - \xi)}{(\xi^2 + \cos^4 \varphi)\sqrt{2}}.$$

Условие  $\partial \tau_\psi / \partial \varphi = 0$  экстремума  $\tau_\psi$  при фиксированном  $\xi$  имеет вид

$$\cos 2\psi [\cos \varphi (\cos^4 \varphi + 4\xi^2 \cos^2 \varphi - 3\xi^2)] +$$

$$+ \sin 2\psi \left[ \frac{\xi \sin \varphi}{\sqrt{\xi^2 + \cos^2 \varphi}} (3\cos^4 \varphi + 4\xi^2 \cos^2 \varphi - \xi^2) \right] = 0. \quad (2.94)$$

Отсюда при  $\psi = 0 \cos^2 \varphi = \xi(\sqrt{3 + 4\xi^2} - 2\xi)$ ; при  $\psi = \pi/4 \cos^2 \varphi = \xi(\sqrt{3 + 4\xi^2} - 2\xi)/3$ . Условие (2.94) приводим к виду

$$\operatorname{tg} 2\psi = \frac{3u^2 - 1}{(3 - u^2)u}, \quad (2.95)$$

где

$$u = \frac{\alpha \operatorname{tg} \varphi}{\sqrt{\alpha^2 + 1}}; \quad \alpha = \frac{\xi}{\cos \varphi}.$$

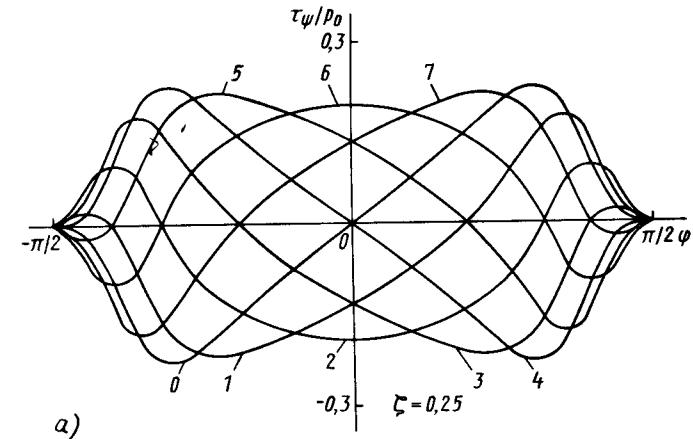
График функции (2.95) представлен на рис. 2.12. Значения  $u$ , при которых  $|\tau_\psi|$  максимально, определяются как абсциссы точек пересечения графика штриховой линией. Например, для  $\psi = \pi/8$  корни уравнения (2.95):  $u = 1; -2 \pm \sqrt{3}$ . При  $u = u_1 = 1$ .  $\operatorname{tg}^2 \varphi = \sqrt{1 + \xi^2}/\xi$ , причем  $\varphi_1 \rightarrow \pi/4$ , если  $\xi \rightarrow \infty$ ; при  $u = u_2, 3 = -2 \pm \sqrt{3}$

$$\operatorname{tg}^2 \varphi_{2,3} = \frac{(3 \mp 2\sqrt{3})\xi + \sqrt{(7 \mp 4\sqrt{3})(7\xi^2 + 4)}}{2\xi}.$$

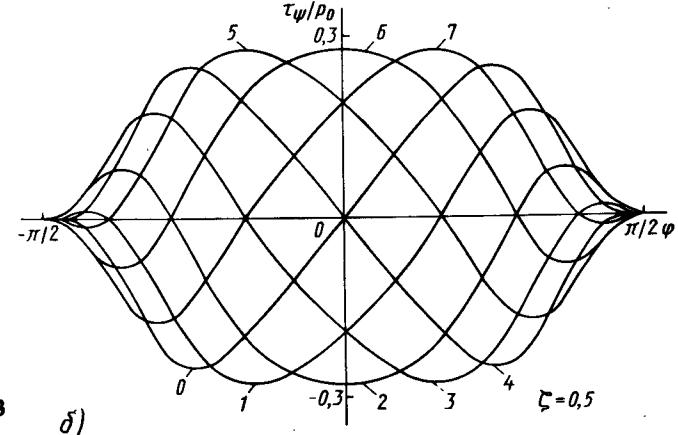
Если  $\xi \rightarrow \infty$ , то  $\varphi_2 \rightarrow -19^\circ$ ,  $\varphi_3 \rightarrow -70^\circ$ . Для  $\psi = 3\pi/8$  углы  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  меняют знаки по сравнению с случаем  $\psi = \pi/8$ . В общем случае углы  $\varphi$  определяем из формулы

$$\operatorname{tg}^2 \varphi = 0,5[u^2 - 1 + \sqrt{\xi^2(u^2 + 1)^2 + 4u^2}/\xi],$$

причем знак  $\operatorname{tg} \varphi$  совпадает со знаком  $u$ . На рис. 2.13,  $a-d$  изображены зави-



*a)*



*d)*

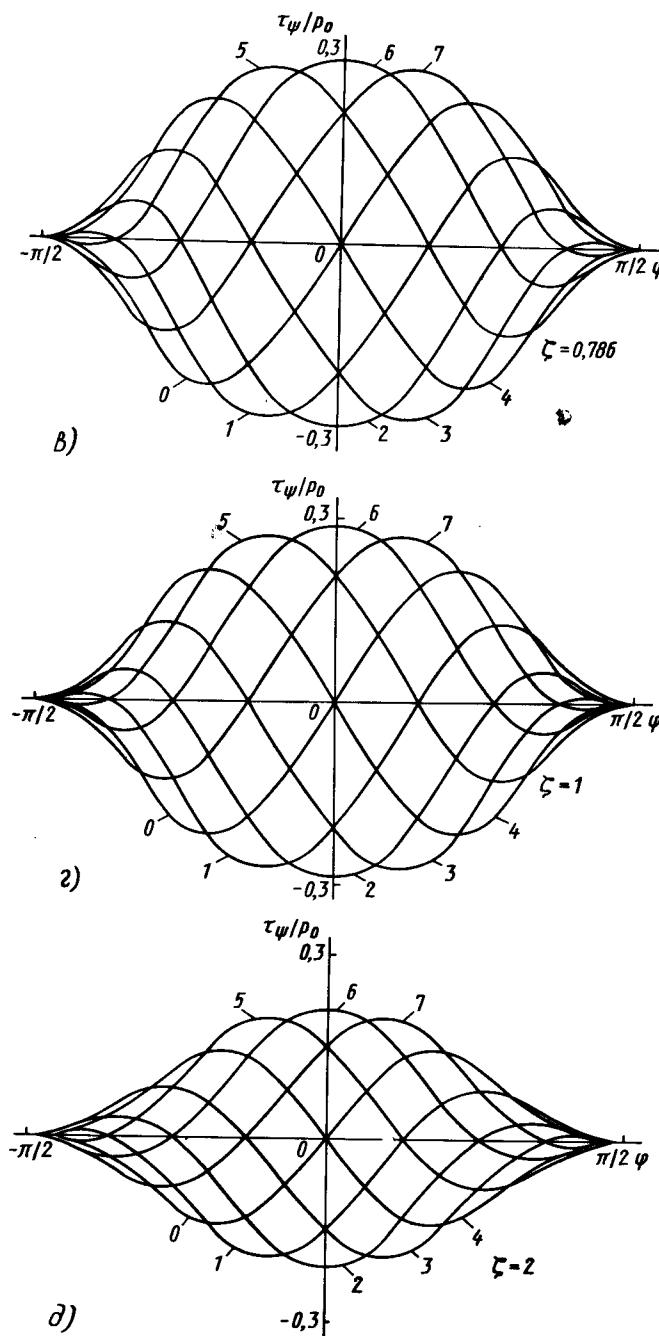


Рис. 2.13  
(продолжение)

смости  $\tau_\psi$  от  $\varphi$  для различных значений  $\psi$  и  $\zeta$ . Кривые 0–7 соответствуют значениям  $\psi$  от нуля до  $7\pi/8$  с шагом  $\pi/8$ .

*Касательное нагружение.* Пусть на границе полупространства касательная нагрузка  $\tau_x(x, y)$  направлена вдоль оси  $Ox$  и распределена по области  $\Omega$ . Напряжения в упругом полупространстве определяем по формулам М.В. Коровчинского:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{1}{2\pi} [2(1+\nu) \frac{\partial v}{\partial x} - (1-2\nu)z \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - 2\nu \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}]; \\ \sigma_y &= \frac{1}{2\pi} [2\nu \frac{\partial v}{\partial x} - (1-2\nu)z \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} - 2\nu \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2}]; \\ \sigma_y &= -\frac{z}{2\pi} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z}; \\ \tau_{xy} &= \frac{1}{2\pi} [\frac{\partial v}{\partial y} - (1-2\nu)z \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} - 2\nu \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}]; \\ \tau_{xz} &= \frac{1}{2\pi} (\frac{\partial v}{\partial z} - z \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}), \\ \tau_{yz} &= -\frac{z}{2\pi} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y},\end{aligned}\quad (2.96)$$

где  $v$  и  $w$  даются формулами (2.51) с заменой  $p$  на  $\tau_x$  и, кроме того, введен потенциал

$$\begin{aligned}u(x, y, z) &= \iint_{\Omega} \tau_x(\xi, \eta) r d\xi d\eta; \\ r &= \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + z^2}.\end{aligned}\quad (2.97)$$

Если касательная нагрузка распределена согласно теории Герца, т.е.

$$\tau_x(x, y) = \tau_x^0 \sqrt{1 - (x/a)^2 - (y/b)^2}$$

( $\tau_x^0$  – максимальное значение напряжения в зоне контакта), то

$$v(x, y, z) = \frac{3T_x}{4} \int_{s_0}^{\infty} \left( 1 - \frac{x^2}{a^2+s} - \frac{y^2}{b^2+s} - \frac{z^2}{s} \right) \frac{ds}{\sqrt{(a^2+s)(b^2+s)s}}, \quad (2.98)$$

где  $T_x$  – касательная сила, действующая на эллиптическую область контакта,

$$T_x = 2\pi\tau_x^0 ab/3. \quad (2.99)$$

По известной функции  $v(x, y, z)$  можно определить производные от  $w$  и  $u$ , входящие в формулы (2.96), с учетом следующих соотношений:

$$\frac{\partial^3 w}{\partial x^\alpha \partial y^{3-\alpha}} = - \int_z^\infty \frac{\partial^3 v}{\partial x^\alpha \partial y^{3-\alpha}} dz \quad (\alpha = 0, 1, 2, 3); \quad (2.100)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} &= 2 \frac{\partial v}{\partial x} + x \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}; \\ \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} &= \frac{\partial v}{\partial y} + x \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}; \end{aligned} \quad (2.101)$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial v}{\partial x} + y \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}.$$

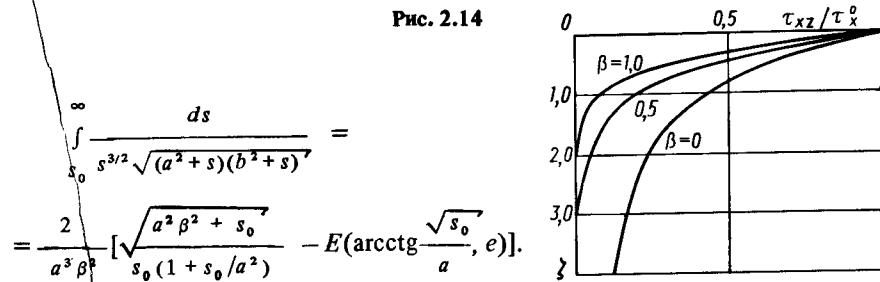
Итак, для определения компонент тензора напряжений достаточно найти соответствующие производные от  $v$ . Для них, дифференцируя выражение (2.98), получаем следующие формулы:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} &= \frac{3 T_x}{2} \left[ \frac{x}{(a^2 + s_0)^{3/2} \sqrt{(b^2 + s_0)s_0}} \frac{\partial s_0}{\partial x} - \right. \\ &\quad \left. - \int_{s_0}^\infty \frac{ds}{(a^2 + s)^{3/2} \sqrt{(b^2 + s)s}} \right]; \quad (2.102) \\ \frac{\partial v}{\partial z} &= - \frac{3 T_x z}{2} \int_{s_0}^\infty \frac{ds}{s^{3/2} \sqrt{(a^2 + s)(b^2 + s)}}. \end{aligned}$$

Интегралы в формулах (2.102) можно выразить через нормальные эллиптические интегралы Лежандра первого и второго рода (2.58). Тогда при  $s = a^2 \operatorname{ctg}^2 \varphi$  и  $\beta = b/a$  получим

$$\begin{aligned} \int_{s_0}^\infty \frac{ds}{(a^2 + s)^{3/2} \sqrt{(b^2 + s)s}} &= \frac{2}{a^3 e^2} [F(\operatorname{arcctg} \frac{\sqrt{s_0}}{a}, e) - E(\operatorname{arcctg} \frac{\sqrt{s_0}}{a}, e)]; \\ \int_{s_0}^\infty \frac{ds}{(b^2 + s)^{3/2} \sqrt{(a^2 + s)s}} &= \frac{2}{a^3 e^2} \left[ \frac{1}{\beta^2} E(\operatorname{arcctg} \frac{\sqrt{s_0}}{a}, e) - \right. \\ &\quad \left. - F(\operatorname{arcctg} \frac{\sqrt{s_0}}{a}, e) - \frac{e^2}{\beta^2} \sqrt{\frac{s_0/a^2}{(1 + s_0/a^2)(\beta^2 + s_0/a^2)}} \right]; \quad (2.103) \end{aligned}$$

Рис. 2.14



Определим компоненты тензора напряжений в наиболее важных частных случаях. Предварительно введем безразмерные переменные

$$\xi = x/b, \quad \eta = y/b, \quad \zeta = z/b. \quad (2.104)$$

*Напряжения под центром контакта.* На оси  $Oz$   $x = y = 0$ , поэтому  $s_0 = z^2$  или в безразмерных переменных

$$s_0 = a^2 \beta^2 \xi^2. \quad (2.105)$$

Из (2.102) и (2.103), с учетом (2.105), имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial z} &= - \frac{3 T_x}{a^2 \beta} \left[ \sqrt{\frac{1 + \xi^2}{1 + \beta^2 \xi^2}} - \xi E(\operatorname{arcctg} \beta \xi, e) \right]; \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} &= - \frac{3 T_x}{a^3 e^2} [F(\operatorname{arcctg} \beta \xi, e) - E(\operatorname{arcctg} \beta \xi, e)]; \end{aligned} \quad (2.106)$$

остальные производные, входящие в (2.96), равны нулю. Найдем компоненты тензора напряжений (рис. 2.14):

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = \tau_{yz} = 0;$$

$$\begin{aligned} \frac{\tau_{xz}}{\tau_x^0} &= - \sqrt{\frac{1 + \xi^2}{1 + \beta^2 \xi^2}} - \frac{\beta^2 \xi}{e^2} \left[ (2 - \frac{1}{\beta^2}) E(\operatorname{arcctg} \beta \xi, e) - \right. \\ &\quad \left. - F(\operatorname{arcctg} \beta \xi, e) \right]. \end{aligned} \quad (2.107)$$

Предельным переходом при  $\beta \rightarrow 0$  найдем из (2.107) выражение для компоненты  $\tau_{xz}$  тензора напряжений в контакте цилиндров:

$$\frac{\tau_{xz}}{\tau_x^0} = \xi - \sqrt{1 + \xi^2}, \quad (2.108)$$

что совпадает с аналогичным выражением, полученным М.М. Савериным.

Для кругового контакта  $\beta \rightarrow 1$ . Разложив эллиптические интегралы в ряд по степеням  $e$ , получим

$$\frac{\tau_{xz}}{\tau_x^0} = -1 + \frac{\xi}{2} \left( 3 \operatorname{arcctg} \xi - \frac{\xi}{1 + \xi^2} \right) \quad (2.109)$$

Напряжение в плоскости  $Oyz$ . В плоскости  $Oyz$   $x = 0$ , поэтому уравнение (2.53) для определения  $s_0$  упрощается и сводится к квадратному. Для простоты вычислений введем координаты  $\alpha$  и  $\varphi$ , изменяющиеся соответственно от 0 до  $\infty$  и от  $-\pi/2$  до  $+\pi/2$ , связанные с декартовыми координатами следующими зависимостями:

$$y = b \operatorname{ch} \alpha \sin \varphi, \quad z = b \operatorname{sh} \alpha \cos \varphi. \quad (2.110)$$

Координата  $\alpha$  связана с введенной ранее координатой  $\gamma$  соотношением

$$\operatorname{tg} \gamma = \beta \operatorname{sh} \alpha, \quad (2.111)$$

поэтому координатные кривые  $\alpha$  и  $\varphi$  имеют тот же вид (см. рис. 2.10). Координаты  $\alpha$  и  $\varphi$  использованы М.М. Савериным при исследовании контакта цилиндров, что позволит нам без лишних сложностей рассматривать предельные переходы к решению задачи о контакте цилиндров. Координата  $\gamma$  удобна лишь при рассмотрении кругового контакта, а также в качестве аргумента в эллиптических интегралах.

Решая уравнение (2.53), получаем

$$s_0 = b^2 \operatorname{sh}^2 \alpha, \quad (2.112)$$

или, с учетом соотношения (2.111),

$$s_0 = a^2 \operatorname{tg}^2 \gamma, \quad (2.113)$$

откуда следует, что в эллиптических интегралах (2.103) первый аргумент – угол  $\operatorname{arcctg} \sqrt{(s_0/a)} = \pi/2 - \gamma$ .

Определим компоненту  $\tau_{xz}$  тензора напряжений в плоскости  $Oyz$ , учитывая, что  $\delta_x = \delta_y = \delta_z = \tau_{yz} = 0$ . Из (2.102) и (2.103), с учетом замен (2.110) и (2.113), получим

$$\frac{\partial v}{\partial z} = - \frac{3 T_x \cos \varphi}{a^2 \beta} \left[ \frac{\operatorname{ch} \alpha}{\sqrt{1 + \beta^2 \operatorname{sh}^2 \alpha}} - E \left( \frac{\pi}{2} - \gamma, e \right) \operatorname{sh} \alpha \right]; \quad (2.114)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = - \frac{3 T_x}{a^3 e^2} [F \left( \frac{\pi}{2} - \gamma, e \right) - E \left( \frac{\pi}{2} - \gamma, e \right)].$$

Подставив (2.114) в формулу (2.96) для  $\tau_{xz}$  и учтя выражение (2.99) для  $T_x$ , найдем (рис. 2.15, а;  $\beta = 0,5$ )

$$\frac{\tau_{xz}}{\tau_x^0} = - \cos \varphi \left\{ \frac{\operatorname{ch} \alpha}{\sqrt{1 + \beta^2 + \operatorname{sh}^2 \alpha}} + \frac{\beta^2 \operatorname{sh} \alpha}{e^2} \left[ \left( 2 - \frac{1}{\beta^2} \right) E \left( \frac{\pi}{2} - \gamma, e \right) - F \left( \frac{\pi}{2} - \gamma, e \right) \right] \right\}. \quad (2.115)$$

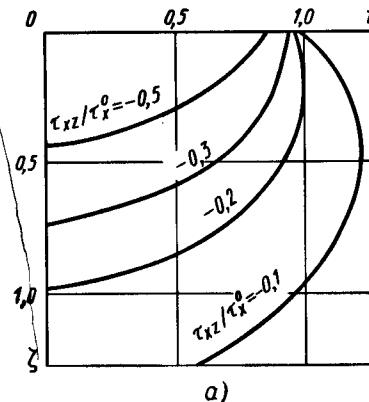
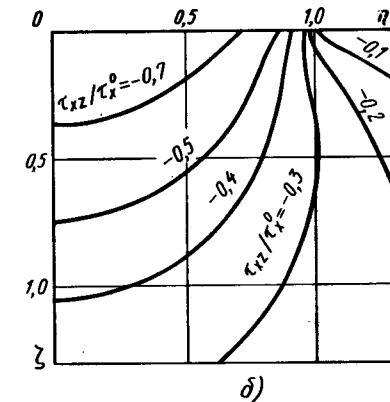
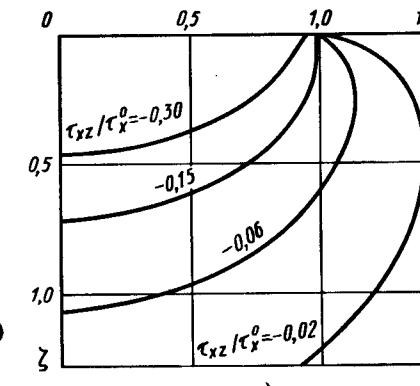


Рис. 2.15



б)



в)

Предельным переходом при  $\beta \rightarrow 0$  получим из (2.115) выражение для  $\tau_{xz}$  в контакте цилиндров (рис. 2.15, б):  $\beta = 0$ :

$$\frac{\tau_{xz}}{\tau_x^0} = - \exp(-\alpha) \cos \varphi, \quad (2.116)$$

что совпадает с выражением, полученным М.М. Савериным.

При  $\beta \rightarrow 1$  получаем формулу для  $\tau_{xz}$  при круговом контакте (рис. 2.15, в):

$$\frac{\tau_{xz}}{\tau_x^0} = - \cos \varphi \left[ 1 - 1.5 \left( \frac{\pi}{2} - \gamma \right) \operatorname{tg} \gamma + 0.5 \operatorname{sin}^2 \gamma \right]. \quad (2.117)$$

**Напряжения в плоскости  $Oxz$ .** В плоскости  $Oxz$   $y = 0$ . Аналогично предыдущему введем координаты  $\epsilon$  и  $\psi$  с помощью формул

$$x = a \operatorname{chesin} \psi, \quad z = a \operatorname{sh} \epsilon \cos \psi. \quad (2.118)$$

Тогда наибольший положительный корень уравнения (2.53)

$$s_0 = a^2 \operatorname{sh}^2 \epsilon \quad (2.119)$$

или, после замены  $\operatorname{tg} \gamma = \operatorname{sh} \epsilon$ ,

$$s_0 = a^2 \operatorname{tg}^2 \gamma. \quad (2.120)$$

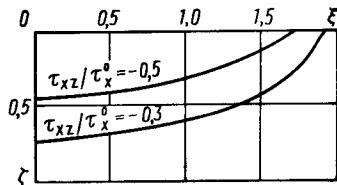


Рис. 2.16

Определим компоненты тензора напряжений. В плоскости  $Oxz$   $\sigma_{xy} = \sigma_{yz} = 0$ . Определим компоненту  $\tau_{xz}$ . Для этого найдем  $\frac{\partial v}{\partial z}$  и  $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$ , используя формулы (2.56), (2.102), (2.103) и учитывая (2.118) – (2.120):

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial z} &= -\frac{3T_x \cos \psi}{a^2 \beta^2} \left[ \frac{\sqrt{\beta^2 + \sinh^2 \epsilon}}{\cosh \epsilon} - E\left(\frac{\pi}{2} - \gamma, e\right) \operatorname{sh} \epsilon \right]; \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} &= \frac{3T_x}{a^3} \left\{ \frac{\operatorname{th} \sin^2 \psi}{\sqrt{\beta^2 + \sinh^2 \epsilon} (\sinh^2 \epsilon + \cos^2 \psi)} - \frac{1}{e^2} [F\left(\frac{\pi}{2} - \gamma, e\right) - E\left(\frac{\pi}{2} - \gamma, e\right)] \right\}. \end{aligned} \quad (2.121)$$

Подставляя (2.121) в формулу (2.96) для  $\tau_{xz}$  и учитывая (2.99), получаем (рис. 2.16)

$$\begin{aligned}\frac{\tau_{xz}}{\tau_x^0} &= -\beta \operatorname{sh} \epsilon \cos \psi \left\{ \left( \frac{1}{e^2} - \frac{1}{\beta^2} \right) E\left(\frac{\pi}{2} - \gamma, e\right) - \frac{1}{e^2} F\left(\frac{\pi}{2} - \gamma, e\right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\beta^2} \frac{\sqrt{\beta^2 + \sinh^2 \epsilon}}{\operatorname{sh} \epsilon \cosh \epsilon} + \frac{\operatorname{th} \sin^2 \psi}{\sqrt{\beta^2 + \sinh^2 \epsilon} (\sinh^2 \epsilon + \cos^2 \psi)} \right\}. \end{aligned} \quad (2.122)$$

Для контакта цилиндров (при  $\beta \rightarrow 0$ ,  $\psi = 0$ )

$$\frac{\tau_{xz}}{\tau_x^0} = \xi - \sqrt{1 + \xi^2},$$

что уже было получено ранее [см. (2.108)]. Для кругового контакта (при  $\beta \rightarrow 1$ )

$$\begin{aligned}\frac{\tau_{xz}}{\tau_x^0} &= -\cos \psi \left[ 1 + \frac{\sin^2 \gamma \sin^2 \psi}{\cos^2 \psi + \operatorname{tg}^2 \gamma} - 1,5 \left( \frac{\pi}{2} - \gamma \right) \operatorname{tg} \gamma + \right. \\ &\quad \left. + 0,5 \sin^2 \gamma \right]. \end{aligned} \quad (2.123)$$

Определим компоненту  $\sigma_z$ . Для этого получим  $\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z}$  из (2.102) и (2.56) подстановкой в них формул (2.118) и (2.119):

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z} = \frac{3T_x}{a^2} \frac{\sin \psi \cos \psi}{\sqrt{\beta^2 + \sinh^2 \epsilon} (\sinh^2 \epsilon + \cos^2 \psi)}. \quad (2.124)$$

Подставив (2.124) и (2.99) в формулу (2.96), получим

$$\frac{\delta z}{\tau_x^0} = -\frac{\beta \operatorname{sh} \epsilon \sin \psi \cos^2 \psi}{\sqrt{\beta^2 + \sinh^2 \epsilon} (\sinh^2 \epsilon + \cos^2 \psi)}.$$

Отсюда предельным переходом при  $\beta \rightarrow 0$  получим, что для контакта цилиндров  $\sigma_z = 0$ , а при  $\beta \rightarrow 1$ , для кругового контакта,

$$\frac{\delta z}{\tau_x^0} = -\frac{\sin \gamma \sin \psi \cos^2 \psi}{\operatorname{tg}^2 \gamma + \cos^2 \psi}.$$

Определение компонент  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  и  $\tau_{xy}$  тензора напряжений, имеющих в своем составе, согласно (2.96), производные от  $w$ , – задача более сложная.

В плоскости  $Oyz$   $\sigma_x = \sigma_y = 0$ . Для определения  $\tau_{xy}$  необходимо знать выражения для  $\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y}$ . Из (2.100), (2.102), (2.56) и (2.104) имеем

$$\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} = -\frac{3T_x \eta}{a^3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{th} \xi d\xi}{(1 + \beta^2 \operatorname{sh}^2 \xi)^{3/2} (\operatorname{ch}^2 \xi - \eta^2)^{1/2}}.$$

После замены под знаком интеграла переменной  $\xi$  на  $t$  по формуле

$$\operatorname{ch} \xi = \frac{1}{\beta} \sqrt{\frac{\beta^2 \eta^2 + e^2 t^2}{1 - t^2}}$$

получим в переменных  $\alpha$  и  $\varphi$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} &= -\frac{3T_x \beta \operatorname{ch} \alpha \sin \varphi}{a^3 e^2 (e^2 + \beta^2 \operatorname{ch} \alpha \sin \varphi)^{1/2}} \times \\ &\quad \times \left[ \frac{e^2 + \beta^2 \operatorname{ch}^2 \alpha \sin^2 \varphi}{e \beta \operatorname{ch} \alpha \sin \varphi} \left( \operatorname{arctg} \frac{e}{\beta \operatorname{ch} \alpha \sin \varphi} - \operatorname{arcctg} \frac{e}{\operatorname{tg} \varphi \sqrt{e^2 + \beta^2 \operatorname{ch} \alpha}} \right) - \right. \\ &\quad \left. - 1 + \frac{\beta \operatorname{ch} \alpha \cos \varphi}{\sqrt{e^2 + \beta^2 \operatorname{sh} \alpha}} \right]. \end{aligned}$$

Для остальных производных имеем

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} = \frac{3T_x \beta \operatorname{ch} \alpha \sin \varphi}{a^2 e^2} \left[ -\frac{1}{\beta^2} E\left(\frac{\pi}{2} - \gamma, e\right) + F\left(\frac{\pi}{2} - \gamma, e\right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{e^2 \operatorname{th} \alpha}{\beta^2 \sqrt{1 + \beta^2 \operatorname{sh}^2 \alpha}} \right]. \end{aligned}$$

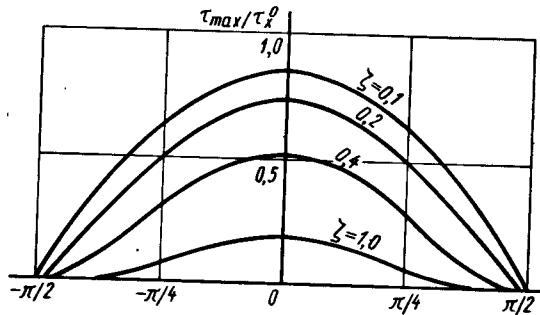


Рис. 2.17

В результате получим

$$\begin{aligned} \frac{\tau_{xy}}{\tau_x^0} &= \frac{(1-2\nu)\beta^2 \operatorname{ch} \alpha \sin \varphi}{e^2} \left\{ \frac{1}{\beta^2} E\left(\frac{\pi}{2} - \gamma, e\right) + \right. \\ &+ F\left(\frac{\pi}{2} - \gamma, e\right) + \frac{e^2 \operatorname{th} \alpha}{\beta^2 \sqrt{1 + \beta^2 \operatorname{sh}^2 \alpha}} + \frac{\beta \operatorname{ch} \alpha \cos \varphi}{\sqrt{e^2 + \beta^2 \operatorname{ch}^2 \alpha \sin \varphi}} \times \\ &\times \left[ \frac{e^2 + \beta^2 \operatorname{sh}^2 \alpha \sin^2 \varphi}{e \beta \operatorname{ch} \alpha \sin \varphi} \left( \operatorname{arctg} \frac{e}{\beta \operatorname{ch} \alpha \sin \varphi} - \operatorname{arctg} \frac{e}{\operatorname{tg} \varphi \sqrt{e^2 + \beta^2 \operatorname{ch}^2 \alpha}} \right) - \right. \\ &\left. \left. - 1 + \frac{\beta \operatorname{ch} \alpha \cos \varphi}{\sqrt{e^2 + \beta^2 \operatorname{ch}^2 \alpha}} \right] \right\}. \end{aligned}$$

В плоскости  $Oyz$  тензор напряжений имеет вид

$$\begin{bmatrix} 0 & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & 0 & 0 \\ \tau_{xy} & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Преобразование координат

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}} (\tilde{x} + \tilde{z});$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{2} \tau_{\max}} (\tau_{xy} \tilde{x} - \sqrt{2} \tau_{xz} \tilde{y} - \tau_{xy} \tilde{z});$$

$$z = \frac{1}{\sqrt{2} \tau_{\max}} (\tau_{xz} \tilde{x} + \sqrt{2} \tau_{xy} \tilde{y} - \tau_{xy} \tilde{z})$$

(где  $\tau_{\max} \equiv \sqrt{\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2}$  — максимальное касательное напряжение в плоскости  $Oxz$ ) приводит этот тензор к диагональному виду

$$\begin{bmatrix} \tau_{\max} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\tau_{\max} \end{bmatrix}.$$

В плоскости  $Oxz$   $\tau_{xy} = 0$ . На рис. 2.17 построены кривые  $\tau_{\max}(\varphi; \zeta)$  в плоскости  $Oyz$ .

Тензор напряжений в плоскости  $Oxz$  сложнее и имеет только две равные нулю компоненты —  $\tau_{xy}$  и  $\tau_{yz}$ . Выражение для максимального касательного напряжения в этом случае имеет громоздкий аналитический вид, поэтому его следует определять численно из исходных формул.

### ГЛАВА 3

#### СТАТИЧЕСКИЙ И ДИНАМИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ ПОДШИПНИКОВОГО УЗЛА

##### 3.1. КОНСТРУКТИВНЫЕ, ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЕ И РЕЖИМНЫЕ ПАРАМЕТРЫ УЗЛА

Введем правую неподвижную систему координат  $Oxyz$  (рис. 3.1) и рассмотрим сечение  $n$ -го подшипника плоскостью  $Oxy$  (ось  $Oz$  направлена вдоль оси симметрии колец). Введем также координаты  $z, r, \psi$  (угол  $\psi$  отсчитываем в направлении кратчайшего поворота от  $Ox$  к  $Oy$ ). Пронумеруем кольца подшипников:  $m = 1$  соответствует наружному,  $m = 2$  – внутреннему кольцу; число шариков в подшипнике обозначим  $Z$ . Воспользуемся общепринятыми обозначениями для геометрических параметров подшипника:  $r_m$  – радиус кривизны поперечного сечения желоба  $m$ -го кольца;  $D_1$  ( $d_1$ ) – диаметр по дну желоба наружного (внутреннего) кольца;  $D_w$  – диаметр тела качения;  $\alpha_m$  – угол контакта, положительное направление отсчета которого – от вертикали против часовой стрелки (на рис. 3.1  $\alpha_1 < 0$ ). Так, например, для шарика, который не вращается вокруг оси  $Oz$  и центр которого лежит на отрезке  $O_1O_2$ ,  $\alpha_2 = \alpha_1 + \pi$ . Наряду с этими обозначениями при расчете будем пользоваться введенным В.Ф. Журавлевым семимерным вектором геометрических параметров  $p_i$  ( $i = 1, \dots, 7$ ), связь которого с общепринятыми обозначениями такова:  $p_m = r_m$ ,  $p_3 = D_1/2$ ,  $p_4 = d_1/2$ ,  $p_7 = D_w$ ;  $p_4 + m$  – проекция вектора  $OO_m$  (см. рис. 3.1) на ось  $Oz$ . Эти обозначения удобны при рассмотрении подшипника с отклонениями геометрических параметров, поскольку позволяют унифицировать параметры и сократить запись сложных выражений. Таким образом, геометрия колец подшипника в сечении  $\psi = \text{const}$  характеризуется шестимерным вектором  $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_6)$ . Вследствие погрешностей изготовления кольца подшипника и шарики имеют геометрию, несколько отличающуюся от номинальной. Следовательно, вектор геометрии зависит от угла  $\psi$ :  $\mathbf{p} = \mathbf{p}(\psi)$ . Обозначим вектор номинальной геометрии через  $\mathbf{p}^0 = (p_1^0, \dots, p_6^0)$ ;  $p_7^0$  – номинальный диаметр шарика. Тогда погрешности изготовления колец, которые в дальнейшем считаем незначительными, можно описать вектором отклонений

$$\mathbf{p}'(\psi) = \mathbf{p}(\psi) - \mathbf{p}^0 = (p_1(\psi) - p_1^0, p_2(\psi) - p_2^0;$$

$$p_3(\psi) - p_3^0, p_4(\psi) - p_4^0, p_5(\psi) - p_5^0, p_6(\psi) - p_6^0).$$

Для описания отклонений от сферической формы шарика следует ввести сферическую систему координат  $\varphi \theta r$  ( $\varphi$  – азимутальный угол;  $\theta$  – угол, отсчитываемый от полюса;  $r$  – радиальная координата). Тогда общий вид поверхности шарика можно описать функцией  $r(\varphi, \theta)$ . Вектор отклонений разлагается в ряд Фурье:

$$\mathbf{p}'(\psi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbf{c}_k e^{ik\psi}, \quad (3.1)$$

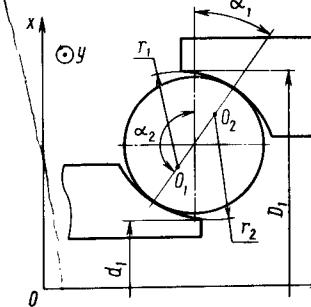


Рис. 3.1

где  $i$  – мнимая единица;  $\mathbf{c}_k$  – комплексная амплитуда (шестимерный вектор). Вектор  $\mathbf{c}_k$  комплексно сопряжен с вектором  $\mathbf{c}_{-k}$ , поскольку правая часть формулы (3.1) должна быть действительной. Так, для компоненты с номером  $l$  из соотношения (3.1) получаем

$$p'_l(\psi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{kl} e^{ik\psi}$$

Соотношение (3.1) можно записать в эквивалентной действительной форме:

$$p'(\psi) = 0,5 \mathbf{a}_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\psi + b_k \sin k\psi) = 0,5 \sum_{k=-\infty}^{\infty} (a_k \cos k\psi + b_k \sin k\psi), \quad (3.2)$$

где  $c_k = 0,5(a_k - ib_k)$  ( $c_{kl} = 0,5(a_{kl} - ib_{kl})$ ,  $l = 1, \dots, 6$ ) для  $k \neq 0$  и  $\mathbf{c}_0 = 0,5 \mathbf{a}_0$ ,  $b_0 = 0$ . На практике диапазон суммирования ограничен не слишком большим числом  $N$ , так что  $|k| \leq N$ . Из формулы (3.2) можно найти амплитуду  $A_{kl}$   $k$ -й гармоники  $l$ -го отклонения:

$$A_{kl} = (a_{kl}^2 + b_{kl}^2)^{1/2}.$$

При этом соотношении (3.2) можно записать в еще одной эквивалентной форме:

$$p'_l(\psi) = 0,5a_{0l} + \sum_{k \geq 1} A_{kl} \cos(k\psi + \alpha_{kl}), \quad (3.3)$$

где  $\alpha_{kl}$  определяется соотношениями  $\sin \alpha_{kl} = -b_{kl}/A_{kl}$ ,  $\cos \alpha_{kl} = a_{kl}/A_{kl}$ . На рис. 3.2 представлена характерная профилограмма отклонений гео-

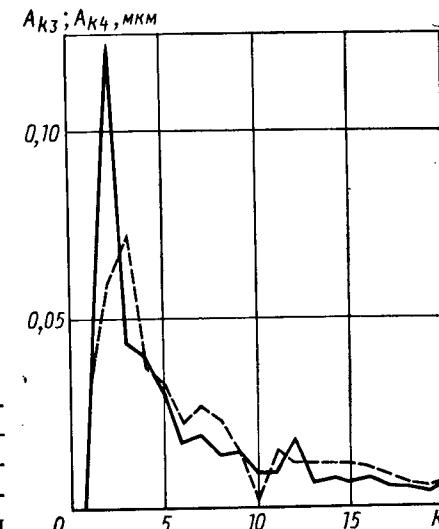


Рис. 3.2

метрических параметров колец приборного подшипника до 20-й гармоники включительно, где сплошная (штриховая) линия – амплитуды  $A_{k4}$  ( $A_{k3}$ ).

Аналогично можно разложить функцию  $r(\varphi, \theta)$  в двойной ряд Фурье по двум углам. Однако в дальнейшем вследствие упрощающих предположений потребуется лишь разложение диаметра  $p_7(\varphi)$  в экваториальной плоскости  $p_7(\varphi) = r(\varphi, \pi/2) + r(\varphi + \pi, \pi/2)$  по углу  $\varphi$ . Функция  $p_7(\varphi)$  имеет период, равный  $\pi$ , поэтому ее разложение содержит лишь четные гармоники:

$$p_7(\varphi) = A_{07} + \sum_{k \geq 1} A_{k7} \cos(2k\varphi + \alpha_{k7}).$$

Тогда погрешность  $p'_7$  изготовления шарика

$$p'_7(\varphi) = A_{07} - p_7^0 + \sum_{k \geq 1} A_{k7} \cos(2k\varphi + d_{k7}). \quad (3.4)$$

Для приборных подшипников при селективной сборке значение  $|A_{07} - p_7^0|$  заключено в пределах 0,1 ... 0,3 мкм.

Геометрию сепаратора унифицировать сложнее вследствие различия применяемых конструкций. Выделим три необходимых геометрических параметра:  $R_s$  – радиус базы сепаратора;  $\Delta$  – зазор базирования (т.е. разность радиусов цилиндрической поверхности кольца, относительно которой осуществляется базирование, и поверхности сепаратора);  $b_s$  – ширина базового пояска. Если сепаратор отсутствует либо базируется относительно тел качения,  $R_s$ ,  $\Delta$  и  $b_s$  теряют смысл. Гнездо (окно) сепаратора может быть цилиндрическим, сферическим, коническим и т.д. В двух первых случаях радиус гнезда обозначим  $r_s$ .

Геометрия ротора в общем случае не поддается описанию с помощью небольшого числа параметров, и в дальнейшем мы будем исходить из конкретной конструкции, поскольку для расчета значений отдельных величин (например, изгибной жесткости) нужно знать всю геометрию ротора. К режимным параметрам узла относят все параметры, определяющие условия его работы, в частности, частоту вращения ротора, характеристики электропривода, температуру окружающей среды, свойства применяемого смазочного материала и его количество, способ смазывания, характер сил, действующих на узел.

Важное значение имеют характеристики используемых материалов: физико-механические (модуль упругости, коэффициент Пуассона, твердость), теплофизические (удельная теплоемкость, теплопроводность, коэффициент теплового линейного расширения). Смазочный материал характеризуется зависимостью вязкости от давления и температуры, а также удельной теплоемкостью и теплопроводностью. Плотность смазочного материала, как правило, не входит в расчетные методики, за исключением лишь случая исследования явления срыва капель масла с сепаратора (джог-эффект).

### 3.2. СТАТИЧЕСКИЙ СИЛОВОЙ РАСЧЕТ УЗЛА

**Статический силовой расчет шарикового подшипника при чисто осевом нагружении.** При чисто осевом нагружении узла на каждый подшипник действует осевая сила. Рассмотрим один из подшипников (см. рис. 1.14). Пусть указанная сила равна  $F_z$ . Требуется определить нагрузку  $P$  в контактах, угол контакта  $\alpha$ , сближение  $\delta_m$  в контакте шарика с  $m$ -м кольцом и размеры эллиптических площадок ( $a_m$ ,  $b_m$  – большая и малая полуоси контакта), максимальное давление  $p_{0m}$ . Условие равновесия внутреннего кольца имеет вид ( $\alpha = \alpha_1$  или  $\alpha = \alpha_2$ )

$$F_z = ZP |\sin \alpha|, \quad (3.5)$$

где  $P$  вычислена с использованием формул Герца (2.17)–(2.20). Но сначала воспользуемся формулами для разности главных кривизн тел в контакте шарика с торOIDальной поверхностью  $m$ -го кольца

$$\frac{1}{R_{1m}} = \frac{2}{p_7^0} - \frac{1}{p_m^0}, \quad \frac{1}{R_{2m}} = \frac{2}{p_7^0} + \frac{(-1)^m |\cos \alpha|}{R_m^*}, \quad (3.6)$$

где  $1/R_{1m}$  и  $1/R_{2m}$  – разность кривизн соответственно в плоскости попечного сечения желоба и в плоскости, проходящей через отрезок  $O_1O_2$  и являющейся ортогональной по отношению к упомянутой плоскости;  $R_m^* = p_7^0 m + (-1)^m p_m^0 (1 - |\cos \alpha|)$  – радиальное положение центра контакта с  $m$ -м кольцом.

Для сил  $P_m$  в общем случае в соответствии с решением Герца имеем

$$P_m = K_m \delta_m^{3/2}; \quad (3.7)$$

$$K_m = \frac{E'}{\sqrt{(1/R_{1m} + 1/R_{2m})k_{\delta m}^3}}; \quad E' = 2\left(\frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2}\right)^{-1},$$

где  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $\nu_1$ ,  $\nu_2$  – модули упругости и коэффициенты Пуассона материалов шарика и кольца;  $k_{\delta m}$  – коэффициент, определяемый из аппроксимационной формулы (2.25) или из табл. 2.1 и зависящий от  $R_{1m}/R_{2m}$ .

Заметим, что применение формулы (3.7) связано с определенным противоречием, свойственным решению Герца. Проведем мысленный эксперимент. Пусть шарик контактирует с торOIDальным желобом, сечение которого изображено на рис. 3.3. Если упругое сближение равно  $\delta$ , то сила взаимодействия, вычисляемая по формуле Герца,  $P = K\delta^{3/2}$ , где  $K$ , согласно (3.7), зависит от радиусов кривизны и упругих постоянных материалов шарика и желоба. Очевидно, что упругие силы потенциальны (отсутствует диссиpация в материале), а потенциал является в данном случае функцией положения центра шарика. Пусть центр шарика перемещается вдоль радиуса желоба от положения, в котором происходит первоначальное его касание с желобом, до точки, в которой сближение равно  $\delta$ . Тогда

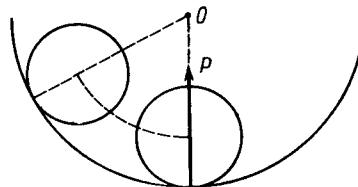


Рис. 3.3

работа упругой силы  $\int_0^\delta K \delta^{3/2} d\delta = \frac{2}{5} K \delta^{5/2}$  ( $K$  не зависит от  $\delta$ ). С другой стороны, предположим, что центр шарика перемещается по дуге окружности, изображенной на рис. 3.3 штриховой линией, так, что сближение в процессе перемещения остается неизменным. При этом вектор силы (направленный к центру кривизны желоба) будет в процессе всего перемещения ортогонален вектору касательной к траектории движения. Следовательно, работа упругой силы равна нулю, и потенциальная энергия не должна изменяться. Однако в конечной точке пути кривизны в контакте изменяется. В результате вместо  $K$  появится величина  $K'$ . Таким образом, потенциальная энергия в конечной точке равна  $0,4 K' \times \delta^{5/2}$ .

Описанное противоречие вызвано тем, что сама формула Герца является приближенной, поскольку при ее получении тела заменялись эллипсоидами (уравнения поверхности раскладывались в ряд Тейлора лишь до квадратичных членов). Вследствие этого эпюра давления оказалась симметричной, а равнодействующая сил давления — направленной по общей нормали к поверхностям тел в точке контакта. Однако для того чтобы упругие силы обладали потенциалом, необходимо, чтобы имелась касательная составляющая силы. Такая составляющая может возникнуть в контактной задаче при учете кубических членов в разложении уравнения поверхности, из-за которых появляется асимметрия формы поверхности (и, следовательно, эпюры давления) и наклон площадки контакта. Таким образом, указанное противоречие свойственно самому решению Герца. Оно является принципиальным (поскольку не выполнено условие потенциальности упругих сил), хотя и происходит от небольшой количественной погрешности при решении контактной задачи. Точность решения Герца тем меньше, чем больше относительное изменение значения  $K$  (т.е. чем сильнее меняется кривизна желоба или упругие постоянные его материала) в области возможного контактирования.

Если нагрузка незначительно меняет угол контакта, будем вычислять  $K$  в состоянии предварительного касания шарика с кольцами, считая при этом значение  $K$  постоянным. В противном случае  $K$  будем рассчитывать в состоянии предварительного натяга.

Поскольку шарик находится в равновесии, то  $P_1 = P_2 = P$ , а  $P$  можно выразить через суммарное сближение  $\delta_0 = \delta_1 + \delta_2$  шарика с кольцами:

$$\delta_0 = (P/K_1)^{2/3} + (P/K_2)^{2/3} = K_0^{-2/3} P^{2/3}; \quad (3.8)$$

$$P = K_0 \delta_0^{3/2}, K_0 = (K_1^{-2/3} + K_2^{-2/3})^{-3/2}.$$

В состоянии предварительного касания шарика с кольцами расстояние  $v = O_1 O_2$  между центрами кривизны сечений колец равно  $p_1^0 + p_2^0 - p_7^0$ , а угол контакта определяется косинусом

$$\cos \alpha = (p_1^0 + p_2^0 + p_4^0 - p_3^0)/v, \quad (3.9)$$

с точностью до знака. Вследствие упругой деформации расстояние  $O_1 O_2$  увеличивается на  $\delta_0$ , т.е.

$$v = p_1^0 + p_2^0 - p_7^0 + \delta_0. \quad (3.10)$$

Используя формулы (3.5) — (3.10), расчет можно вести итерационно в такой последовательности. При  $\delta_0 = 0$  вычисляем  $v$  по формуле (3.10). Затем по формуле (3.9) определяем  $\alpha$ . Находим  $P$  из формулы (3.5). Далее определяем  $R_{11}, R_{21}, R_{12}, R_{22}$  по формуле (3.6) и  $K_1, K_2, K_0$  по формулам (3.7), (3.8), найдя предварительно отношения главных радиусов кривизны  $R_{1m}/R_{2m}$  и коэффициенты  $k_{\delta m} = k_\delta (R_{1m}/R_{2m})$ . Затем по формуле (3.8) определяем  $\delta_0$  и возвращаемся к вычислению  $v$ .

Если требуемая точность невысока и угол контакта не слишком мал, можно ограничиться одним приближением. По найденному значению  $P$  определяем размеры площадок контакта  $a_m, b_m$ , максимальные давления  $P_{0m}$  и упругие сближения  $\delta_m$  согласно формулам:

$$\begin{bmatrix} b_m \\ a_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{bm} \\ k_{am} \end{bmatrix} \left( \frac{P}{E'(1/R_{1m} + 1/R_{2m})} \right)^{1/3};$$

$$P_{0m} = k_{pm} [PE'^2 (1/R_{1m} + 1/R_{2m})^2]^{1/3};$$

$$\delta_m = k_{\delta m} [P^2 (1/R_{1m} + 1/R_{2m})/E'^2]^{1/3}.$$
(3.11)

Эти вычисления можно проводить вручную с использованием микрокалькулятора. При этом для определения коэффициентов  $k_{am}, k_{bm}, k_{pm}, k_{\delta m}$  можно пользоваться приближенными формулами (2.22) — (2.25) или табл. 2.1. Используя  $\delta_0$ , можно рассчитать осевое сближение  $\delta_z$ :

$$\delta_z = (p_1^0 + p_2^0 + p_4^0 - p_3^0) |\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha_0|, \quad (3.12)$$

где  $\alpha_0$  — начальный угол контакта, вычисляемый из формул (3.9), (3.10) при  $\delta_0 = 0$ .

При расчете нагрузки  $P$  в контактах (для радиально-упорных подшипников с углом контакта  $\alpha_0 < 30^\circ$ ) с хорошей точностью можно пользоваться формулой

$$P = |F_z| / (Z |\sin \alpha_0|).$$

**Пример 3.1.** Провести силовой расчет подшипника 211 с габаритными размерами  $55 \times 100 \times 25$  мм. Параметры подшипника:  $D_w = p_7^0 = 14,288$  мм;  $r_1 = p_1^0 = r_2 = p_2^0 = 7,36$  мм;  $d_0 = 77,5$  мм – диаметр окружности, проведенной через центры шариков;  $\alpha_0 = 11^\circ$ ;  $Z = 10$ . Осевая нагрузка  $F_z = 1372$  Н. Кольца и шарики изготовлены из одного материала,  $E_1 = E_2 = 208$  ГПа,  $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$ .

Решение. Вычислим по (3.7)  $E'$ :

$$E' = 2 \left( 2 \frac{1 - 0,3^2}{2,08 \cdot 10^{11}} \right)^{-1} = 228,6 \text{ ГПа.}$$

Определим геометрические параметры дорожек качения:

$$d_0 = R_1^* + R_2^* = p_3^0 + p_4^0 + (p_2^0 - p_1^0)(1 - \cos\alpha_0) = p_3^0 + p_4^0 = 77,5 \text{ мм.}$$

Из формулы для начального угла контакта имеем

$$p_4^0 - p_3^0 + p_1^0 + p_2^0 = (p_1^0 + p_2^0 - p_7^0) \cos 11^\circ = 0,4241 \text{ мм.}$$

Далее определяем

$$p_3^0 = 45,898 \text{ мм}; \quad p_4^0 = 31,602 \text{ мм.}$$

В первом приближении определяем последовательно:

$$v = p_1^0 + p_2^0 - p_7^0 = 0,432 \text{ мм};$$

$$\alpha = \alpha_0 = 11^\circ = 0,19199 \text{ рад}; \sin \alpha = 0,19081;$$

$$P = 1372 / (10 \cdot 0,19081) = 719,04 \text{ Н};$$

$$R_{11} = \left( \frac{2}{14,288 \cdot 10^{-3}} - \frac{1}{7,36 \cdot 10^{-3}} \right)^{-1} = 0,24343 \text{ м};$$

$$R_{12} = R_{11} = 0,24343 \text{ м}; \quad R_1^* = p_3^0 - p_1^0(1 - \cos\alpha) = 45,7628 \text{ мм};$$

$$R_2^* = p_4^0 + p_2^0(1 - \cos\alpha) = 31,7372 \text{ мм};$$

$$R_{21} = \left( \frac{2}{14,288 \cdot 10^{-3}} - \frac{0,98163}{45,7628 \cdot 10^{-3}} \right)^{-1} = 8,4369 \text{ мм};$$

$$R_{22} = \left( \frac{2}{14,288 \cdot 10^{-3}} + \frac{0,98163}{31,7372 \cdot 10^{-3}} \right)^{-1} = 5,8511 \text{ мм};$$

$$R_{21}/R_{11} = 3,4658 \cdot 10^{-2}; \quad R_{22}/R_{12} = 2,4036 \cdot 10^{-2}.$$

Воспользуемся формулами (2.22) – (2.25) для коэффициентов  $k_a$ ,  $k_b$ ,  $k_p$ ,  $k_\delta$ , в которые вместо  $R_y/R_x$  следует подставить  $R_{21}/R_{11}$  и  $R_{22}/R_{12}$ :

$$1 - \left( 1 - \frac{R_{21}}{R_{11}} \right)^3 = 0,1004; \quad \left( \frac{R_{21}}{R_{11}} \right)^{0,318} = 0,3433;$$

$$k_{a1} = 1,4664 \frac{(0,1004)^{-0,0945}}{0,3433} = 5,3078; \quad k_{b1} = 1,4184 \cdot 0,3433 \cdot (0,1004)^{-0,0945} = 0,6051;$$

$$k_{p1} = 0,2295 (0,1004)^{0,189} = 0,1486;$$

$$k_{\delta1} = 1,04 (0,1004)^{0,2} = 0,6567;$$

$$1 - \left( 1 - \frac{R_{22}}{R_{12}} \right)^3 = 0,07039; \quad \left( \frac{R_{22}}{R_{12}} \right)^{0,318} = 0,3056;$$

$$k_{a2} = 1,4664 \frac{(0,07039)^{-0,095}}{0,3056} = 6,1661; \quad k_{b2} = 1,4184 (0,07039)^{-0,0945} \cdot 0,3056 = 0,557;$$

$$k_{p2} = 0,2295 (0,07039)^{0,189} = 0,139; \quad k_{\delta2} = 1,04 (0,07039)^{0,2} = 0,6117.$$

Найдем коэффициенты  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $K_0$ :

$$\left( \frac{1}{R_{11}} + \frac{1}{R_{21}} \right)^{-1} = \left( \frac{1}{0,24343} + \frac{1}{8,4369 \cdot 10^{-3}} \right)^{-1} = 8,1543 \text{ мм};$$

$$K_1 = 2,286 \cdot 10^{11} (8,1543 \cdot 10^{-3})^{1/2} \left( \frac{1}{0,6567} \right)^{3/2} = 38,79 \text{ ГПа} \cdot \text{м}^{1/2};$$

$$\left( \frac{1}{R_{12}} + \frac{1}{R_{22}} \right)^{-1} = \left( \frac{1}{0,24343} + \frac{1}{5,8511 \cdot 10^{-3}} \right)^{-1} = 5,7138 \text{ мм};$$

$$K_2 = 2,286 \cdot 10^{11} (5,7138 \cdot 10^{-3})^{1/2} \left( \frac{1}{0,6117} \right)^{3/2} = 36,119 \text{ ГПа} \cdot \text{м}^{1/2};$$

$$K_0 = ((3,879 \cdot 10^{10})^{-2/3} + (3,6119 \cdot 10^{10})^{-2/3})^{-3/2} = 13,228 \text{ ГПа} \cdot \text{м}^{1/2}.$$

Суммарное сближение шарика с кольцами

$$\delta_0 = \left( \frac{719,04}{1,3228 \cdot 10^{10}} \right)^{2/3} = 14,35 \text{ мкм.}$$

Во втором приближении последовательно определяем:

$$v = 4,32 \cdot 10^{-4} + 1,435 \cdot 10^{-5} = 0,44635 \text{ мм}; \cos \alpha = 4,24 \cdot 10^{-4} (4,4635 \cdot 10^{-4}) = 0,94993;$$

$$\alpha = 18,21^\circ; \sin \alpha = 0,3125; \quad P = 1372 / (10 \cdot 0,3125) = 439,04 \text{ Н.}$$

Изменение угла контакта (по сравнению с первым приближением) значительно, поэтому проведем расчет с новым значением угла контакта при прежних значениях  $R_{11}$ ,  $R_{12}$ :

$$R_1^* = 45,5295 \text{ мм}; \quad R_2^* = 31,9705 \text{ мм};$$

$$R_{21} = \left( \frac{2}{14,288 \cdot 10^{-3}} - \frac{0,94993}{45,5295 \cdot 10^{-3}} \right)^{-1} = 8,3954 \text{ мм};$$

$$R_{22} = \left( \frac{2}{14,288 \cdot 10^{-3}} + \frac{0,94993}{31,9705 \cdot 10^{-3}} \right)^{-1} = 5,8931 \text{ мм};$$

$$R_{21}/R_{11} = 3,4488 \cdot 10^{-2}; \quad R_{22}/R_{12} = 2,4209 \cdot 10^{-2}.$$

Вычисляем коэффициенты  $k_a$ ,  $k_b$ ,  $k_p$ ,  $k_\delta$ :

$$1 - \left( 1 - \frac{R_{21}}{R_{11}} \right)^3 = 9,994 \cdot 10^{-2}; \quad \left( \frac{R_{21}}{R_{11}} \right)^{0,318} = 0,3428;$$

$$k_{a1} = 1,4664 \frac{(9,994 \cdot 10^{-2})^{-0,0945}}{0,3428} = 5,3178; \quad k_{b1} = 1,4184 \cdot 0,3428 (9,994 \cdot 10^{-2})^{-0,0945} = 0,6045;$$

$$k_{p1} = 0,2295 \cdot (9,994 \cdot 10^{-2})^{0,189} = 0,1485; \quad k_{\delta1} = 1,04 (9,994 \cdot 10^{-2})^{0,2} = 0,6561;$$

$$1 - \left(1 - \frac{R_{22}}{R_{12}}\right)^3 = 0,07088; \quad \left(\frac{R_{22}}{R_{12}}\right)^{0,318} = 0,3063;$$

$$k_{a2} = 1,4664 \frac{(0,07088)^{-0,0945}}{0,3063} = 6,148; \quad k_{b2} = 1,4184 \cdot (0,07088)^{-0,0945} \cdot 0,3063 = 0,558;$$

$$k_{p2} = 0,2295 (0,07088)^{0,189} = 0,1392; \quad k_{\delta2} = 1,04 (0,07088)^{0,2} = 0,6125.$$

Найдем коэффициенты  $K_1, K_2, K_0$ :

$$\left(\frac{1}{R_{11}} + \frac{1}{R_{21}}\right)^{-1} = 8,1155 \text{ мм}; \quad K_1 = 2,286 \cdot 10^{11} (8,1155 \cdot 10^{-3})^{1/2} \cdot \left(\frac{1}{0,6561}\right)^{3/2} =$$

$$= 38,75 \text{ ГПа} \cdot \text{м}^{1/2}; \quad \left(\frac{1}{R_{12}} + \frac{1}{R_{22}}\right)^{-1} = 5,7538 \text{ мм};$$

$$K_2 = 2,286 \cdot 10^{11} (5,7538 \cdot 10^{-3})^{1/2} \left(\frac{1}{0,6125}\right)^{3/2} = 36,174 \text{ ГПа} \cdot \text{м}^{1/2};$$

$$K_0 = 13,232 \text{ ГПа} \cdot \text{м}^{1/2}.$$

Затем определяем

$$\delta_0 = \left(\frac{439,04}{1,3232 \cdot 10^{10}}\right)^{2/3} = 10,326 \text{ мкм}.$$

В третьем приближении последовательно вычисляем:

$$v = 4,32 \cdot 10^{-4} + 1,0326 \cdot 10^{-5} = 0,44233 \text{ мм};$$

$$\cos\alpha = 4,24 \cdot 10^{-4} / (4,4233 \cdot 10^{-4}) = 0,95856;$$

$$\alpha = 16,55^\circ; \quad \sin\alpha = 0,2849;$$

$$P = 1372 / (10 \cdot 0,2849) = 481,57 \text{ Н.}$$

Вычисление  $R_{11}, R_{21}, R_{12}, R_{22}, K_1, K_2, K_0, R_{1m}/R_{2m}$  и  $k_{\delta m}$  опустим, используя для дальнейшего расчета значения, полученные во втором приближении:

$$\delta_0 = \left(\frac{481,57}{1,3232 \cdot 10^{10}}\right)^{2/3} = 10,98 \text{ мкм}.$$

В четвертом приближении последовательно определяем:

$$v = 4,32 \cdot 10^{-4} + 1,098 \cdot 10^{-5} = 0,44298 \text{ мм};$$

$$\cos\alpha = 4,24 \cdot 10^{-4} / (4,4298 \cdot 10^{-4}) = 0,95715;$$

$$\alpha = 16,83^\circ; \quad \sin\alpha = 0,2896; \quad P = 1372 / (10 \cdot 0,2896) = 473,76 \text{ Н.}$$

$$\delta_0 = \left(\frac{4,7376 \cdot 10^2}{1,3232 \cdot 10^{10}}\right)^{2/3} = 10,86 \text{ мкм}.$$

Результаты получены с более чем достаточной точностью (погрешность  $\approx 1\%$ ).

Определим размеры контактов, максимальные значения давления и упругие сближения по формулам (3.11), используя найденные значения  $k_{am}, k_{bm}, k_{pm}, K_m, (R_{1m}^{-1} + R_{2m}^{-1})$ :

$$\left[\frac{a_1}{b_1}\right] = \left[\frac{5,3178}{0,6045}\right] \left(\frac{473,76 \cdot 8,1155 \cdot 10^{-3}}{2,286 \cdot 10^{11}}\right)^{1/3} = \left[\frac{1,362}{0,1549}\right] \text{ мм};$$

$$p_{01} = 0,1485 \left[473,76 \left(\frac{2,286 \cdot 10^{11}}{8,1155 \cdot 10^{-3}}\right)^2\right]^{1/3} = 1,072 \text{ ГПа};$$

$$\delta_1 = \left(\frac{P}{K_1}\right)^{2/3} = \left(\frac{473,76}{3,875 \cdot 10^{10}}\right)^{2/3} = 5,31 \text{ мкм};$$

$$\left[\frac{a_2}{b_2}\right] = \left[\frac{6,148}{0,558}\right] \left(\frac{473,76 \cdot 5,7538 \cdot 10^{-3}}{2,286 \cdot 10^{11}}\right)^{1/3} = \left[\frac{1,405}{0,1275}\right] \text{ мм};$$

$$p_{02} = 0,1392 \left[473,76 \left(\frac{2,286 \cdot 10^{11}}{5,7538 \cdot 10^{-3}}\right)^2\right]^{1/3} = 1,264 \text{ ГПа};$$

$$\delta_2 = \left(\frac{473,76}{3,6174 \cdot 10^{10}}\right)^{2/3} = 5,55 \text{ мкм}.$$

Определим осевое сближение колец по формуле (3.12):

$$\delta_z = 4,24 \cdot 10^{-4} |\operatorname{tg} 11^\circ - \operatorname{tg} 16,83^\circ| = 45,8 \text{ мкм}.$$

При необходимости проведения параметрического исследования различных конструктивных вариантов подшипника следует использовать ЭВМ.

Перейдем к оценке влияния центробежной силы. Предположим, что для данного подшипника уже проведен расчет при чисто осевом нагружении. Введем систему координат, как показано на рис. 3.4, направив ось  $Cn$  вдоль линии контактов, ось  $Cl$  — перпендикулярно ей;  $\alpha^*$  — угол контакта в состоянии предварительного натяга. Если к центру  $O'$  шарика приложена сила, например, центробежная, равная  $F_{\perp}$ , то  $O'$  переместится из положения при предварительном натяге и будет иметь координаты  $(\Delta_l, \Delta_n)$ . Предположим, что сила  $F_{\perp}$  невелика и смещения малы. Введем обозначения:  $CO_m = v = p_m^0 - p_{\perp}^0 / 2$  ( $m = 1, 2$ ). Упругое сближение в контакте с  $m$ -м кольцом вычисляем по формуле

$$\delta'_m = 0,5 p_{\perp}^0 - p_m^0 + \sqrt{\Delta_l^2 + [(-1)^m v_m - \Delta_n]^2} = \delta_m + (-1)^{m+1} \Delta_n$$

плус слагаемые более высокого порядка малости.

Вектор силы, действующей на шарик,

$$\left[\frac{F_l}{F_n}\right] = \sum_{m=1,2} K_m (\delta_m + (-1)^{m+1} \Delta_n)^{3/2} \frac{1}{\sqrt{\Delta_l^2 + [(-1)^m v_m - \Delta_n]^2}} \times$$

$$\times \left[\frac{-\Delta_l}{(-1)^m v_m - \Delta_n}\right] \approx \sum_{m=1,2} K_m (\delta_m^{3/2} + 1,5(-1)^{m+1} \delta_m^{1/2} \Delta_n) \times$$

$$\times \left(\frac{1}{v_m} + (-1)^m \frac{\Delta_n}{v_m^2}\right) \left[\frac{-\Delta_l}{(-1)^m v_m - \Delta_n}\right] \approx \left[\frac{-P \tilde{v}^{-1} \Delta_l}{-1,5 P \tilde{v}^{-1} \Delta_n}\right],$$

где  $\tilde{v}^{-1} = v_1^{-1} + v_2^{-1}$ ,  $\tilde{v}^{-1} = \delta_1^{-1} + \delta_2^{-1}$ .

Таким образом, жесткости положения шарика в направлениях  $C_1$  и  $C_2$

$$K_l = P \tilde{\delta}^{-1}; \quad K_n = \frac{3}{2} P \tilde{\delta}^{-1}. \quad (3.13)$$

Для всех подшипников, собранных с предварительным натягом,  $\tilde{\delta} \ll \tilde{v}$ ,  $K_l/K_n \ll 1$ .

Так, для подшипника 211

$$\begin{aligned}\tilde{\delta} &= [(5,31 \cdot 10^{-6})^{-1} + (5,56 \cdot 10^{-6})^{-1}]^{-1} = 2,72 \text{ мкм}; \\ v_2 &= v_1 = 0,216 \text{ мм}; \quad \tilde{v} = [2(0,216 \cdot 10^{-3})^{-1}]^{-1} = 0,108 \text{ мм}; \\ K_n &= 1,5 \cdot 473,76(2,72 \cdot 10^{-6})^{-1} = 2,61 \cdot 10^8 \text{ Н/м}; \\ K_l &= 473,76(1,08 \cdot 10^{-4})^{-1} = 4,39 \cdot 10^6 \text{ Н/м}; \quad K_l/K_n = 0,017.\end{aligned}$$

Если заданы компоненты силы, то смещения центра шарика определяются формулам

$$\Delta_n = F_n / K_n; \quad \Delta_l = F_l / K_l.$$

В результате смещения произойдет изменение углов контакта. Угол контакта с  $m$ -м кольцом изменится на  $\Delta\alpha_m = \Delta_l/v_m$ , так что новый угол контакта с наружным кольцом будет  $\alpha_1 = \alpha^* - \Delta\alpha_1$ , а с внутренним кольцом  $\alpha_2 = \pi + \alpha^* + \Delta\alpha_2$ .

Вследствие большой жесткости вдоль линии контакта действующая на шарик центробежная сила приводит к смещению его центра в направлении, ортогональном к этой линии, что вызовет изменение углов контакта. Смещение же вдоль линии  $O_n$ , хотя оно и мало, приведен к изменению нагрузок в контактах. Если центробежная сила мала в сравнении с нагрузкой в контакте, то можно оценить нагрузки  $P_m$  в контактах. Из формулы Герца следует

$$\begin{aligned}P_m &= K_m [\delta_m + (-1)^{m+1} \Delta_n]^{3/2} = P + 1,5(-1)^{m+1} \frac{P}{\delta_m} \Delta_n = \\ &= P + 1,5(-1)^{m+1} \frac{P}{K_n \delta_m} F_n.\end{aligned}$$

Таким образом, нагрузка на наружном кольце увеличится на  $1,5 P F_n / (K_n \delta_1)$ , а на внутреннем уменьшится на  $1,5 P F_n / (K_n \delta_2)$  (сумма этих изменений равна  $F_n$ ).

Пусть кольца подшипника вращаются с угловыми скоростями  $\Omega_m$  (положительное направление вращения соответствует повороту от оси  $Ox$  на рис. 3.4 к оси  $Oy$ ). Тогда в точках контакта поверхности колец будут иметь скорости  $R_m^* \Omega_m$ . Предположим, что в точках контакта отсутствует

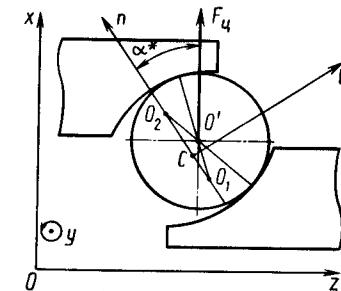


Рис. 3.4

проскальзывание шарика относительно дорожки качения. Тогда, если угловая скорость орбитального движения шарика равна  $\omega_c$ , а проекция угловой скорости его собственного вращения на ось  $C_1$  (см. рис. 3.4) равна  $\omega_l$ , то скорость движения центра  $v_b = \omega_c(R_1^* + R_2^*)/2$ , а скорости поверхности кольца в точках контакта равны  $R_m^* \Omega_m$ . Условие отсутствия проскальзывания в направлении движения сводится к уравнениям

$$v_b + 0,5 p_7^0 \omega_l = R_1^* \Omega_1; \quad v_b - 0,5 p_7^0 \omega_l = R_2^* \Omega_2,$$

из которых находим

$$\begin{aligned}v_b &= \omega_c(R_1^* + R_2^*)/2 = 0,5(R_1^* \Omega_1 + R_2^* \Omega_2); \\ \omega_l &= \frac{R_1^* \Omega_1 - R_2^* \Omega_2}{p_7^0}; \quad \omega_c = \frac{R_1^* \Omega_1 + R_2^* \Omega_2}{R_1^* + R_2^*}.\end{aligned} \quad (3.14)$$

Центробежная сила, действующая на шарик,

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_u &= \left[ \frac{F_l}{F_n} \right] = m_b \frac{R_1^* + R_2^*}{2} \left( \frac{R_1^* \Omega_1 + R_2^* \Omega_2}{R_1^* + R_2^*} \right)^2 \left[ \begin{array}{c} \sin \alpha^* \\ \cos \alpha^* \end{array} \right]; \\ m_b &= \frac{(p_7^0)^3}{6};\end{aligned} \quad (3.15)$$

где  $\rho$  — плотность материала шарика.

Пример. 3.2. Определить значение центробежной силы для подшипника 211, если его внутреннее кольцо вращается с частотой  $10\,000 \text{ мин}^{-1}$ ; плотность стали  $\rho = 7,83 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ ;  $\alpha^* = -16,83^\circ$ .

Решение. Вычислим параметры, входящие в формулу (3.15):

$$m_b = 3,1416 \cdot 7,83 \cdot 10^3 \frac{(14,288 \cdot 10^{-3})^3}{6} = 11,96 \cdot 10^{-3} \text{ кг};$$

$$\Omega_1 = 0; \quad \Omega_2 = 10^4 \cdot 2\pi/60 = 1047,2 \text{ рад/с};$$

$$R_1^* = 45,5295 \text{ мм}; \quad R_2^* = 31,9705 \text{ мм}.$$

Абсолютное значение центробежной силы

$$F_u = 1,196 \cdot 10^{-2} 38,75 \cdot 10^{-3} (1047,2 \cdot 31,9705/77,5)^2 = 86,5 \text{ Н}.$$

Вычислим компоненты вектора  $\mathbf{F}_u$ :

$$F_l = -0,2896 \cdot 86,5 = -25,1 \text{ Н}; \quad F_n = 0,957 \cdot 86,5 = 82,79 \text{ Н}.$$

Определим перемещения центра шарика  $\Delta_l$ ,  $\Delta_n$ , используя рассчитанные значения жесткостей  $K_l$ ,  $K_n$ :

$$\Delta_l = -25,1/4,39 \cdot 10^6 = -5,72 \text{ мкм}; \quad \Delta_n = 82,79/2,61 \cdot 10^8 = 0,317 \text{ мкм}.$$

Вычислим изменение углов контакта:

$$\begin{aligned}\Delta\alpha_1 &= -5,72 \cdot 10^{-6} / (-(14,288 \cdot 10^{-3})/2 + 7,36 \cdot 10^{-3}) = 2,648 \cdot 10^{-2} = 1,52^\circ = \\ &= -\Delta\alpha_2.\end{aligned}$$

Таким образом, углы контакта шарика с кольцами

$$\alpha_1 = -16,83^\circ + 1,52^\circ = -15,31^\circ; \quad \alpha_2 = 180^\circ - 16,83^\circ - 1,52^\circ = 161,65^\circ.$$

Как видно, изменение углов чрезвычайно мало.

Вычислим изменение нагрузок в контактах. Нагрузка на наружном контакте увеличится на  $1,5PF_n/(K_n\delta_1) = 1,5 \cdot 473,76 \cdot 82,79 / (2,61 \cdot 10^8 \cdot 5,3 \cdot 10^{-6}) = 42,53 \text{ Н}$ , а на внутреннем кольце уменьшится на  $1,5PF_n/(K_n\delta_2) = 1,5 \cdot 473,76 \cdot 82,79 / (2,6 \times 10^8 \cdot 5,55 \cdot 10^{-6}) = 40,77 \text{ Н}$ .

Изложенный метод учета центробежной силы применим в том случае, когда изменение углов контакта и относительное приращение силы в контакте малы, т.е.

$$\frac{\sin \alpha^* F_{\text{ц}}}{K_l v_m} \ll 1; \quad 1,5 \frac{\cos \alpha^* F_{\text{ц}}}{K_n \delta_m} \ll 1 (m = 1, 2).$$

Эти условия верны для большинства расчетных случаев. Невыполнение второго условия свидетельствует о неправильном выборе подшипника, поскольку существенно увеличивается нагрузка на наружное кольцо. Первое условие может в принципе не выполняться для упорного подшипника с углом контакта, близким к  $90^\circ$ , и (или) с малой осевой нагрузкой, когда жесткость  $K_l$  недостаточно велика. Если указанные неравенства не соблюдаются, то необходимо решать задачу в полной постановке, исходя из системы двух нелинейных уравнений равновесия шарика

$$F_{\text{ц}} \left[ \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \right] = \sum_{m=1,2} \frac{K_m (\delta_m + (-1)^{m+1} \Delta_n)^{3/2}}{\sqrt{\Delta_l^2 + [(-1)^m v_m - \Delta_n]^2}} \left[ \frac{-\Delta_l}{(-1)^m v_m - \Delta_n} \right]$$

относительно  $\Delta_l$ ,  $\Delta_n$  (положение колец считается неизменным). В общем случае такое решение проводят численно.

Рассмотрим влияние толщин пленок смазочного материала, возникающих в контактах при вращении колец. Сохраним предположение об идеальной кинематике, т.е. об отсутствии проскальзываний в контактах. Как известно, в формулы для толщины пленки входит скорость качения, равная полусумме скоростей поверхностей в системе, связанной с контактом (относительно которой последний неподвижен). Переходим к указанной системе, связанной с  $m$ -м контактом. Скорость движения ее начала в неподвижной системе равна  $R_m^* \omega_c$ , а скорости шарика и кольца в точке контакта в этой системе равны  $R_m^*(\Omega_m - \omega_c)$ . Скорость качения  $u_m$  вычисляется по формуле

$$u_m = R_m^* |\Omega_m - \omega_c|; \quad u_1 = u_2 = \frac{R_1^* R_2^*}{R_1^* + R_2^*} |\Omega_1 - \Omega_2| = u. \quad (3.16)$$

Обозначим толщину пленки в контактах  $h_m$ . Для ее вычисления имеется ряд формул. Наличие смазочной пленки в контактах при фиксированном осевом положении колец приводит к увеличению суммарного упругого сближения шарика с кольцами на величину  $h_1 + h_2$ . Предположим, что в начальном состоянии в подшипнике имеется осевой натяг и осевое положение колец зафиксировано. Очевидно, что наличие пленки не изменит углы контакта. Пусть  $\delta^*$  — упругое сближение в состоянии предваритель-

ного натяга. Тогда, если  $\delta_0$  — текущее значение упругого сближения, то

$$\delta_0 = \delta^* + h_1 + h_2. \quad (3.17)$$

Толщину пленки в контакте рассчитываем по формуле

$$h_m = R_{2m} (1,82 - 0,68 \frac{R_{2m}}{R_{1m}}) \left( \frac{\mu_0 u \alpha_p}{R_{2m}} \right)^{3/4} \left( \frac{E'}{P_{\text{ом}}} \right)^{1/4}, \quad (3.18)$$

где  $\mu_0$ ,  $\alpha_p$  — динамическая вязкость и пьезокоэффициент смазочного материала при нулевом давлении.

Рассчитываем контактные нагрузки и толщины пленки, используя метод последовательных приближений.

Вычисляем сначала скорость и качения в контактах по формуле (3.16). Для упрощения расчетов находим коэффициенты  $\kappa_m = R_{2m} (1,82 - 0,68 R_{2m}/R_{1m}) (\mu_0 u \alpha_p / R_{2m})^{3/4}$ , постоянные для всех приближений. Необходимые для вычислений значения  $R_{1m}$ ,  $R_{2m}$ ,  $K_0$  возьмем из статического осевого расчета, проведенного без учета смазочных пленок.

В первом приближении  $P_{\text{ом}}$  равным значениям при предварительном натяге, в последующих приближениях  $P_{\text{ом}}$  вычисляем по формуле (3.11). Затем определяем толщины  $h_1$ ,  $h_2$  пленок, вычисляем упругое сближение по формуле (3.17). Далее по формуле (3.8) находим нагрузку  $P$  в контакте. Если полученное значение мало отличается от значения, определенного в предыдущем приближении, то расчет закончен.

Пример 3.3. Найдем толщины  $h_m$  пленки и максимальные значения контактного давления для подшипника 211, смазочный материал МС-20, вращается внутреннее кольцо,  $\Omega_2 = 314 \text{ рад/с}$ , температура колец 323 К. Использовать данные предыдущих примеров. Смазочный материал имеет следующие параметры:  $\mu_0$  (323 К) = 0,141 Па·с,  $\alpha_p = 2,79 \cdot 10^{-8} \text{ Па}^{-1}$ .

Решение. В первом приближении сначала вычислим

$$u = 10^{-3} \frac{45,5295 - 31,9705}{45,5295 + 31,9705} 314 = 5,898 \text{ м/с.}$$

Определим коэффициенты  $\bar{\kappa}_m$ :

$$R_{12} = R_{11} = 0,24343 \text{ м}; \quad R_{21} = 8,3954 \text{ мм}; \quad R_{22} = 5,8931 \text{ мм}; \\ \bar{\kappa}_1 = 8,3954 \cdot 10^{-3} (1,82 - 0,68 \frac{8,3954 \cdot 10^{-3}}{0,24343}) \left( \frac{0,141 \cdot 5,898 \cdot 2,79 \cdot 10^{-8}}{8,3954 \cdot 10^{-3}} \right)^{3/4} =$$

$$= 1,022 \cdot 10^{-6} \text{ м};$$

$$\bar{\kappa}_2 = 5,8931 \cdot 10^{-3} (1,82 - 0,68 \frac{5,8931 \cdot 10^{-3}}{0,24343}) \times$$

$$\times \left( \frac{0,141 \cdot 5,898 \cdot 2,79 \cdot 10^{-8}}{5,8931 \cdot 10^{-3}} \right)^{3/4} = 9,39 \cdot 10^{-7} \text{ м};$$

$$p_{01} = 1,072 \cdot 10^9 \text{ Па}; \quad p_{02} = 1,264 \cdot 10^9 \text{ Па}; \quad E' = 2,286 \cdot 10^{11} \text{ Па.}$$

Далее последовательно находим:

$$h_1 = \frac{E'}{p_{01}}^{1/4} = 1,022 \cdot 10^{-6} \left( \frac{2,286 \cdot 10^{11}}{1,072 \cdot 10^9} \right)^{1/4} = 3,91 \text{ мкм};$$

$$h_2 = \frac{E'}{p_{02}}^{1/4} = 9,39 \cdot 10^{-7} \left( \frac{2,286 \cdot 10^{11}}{1,264 \cdot 10^9} \right)^{1/4} = 3,44 \text{ мкм};$$

$$\delta_0 = 10,86 + 3,91 + 3,44 = 18,21 \text{ мкм}; K_0 = 13,232 \text{ ГПа} \cdot \text{м}^{1/2};$$

$$P = 1,3232 \cdot 10^{10} (18,21 \cdot 10^{-6})^{3/2} = 1028,23 \text{ Н.}$$

Во втором приближении вычислим максимальные контактные давления по формуле (3.11):

$$p_{01} = k p_1 \left( \frac{P E'^2}{(R_{11}^{-1} + R_{21}^{-1})^{-2}} \right)^{1/2} = 0,1485 \left[ \frac{1028,23 (2,286 \cdot 10^{11})^2}{(8,1155 \cdot 10^{-3})^2} \right]^{1/3} =$$

$$= 1,388 \cdot 10^9 \text{ Па}; p_{02} = 1,636 \cdot 10^9 \text{ Па.}$$

Затем определим

$$h_1 = 1,022 \cdot 10^{-6} \left( \frac{2,286 \cdot 10^{11}}{1,388 \cdot 10^9} \right)^{1/4} = 3,66 \text{ мкм};$$

$$h_2 = 9,39 \cdot 10^{-7} \left( \frac{2,286 \cdot 10^{11}}{1,636 \cdot 10^9} \right)^{1/4} = 3,23 \text{ мкм};$$

$$\delta_0 = 10,86 + 3,66 + 3,23 = 17,75 \text{ мкм};$$

$$P = 1,3232 \cdot 10^{10} (17,75 \cdot 10^{-6})^{3/2} = 989,52 \text{ Н.}$$

В третьем приближении найдем

$$p_{01} = 0,1485 \left[ \frac{989,52 (2,286 \cdot 10^{11})^2}{(8,1155 \cdot 10^{-3})^2} \right]^{1/3} = 1,37 \cdot 10^9 \text{ Па};$$

$$p_{02} = 1,62 \cdot 10^9 \text{ Па}; h_1 = 1,022 \cdot 10^{-6} \left( \frac{2,286 \cdot 10^{11}}{1,37 \cdot 10^9} \right)^{1/4} = 3,67 \text{ мкм};$$

$$h_2 = 9,39 \cdot 10^{-7} \left( \frac{2,286 \cdot 10^{11}}{1,62 \cdot 10^9} \right)^{1/4} = 3,24 \text{ мкм}; \delta_0 = 10,86 + 3,67 + 3,24 = 17,7 \text{ мкм};$$

$$P = 1,3232 \cdot 10^{10} (17,77 \cdot 10^{-6})^{3/2} = 991,2 \text{ Н.}$$

Значения  $P$ , полученные во втором и третьем приближениях, отличаются менее чем на 0,2 %. Такая точность вполне достаточна. Если сравним результаты расчетов, проведенных в этом примере, с результатами расчетов примера 3.1, увидим, что нагрузка в контакте из-за наличия пленки смазочного материала возросла почти в 2 раза, значение контактного давления увеличилось в  $\sqrt[3]{2} = 1,27$  раза, а упругое сближение в 1,7 раза.

Получим выражение для осевой жесткости подшипника. При предварительном натяге в контактах шарика с кольцами сосредоточена упругая энергия, а шарики являются своего рода нелинейными пружинами, сжатыми силами  $P$  на  $\delta_0$ , причем  $P = K_0 \delta_0^{3/2}$ . При увеличении  $v$  на  $\Delta'$  деформация  $\delta_0$  пружины увеличится на то же значение, что приведет к увели-

чению силы на  $\Delta P = 3K_0 \delta_0^{1/2} \Delta' / 2$ , т.е. жесткость пружины (шарика)  $K_\delta = 3P/(2\delta_0)$ .

Предположим теперь, что осевое расстояние между центрами кривизны сечения колец увеличилось на  $\Delta_z$ . Тогда  $v$  увеличится на  $\Delta_v = \Delta_z |\sin \alpha|$ . Тангенс угла контакта получит приращение  $\Delta \alpha / (p_1^0 + p_2^0 + p_4^0 - p_3^0)$  [см. (3.12)], а синус угла контакта изменится при этом на  $\Delta_z \cos^2 \alpha / v$ . Осевую силу, действующую на подшипник, вычисляем по формуле (3.5). В результате осевого смещения она изменится на значение

$$\Delta F_z = Z(\Delta P \sin \alpha + P \frac{d \sin \alpha}{d \Delta_z} \Delta_z) = \frac{3}{2} Z \frac{P}{\delta_0} \sin^2 \alpha (1 + \frac{2\delta_0}{3v} \operatorname{ctg}^2 \alpha) \Delta_z.$$

Осевую жесткость подшипника находим по формуле

$$K_z = \frac{3}{2} Z \frac{P}{\delta_0} \sin^2 \alpha (1 + \frac{2\delta_0}{3v} \operatorname{ctg}^2 \alpha). \quad (3.19)$$

Второе слагаемое обусловлено изменением угла контакта при осевом смещении. Поскольку  $\delta_0 / v \ll 1$ , то

$$K_z = \frac{3}{2} \frac{P}{\delta_0} Z \sin^2 \alpha.$$

Значение указанного слагаемого существенно лишь при малых  $\alpha$ , т.е. для радиальных подшипников.

Оценим второе слагаемое в формуле (3.19) и рассчитаем осевую жесткость подшипника 211:

$$\frac{2\delta_0}{3v} \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{2 \cdot 1,086 \cdot 10^{-5}}{3 \cdot 4,4298 \cdot 10^{-4}} \left( \frac{0,95715}{0,2896} \right)^2 = 0,179;$$

$$K_z = \frac{3}{2} \frac{10 \cdot 473,76}{1,086 \cdot 10^{-5}} (0,2896)^2 1,179 = 6,47 \cdot 10^7 \text{ Н/м.}$$

Как видно, значение второго слагаемого в формуле (3.19) в данном случае существенно.

Если требуется найти жесткость узла, необходимо сначала найти жесткость каждого подшипника, а затем просуммировать полученные значения.

**Статический силовой расчет узла при комбинированном нагружении с учетом погрешностей изготовления.** Рассмотрим статически нагруженный шариковый подшипник, к кольцам которого приложены осевая, радиальная силы и момент. В результате кольца подшипника получат взаимные перемещения в осевом и радиальном направлениях и, кроме того, произойдет перекос.

Введем две правоориентированные системы координат:  $K = Oxyz$  – неподвижная,  $K' = O'\xi\eta\zeta$  – связанная с кольцом (рис. 3.5, a). Координаты точки в двух системах связаны следующими соотношениями:

$$\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix} = S \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{bmatrix}, \quad (3.20)$$

где  $x_0, y_0, z_0$  – координаты точки  $O'$  в неподвижной системе;  $S$  – матрица поворота.

Представим  $S$  в виде произведения матриц соответствующих трем простым поворотам вокруг осей (рис. 3.5, б, в):

$$S = S(\alpha, \beta, \gamma) = S_3(\gamma)S_2(\beta)S_1(\alpha),$$

где

$$S_3(\gamma) = \begin{bmatrix} \cos\gamma & \sin\gamma & 0 \\ -\sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$S_2(\beta) = \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & -\sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix}, \quad S_1(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}.$$

Тогда

$$S(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{bmatrix} \cos\beta\cos\gamma & \cos\alpha\sin\gamma + \sin\alpha\sin\beta\cos\gamma & \sin\alpha\sin\gamma - \cos\alpha\sin\beta\cos\gamma \\ -\cos\beta\sin\gamma & \cos\alpha\cos\gamma - \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma & \sin\alpha\cos\gamma + \cos\alpha\sin\beta\sin\gamma \\ \sin\beta & -\sin\alpha\cos\beta & \cos\alpha\cos\beta \end{bmatrix}.$$

Наглядно переход от системы  $K$  к системе  $K'$  показан на рис. 3.5, а – в. Вначале совершают параллельный перенос так, что точка  $O$  совмещается с точкой  $O'$ , а оси  $Ox, Oy, Oz$  – с осями  $O'x', O'y', O'z'$  (см. рис. 3.5, б). Затем выполняем три простых поворота (см. рис. 3.5, в):

1) поворот вокруг оси  $O'x'$  (на угол  $\alpha$ ), при котором оси  $O'y'$  и  $O'z'$  совмещаются с осями  $O'y''$  и  $O'z''$ , причем ось  $O'y''$  попадает в плоскость  $O'\xi\eta$ ; заметим, что в результате этого поворота ось  $O'y''$  оказывается перпендикулярной осям  $O'\xi$  и  $O'z''$ ;

2) поворот вокруг оси  $O'y''$  на угол  $\beta$  до совмещения осей  $O'z''$  и  $O'\xi$ ; при этом ось  $O'x''$  системы  $O'x'y'z''$  окажется в плоскости  $O'\xi\eta$ ;

3) поворот вокруг оси  $O'\xi$  на угол  $\gamma$  до совмещения осей  $O'x'', O'y''$  с осями  $O'\xi, O'\eta$ .

В дальнейшем потребуется выражение вектора угловой скорости системы  $K'$  в проекциях на неподвижные  $(\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z)$  и связанные  $(\Omega_\xi, \Omega_\eta, \Omega_\zeta)$ .

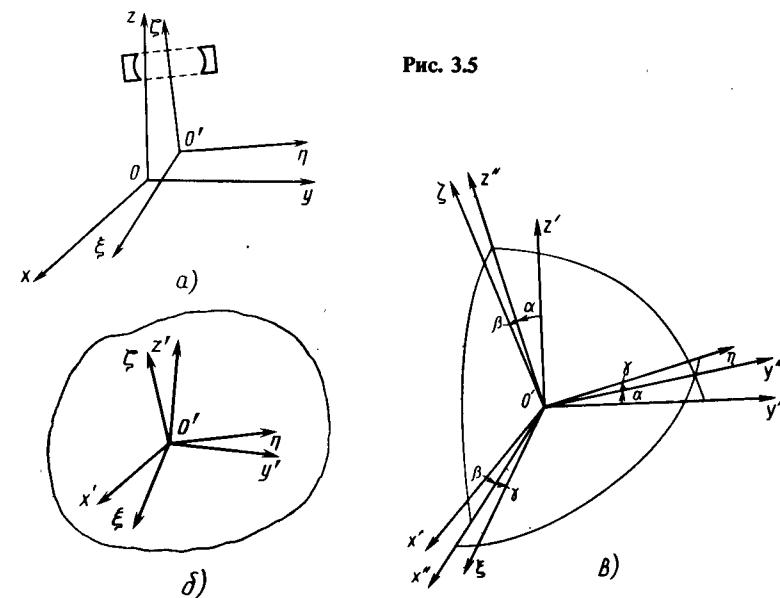


Рис. 3.5

$\Omega_\eta, \Omega_\xi$ ) оси. Предположим, что имеются  $\alpha, \beta, \gamma$ . Вектор угловой скорости  $\Omega$  является линейной комбинацией производных  $\alpha, \beta, \gamma$ , т.е.

$$\begin{bmatrix} \Omega_x \\ \Omega_y \\ \Omega_z \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix}, \quad (3.21)$$

где  $B$  – матрица, для нахождения которой воспользуемся несложными соображениями.

1. Вектор угловой скорости, обусловленный  $\dot{\alpha}$ , направлен по оси  $O'x'$  и равен по значению  $\dot{\alpha}$ . Таким образом,  $B_{11} = 1, B_{21} = 0, B_{31} = 0$ .

2. Вектор угловой скорости, обусловленный  $\dot{\beta}$ , направлен по оси  $O'y''$  и равен по значению  $\dot{\beta}$ . Координаты  $x', y'', z''$  и  $x', y', z'$  связаны соотношением

$$\begin{bmatrix} x' \\ y'' \\ z'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix},$$

т.е.  $B_{12} = 0, B_{22} = \cos\alpha, B_{32} = \sin\alpha$ .

3. Вектор угловой скорости, обусловленный  $\dot{\gamma}$ , направлен по оси  $O'\xi$ , поэтому  $B_{13} = \sin\beta, B_{23} = -\sin\alpha\cos\beta, B_{33} = \cos\alpha\cos\beta$ .

Таким образом,

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \sin\beta \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha\cos\beta \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha\cos\beta \end{bmatrix}. \quad (3.22)$$

Проекции вектора  $\Omega$  на связанные оси имеют вид

$$\begin{bmatrix} \Omega_\xi \\ \Omega_\eta \\ \Omega_\zeta \end{bmatrix} = B_0 \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix}. \quad (2.23)$$

Матрицу  $B_0$  получаем, рассуждая аналогично.

1. Проекции единичного вектора вдоль оси  $O'\xi$  на оси системы  $K'$  равны  $(0, 0, 1)$ .
2. Проекции единичного вектора вдоль оси  $O'y''$  на оси  $K'$  равны  $(\sin\gamma, \cos\gamma, 0)$ .
3. Проекции единичного вектора вдоль оси  $O'x'$  на оси  $K'$  равны  $(\cos\beta \cos\gamma, -\cos\beta \sin\gamma, \sin\beta)$ .

Поэтому

$$B_0 = \begin{bmatrix} \cos\beta \cos\gamma & \sin\gamma & 0 \\ -\cos\beta \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ \sin\beta & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.24)$$

Получим выражения для обобщенных сил  $Q_\alpha, Q_\beta, Q_\gamma$ , которые потребуются в дальнейшем при рассмотрении движения ротора. Для этого воспользуемся соотношением, следующим из определения обобщенных сил:

$$M_x \Omega_x + M_y \Omega_y + M_z \Omega_z = Q_\alpha \dot{\alpha} + Q_\beta \dot{\beta} + Q_\gamma \dot{\gamma},$$

и подставим в него полученное выше выражение для  $\Omega$ . Тогда получим искомую связь

$$\begin{bmatrix} Q_\alpha \\ Q_\beta \\ Q_\gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\beta & -\sin\alpha\cos\beta & \cos\alpha\cos\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix}. \quad (3.25)$$

Для дальнейшего изложения введем цилиндрические системы координат: а)  $C$  с координатами  $z, r, \varphi$ :  $x = r\cos\varphi$ ;  $y = r\sin\varphi$  и б)  $C'$  с координатами  $\xi, \rho, \psi$ :  $\xi = \rho\cos\psi$ ;  $\eta = \rho\sin\psi$ . Найдем связь координат точки в этих системах.

Уравнение (3.20) запишем в виде

$$\begin{bmatrix} \rho \cos\psi \\ \rho \sin\psi \\ \xi \end{bmatrix} = S \begin{bmatrix} r \cos\varphi - x_0 \\ r \sin\varphi - y_0 \\ z - z_0 \end{bmatrix}$$

или развернуто

$$r \cos\varphi = x_0 + \rho \cos\beta \cos(\psi + \gamma) + \xi \sin\beta;$$

$$r \sin\varphi = y_0 + \rho [\cos\alpha \sin(\psi + \gamma) + \sin\alpha \sin\beta \cos(\psi + \gamma)] - \xi \sin\alpha \cos\beta; \quad (3.26)$$

$$z = z_0 + \rho [\sin\alpha \sin(\psi + \gamma) - \cos\alpha \sin\beta \cos(\psi + \gamma)] + \xi \cos\alpha \cos\beta.$$

В дальнейшем будем считать перекосы и смещения системы малыми, т.е. мало значение  $\epsilon_\alpha = \max(|\alpha|, |\beta|)$ , а смещения  $x_0, y_0, z_0$  малы в сравнении с  $M = \max(|R^*|, |z^*|)$  ( $R^*, z^*$  – номинальные значения координат центра шарика), что равносильно малости значения  $\epsilon_x = \max(|x_0|, |y_0|, |z_0|)/M$ . Пренебрегая членами порядка выше первого по  $\epsilon_\alpha, \epsilon_x$ , решаем уравнения (3.26), из которых следуют соотношения

$$\begin{aligned} \xi &= z - z_0 + r \xi(\varphi), \quad \rho = r - \nu(\varphi) - z \xi(\varphi); \\ \psi &= \varphi - \gamma - \frac{1}{r} (z \xi(\varphi) + \mu(\varphi)), \end{aligned} \quad (3.27)$$

где

$$\begin{aligned} \xi(\varphi) &= -\alpha \sin\varphi + \beta \cos\varphi, \quad \xi(\varphi) = -\beta \sin\varphi - \alpha \cos\varphi; \\ \nu(\varphi) &= x_0 \cos\varphi + y_0 \sin\varphi, \quad \mu(\varphi) = y_0 \cos\varphi - x_0 \sin\varphi. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Выясним геометрический смысл полученных соотношений. Рассмотрим рис. 3.6. Точка  $M$  имеет цилиндрические координаты  $z, r, \varphi$ , декартовы координаты  $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi, z$ . Единичные векторы вдоль осей  $O'\xi, O'\eta, O'\zeta$  обозначим  $e_\xi, e_\eta, e_\zeta$ , а аналогичные векторы вдоль осей неподвижной системы координат обозначим  $e_x, e_y, e_z$ . Третья строка матрицы  $S$  составлена из проекций вектора  $e_\xi$  на оси системы  $K$ , поэтому с точностью до  $\epsilon_\alpha^2$

$$e_\xi = -\beta e_x - \alpha e_y + e_z.$$

Координата точки  $M$  по оси  $O'\xi$  равна проекции вектора  $O'M = OM - OO'$  на ось  $O'\xi$ , т.е. скалярному произведению  $O'M$  и  $e_\xi$ :

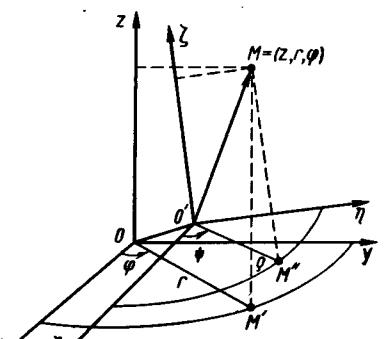


Рис. 3.6

$$\xi = [(x - x_0)\mathbf{e}_x + (y - y_0)\mathbf{e}_y + (z - z_0)\mathbf{e}_z, \mathbf{e}_\xi] = \beta(x - x_0) - \alpha(y - y_0) + \\ + z - z_0 = z - z_0 + r\xi(\varphi).$$

Это и есть первая формула из (3.27).

Координата  $\rho$  равна проекции вектора  $O'\vec{M}$  на плоскость  $\xi = 0$  или длине вектора  $O'\vec{M}''$ . Для  $O'\vec{M}''$  имеем выражение

$$\vec{O'M''} = \vec{O'M} - \xi \mathbf{e}_\xi = (x - x_0)\mathbf{e}_x + (y - y_0)\mathbf{e}_y + (z - z_0)\mathbf{e}_z - [z - z_0 + r\xi(\varphi)](\mathbf{e}_z + \beta\mathbf{e}_x - \alpha\mathbf{e}_y) \approx (x - x_0 - \beta z)\mathbf{e}_x + (y - y_0 + \alpha z)\mathbf{e}_y - r\xi(\varphi)\mathbf{e}_z,$$

т.е.

$$\vec{O'M''} = r(\mathbf{e}_x \cos \varphi + \mathbf{e}_y \sin \varphi) - [(x_0 + \beta z)\mathbf{e}_x + (y_0 - \alpha z)\mathbf{e}_y + r\xi(\varphi)\mathbf{e}_z].$$

Длина вектора  $O'\vec{M}''$  в линейном приближении равна сумме длин первого слагаемого и проекции второго слагаемого на направляющий вектор первого слагаемого:

$$\rho = |\vec{O'M''}| \approx r - (x_0 + \beta z) \cos \varphi - (y_0 - \alpha z) \sin \varphi = r - \nu(\varphi) - z\xi(\varphi).$$

Справедливость второй формулы также доказана.

Первая и вторая строки матрицы  $S$  составлены из проекций векторов  $\mathbf{e}_\xi, \mathbf{e}_\eta$  на оси системы  $K$ , поэтому

$$\mathbf{e}_\xi = \mathbf{e}_x \cos \gamma + \mathbf{e}_y \sin \gamma - \mathbf{e}_z \xi(\gamma);$$

$$\mathbf{e}_\eta = -\mathbf{e}_x \sin \gamma + \mathbf{e}_y \cos \gamma - \mathbf{e}_z \xi(\gamma).$$

Проекция вектора  $O'\vec{M}''$  на ось  $O'\xi(O'\eta)$  равна скалярному произведению векторов  $O'\vec{M}''$  и  $\mathbf{e}_\xi(\mathbf{e}_\eta)$ . Используя выражение для  $O'\vec{M}''$ , получим в линейном приближении

$$\xi \approx (r \cos \varphi - x_0 - \beta z) \cos \gamma + (r \sin \varphi - y_0 + \alpha z) \sin \gamma = r \cos(\varphi - \gamma) - \nu(\gamma) - z\xi(\gamma),$$

$$\eta \approx -(r \cos \varphi - x_0 - \beta z) \sin \gamma + (r \sin \varphi - y_0 + \alpha z) \cos \gamma = r \sin(\varphi - \gamma) - \mu(\gamma) - z\xi(\gamma).$$

Таким образом, вектор  $\mathbf{e}_\xi \xi + \mathbf{e}_\eta \eta$  складывается из двух векторов:

$$\mathbf{e}_\xi \xi + \mathbf{e}_\eta \eta = r[\mathbf{e}_x \cos(\varphi - \gamma) + \mathbf{e}_y \sin(\varphi - \gamma)] + \{-\mathbf{e}_\xi[\nu(\gamma) + z\xi(\gamma)] - \mathbf{e}_\eta[\mu(\gamma) + z\xi(\gamma)]\}.$$

Видно, что угол  $\psi$  равен  $\varphi - \gamma$  плюс поправка, обусловленная вектором в фигурных скобках и равная проекции этого вектора на единичный вектор  $-\mathbf{e}_\xi \sin(\varphi - \gamma) + \mathbf{e}_\eta \cos(\varphi - \gamma)$  (ортогональный первому слагаемому), деленной на  $r$ . Таким образом,

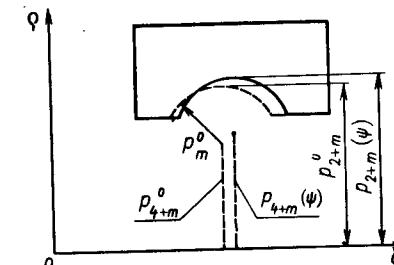


Рис. 3.7

$$\psi = \varphi - \gamma + [-\mathbf{e}_\xi \sin(\varphi - \gamma) + \mathbf{e}_\eta \cos(\varphi - \gamma)],$$

$$\left\{ -\mathbf{e}_\xi[\nu(\gamma) + z\xi(\gamma)] - \mathbf{e}_\eta[\mu(\gamma) + z\xi(\gamma)] \right\} = [\nu(\gamma) + z\xi(\gamma)] \sin(\varphi - \gamma) - [\mu(\gamma) + z\xi(\gamma)] \cos(\varphi - \gamma) = \varphi - \gamma - \frac{1}{r}[\mu(\varphi) + z\xi(\varphi)].$$

Таким образом можно дать наглядное геометрическое обоснование формулы (3.27).

Будем считать, что геометрия дорожек качения колец в связанной цилиндрической системе координат задается формулой

$$\rho_m = p_{2+m}(\psi_m) + (-1)^m p_m(\psi_m) - (-1)^m \left\{ p_m^2(\psi_m) - [\xi_m - p_{4+m}(\psi_m)] \right\}^{1/2} \quad (3.29)$$

и представляет собой поверхность тора с отклонениями формы и размеров. На рис. 3.7 представлено сечение наружного кольца ( $m = 1$ ) плоскостью  $\psi_m = \text{const}$ . Штриховая линия относится к кольцу с номинальной геометрией, а сплошная линия — к кольцу, имеющему отклонения геометрических параметров. Цилиндрические координаты центра кривизны сечения желоба в связанной системе координат в плоскости  $\psi_m = \text{const}$

$$\rho_m = p_{2+m}(\varphi - \gamma_m) + (-1)^m p_m(\varphi - \gamma_m);$$

$$\xi_m = p_{4+m}(\varphi - \gamma_m).$$

Введем малую величину  $\epsilon_p$  (максимальное значение отклонения)

$$\epsilon_p = \max_{1 \leq j \leq 6} [\max_{0 \leq \varphi \leq 2\pi} |p_j'(\varphi)|].$$

Цилиндрические координаты  $r_m, z_m$  центра кривизны желоба в плоскости  $\varphi = \text{const}$  в неподвижной системе координат можно определить из двух первых уравнений (3.27), для чего подставим в левую часть  $\xi = \xi_m$ ,  $\rho = \rho_m$  и решим эти уравнения относительно  $r, z$ . В линейном приближении по  $\epsilon_a, \epsilon_x, \epsilon_p$  получим

$$r_m = \rho_m + \nu_m(\varphi) + \xi_m \xi_m(\varphi) = p_{2+m}^0 + (-1)^m p_m^0 + p_{2+m}'(\varphi - \gamma_m) +$$

$$\begin{aligned}
& + (-1)^m p'_m(\varphi - \gamma_m) + v_m(\varphi) + p_{4+m}^0 \xi_m(\varphi), \\
z_m & = \xi_m + z_{m0} - p_m \xi_m(\varphi) = p_{4+m}^0 + p'_{4+m}(\varphi - \gamma_m) + \\
& + z_{m0} - [p_{2+m}^0 + (-1)^m p_m^0] \xi_m(\varphi),
\end{aligned} \tag{3.30}$$

где  $p'_j$  — отклонения геометрических параметров, обусловленные изготовлением (см. подразд. 3.1).

Расстояние  $v$  между центрами кривизны колец в плоскости  $\varphi = \text{const}$  вычисляем по формуле

$$\begin{aligned}
v & = \sqrt{(z_1 - z_2)^2 + (r_1 - r_2)^2} = \left\{ \left[ \sum_{m=1,2} (-1)^m z_m \right]^2 + \right. \\
& + \left[ \sum_{m=1,2} (-1)^m r_m \right]^2 \left. \right\}^{1/2} = \left\{ \sum_{m=1,2} (-1)^m [p_{4+m}^0 + p'_{4+m}(\varphi - \gamma_m) + \right. \\
& + z_{m0} - (p_{2+m}^0 + (-1)^m p_m^0) \xi_m(\varphi)] \left. \right\}^2 + \left\{ \sum_{m=1,2} (-1)^m [p_{2+m}^0 + \right. \\
& + (-1)^m p_m^0 + p'_{4+m}(\varphi - \gamma_m) + (-1)^m p_m'(\varphi - \gamma_m) + v_m(\varphi) + \\
& \left. + p'_{4+m} \xi_m(\varphi)] \right\}^2 > 1/2. \tag{3.31}
\end{aligned}$$

Упругое сближение шарика с кольцами

$$\delta = p_7 - p_1(\varphi - \gamma_1) - p_2(\varphi - \gamma_2) + v.$$

Вычислим  $v$ , используя выражение (3.31) и пренебрегая членами, содержащими квадраты отклонений геометрических параметров и смещений:

$$\begin{aligned}
v & = v^* + \left\{ \sum_{m=1,2} (-1)^m [p'_{2+m}(\varphi - \gamma_m) + (-1)^m p_m'(\varphi - \gamma_m) + \right. \\
& + v_m(\varphi) + p_{4+m}^0 \xi_m(\varphi)] \left. \right\} \cos \alpha^* - \left\{ \sum_{m=1,2} (-1)^m [p'_{4+m}(\varphi - \gamma_m) + \right. \\
& + z_{m0} - (p_{2+m}^0 + (-1)^m p_m^0) \xi_m(\varphi)] \left. \right\} \sin \alpha^*, \tag{3.32}
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
v^* & = \left\{ (p_2^0 + p_1^0 + p_4^0 - p_3^0)^2 + (p_5^0 - p_6^0)^2 \right\}^{1/2}, \\
\cos \alpha^* & = (p_2^0 + p_1^0 + p_4^0 - p_3^0)/v^*, \\
\sin \alpha^* & = (p_5^0 - p_6^0)/v^*.
\end{aligned}$$

Здесь  $v^*$ ,  $\alpha^*$  — расстояние между центрами кривизны и угол контакта в подшипнике без отклонений геометрических параметров, смещений и перекосов колец в состоянии предварительного натяга. При  $\alpha_2 = \alpha_1 + \pi$  условимся называть углом контакта для всего подшипника величину  $\alpha_1$ .

Относительная погрешность, допущенная при переходе от (3.31) к (3.32), — величина порядка  $M/v^*$ . Фактически значение этой величины

превышает ранее допущенные погрешности, поскольку отношение  $M/v^*$  велико (для примера расчета из подразд. 3.2  $M/v^* \approx 200$ ). Упругое сближение шарика с кольцами вычисляем по формуле

$$\delta = \delta^* + \delta', \quad \delta^* = p_7^0 - p_1^0 - p_2^0 + v^*;$$

$$\begin{aligned}
\delta' & = \sum_{m=1,2} (-1)^m [\nu_m(\varphi) \cos \alpha^* - z_{m0} \sin \alpha^* + l_m \xi_m(\varphi)] + \\
& + P'(\alpha^*, \varphi, \gamma_1, \gamma_2), \tag{3.33}
\end{aligned}$$

где  $\delta^*$  — упругое сближение в состоянии предварительного натяга;

$$\begin{aligned}
P' & = p_7' + \sum_{m=1,2} [( \cos \alpha^* - 1) p_m'(\varphi - \gamma_m) + (-1)^m p_{2+m}'(\varphi - \gamma_m) \cos \alpha^* - \\
& - (-1)^m p_{4+m}'(\varphi - \gamma_m) \sin \alpha^*]; \\
l_m & = p_{4+m}^0 \cos \alpha^* + (p_{2+m}^0 + (-1)^m p_m^0) \sin \alpha^*.
\end{aligned}$$

Модуль  $l_m$  равен расстоянию от начала координат до линии контактов в подшипнике в состоянии предварительного натяга, поэтому  $l_1 = l_2 \equiv l$  (рис. 3.8).

Исследуем статическое комбинированное нагружение подшипника без отклонений в геометрии, исходя из выражения (3.31) для расстояния между центрами кривизны желобов.

Введем обозначения:

$$\delta_z = z_{20} - z_{10}; \quad \delta_x = x_{20} - x_{10}; \quad \delta_y = y_{20} - y_{10};$$

$$\delta_\alpha = \alpha_2 - \alpha_1; \quad \delta_\beta = \beta_2 - \beta_1; \quad \nu(\varphi) = \nu_2(\varphi) - \nu_1(\varphi) = \delta_x \cos \varphi + \delta_y \sin \varphi;$$

$$\xi(\varphi) = \xi_2(\varphi) - \xi_1(\varphi) = -\delta_\alpha \sin \varphi + \delta_\beta \cos \varphi.$$

Заменим величины  $p_{2+m}^0$ ,  $p_{4+m}^0$ , входящие в формулу (3.31), на  $R^*$ ,  $z^*$ , при этом будет допущена погрешность порядка  $v^*/M$  (как правило, она не превышает 1 %):

$$\begin{aligned}
v(\varphi) & = [v^* \cos \alpha^* + \nu(\varphi) + z^* \xi(\varphi)]^2 + \\
& + [-v^* \sin \alpha^* + \delta_z - R^* \xi(\varphi)]^2^{1/2}.
\end{aligned}$$

Упругое сближение в сечении  $\varphi = \text{const}$  вычисляем по формуле

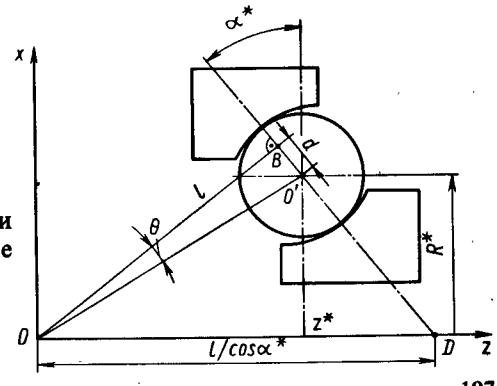


Рис. 3.8

$$\delta(\varphi) = \delta^* - v^* + v(\varphi) = v^* - \bar{\delta}^* - 1 + [\cos\alpha^* + \bar{\delta}_x \cos\varphi + \bar{\delta}_y \sin\varphi - \\ - z^*(\delta_\alpha \sin\varphi - \delta_\beta \cos\varphi)]^2 + [-\sin\alpha^* + \bar{\delta}_z + \bar{R}^*(\delta_\alpha \sin\varphi - \delta_\beta \cos\varphi)]^{2/2}, \quad (3.34)$$

где  $\bar{\delta}^*$ ,  $\bar{\delta}_x$ ,  $\bar{\delta}_y$ ,  $\bar{\delta}_z$ ,  $\bar{z}^*$ ,  $\bar{R}^*$  – безразмерные величины, равные соответствующим размерным, отнесенными к  $v^*$ . Потенциальная энергия в контактах шариков с кольцами

$$\Pi = \frac{2}{5} K_0 \sum_{j=1}^Z \delta^{5/2}(\varphi_j) = \frac{2}{5} K_0 v^{*5/2} \sum_{j=1}^Z [\bar{\delta}^* - 1 + F(\varphi_j)]^{5/2},$$

где  $F(\varphi_j)$  – слагаемое в правой части соотношения (3.34);  $\varphi_j$  – угловая координата  $j$ -го шарика.

Пусть шарики расположены равномерно по окружности:  $\varphi_j = \varphi_0 + + 2\pi(j-1)/Z$  и возможна полная разгрузка шариков. Тогда

$$\Pi = \frac{2}{5} K_0 v^{*5/2} \sum_{j=1}^Z [\bar{\delta}^* - 1 + F(\varphi_j)]^{5/2} \theta[\bar{\delta}^* - 1 + F(\varphi_j)]. \quad (3.35)$$

Здесь  $\theta(x)$  – функция Хевисайда, определенная соотношением

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Пусть к  $m$ -му кольцу приложены силы  $F_x$ ,  $F_y$ ,  $F_z$  и моменты  $M_x$ ,  $M_y$ . Запишем уравнения равновесия

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \delta_x} = (-1)^m v^* F_x, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial \delta_y} = (-1)^m v^* F_y; \quad (3.36)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \delta_z} = (-1)^m v^* F_z; \quad \frac{\partial \Pi}{\partial \delta_\alpha} = (-1)^m Q_\alpha \approx (-1)^m M_x,$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \delta_\beta} = (-1)^m Q_\beta \approx (-1)^m M_y.$$

Два последних приближенных равенства получены из (3.25).

Систему (3.36) решаем приближенно, так как она не имеет аналитического решения.

Рассчитаем матрицу жесткости подшипника при центральном положении колец. Для этого разложим выражение (3.35) по  $\bar{\delta}_x$ ,  $\bar{\delta}_y$ ,  $\bar{\delta}_z$ ,  $\delta_\alpha$ ,  $\delta_\beta$  до квадратичных слагаемых включительно, предполагая, что смещения и перекосы достаточно малы и  $\theta[\bar{\delta}^* - 1 + F(\varphi_j)] \equiv 1$  для любого  $j$ , т.е. все шарики нагружены. Выражение в фигурных скобках в формуле (3.34) равно  $1 + A_1 + A_2$ , где

$$A_1 = 2[(\bar{\delta}_x + \bar{z}^* \delta_\beta) \cos\varphi + (\bar{\delta}_y - \bar{z}^* \delta_\alpha) \sin\varphi] \cos\alpha^* - \\ - 2[\bar{\delta}_z + R^*(\delta_\alpha \sin\varphi - \delta_\beta \cos\varphi)] \sin\alpha^*; \\ A_2 = [(\bar{\delta}_x + \bar{z}^* \delta_\beta) \cos\varphi + (\bar{\delta}_y - \bar{z}^* \delta_\alpha) \sin\varphi]^2 + \\ + [\bar{\delta}_z + R^*(\delta_\alpha \sin\varphi - \delta_\beta \cos\varphi)]^2.$$

Используя формулу Тейлора, с точностью до квадратичных членов включительно получаем

$$(1 + A_1 + A_2)^{1/2} = 1 + \frac{A_1}{2} + \frac{A_2}{2} - \frac{A_1^2}{8} + \dots; \\ \delta^{5/2}(\varphi) = [\bar{\delta}^* - 1 + 1 + \frac{A_1}{2} + \frac{A_2}{2} - \frac{A_1^2}{8}]^{5/2} = \\ = (\bar{\delta}^*)^{5/2} [1 + \frac{A_1}{2\bar{\delta}^*} + \frac{A_2}{2\bar{\delta}^*} - \frac{A_1^2}{8\bar{\delta}^*}]^{5/2} = \\ = (\bar{\delta}^*)^{5/2} \left\{ 1 + \frac{5}{4} \frac{A_1}{\bar{\delta}^*} - \frac{5}{4} \frac{A_2}{\bar{\delta}^*} + \frac{5}{16} \frac{A_1^2}{\bar{\delta}^*} + \frac{15}{32} \frac{A_1^2}{\bar{\delta}^{*2}} \right\}.$$

Тогда потенциальная энергия

$$\Pi = \frac{2}{5} K_0 \delta^{*5/2} \sum_{j=1}^Z \left\{ 1 + \frac{5}{4} \frac{A_{1j}}{\bar{\delta}^*} + \frac{5}{4} \frac{A_{2j}}{\bar{\delta}^*} + \frac{5}{16} \frac{A_{1j}^2}{\bar{\delta}^*} + \right. \\ \left. + \frac{15}{32} \frac{A_{1j}^2}{\bar{\delta}^{*2}} \right\}. \quad (3.37)$$

Пусть шарики расположены равномерно по окружности, т.е.

$$\varphi_j = \varphi_0 + 2\pi(j-1)/Z, \quad Z > 2.$$

Воспользуемся следующими соотношениями:

$$\sum_{j=1}^Z \cos(m\varphi_j) = \begin{cases} 0, & m \neq kZ, \quad k \text{ – целое число,} \\ Z \cos(m\varphi_0), & m = kZ; \end{cases} \\ \sum_{j=1}^Z \sin(m\varphi_j) = \begin{cases} 0, & m \neq kZ, \quad k \text{ – целое число,} \\ Z \sin(m\varphi_0), & m = kZ. \end{cases} \quad (3.38)$$

После преобразований получаем искомое выражение (в размерных переменных) для потенциальной энергии с квадратичной точностью

$$\Pi = \frac{2}{5} K_0 \delta^{*5/2} \left\{ Z - \frac{5}{2} Z \frac{\delta_z}{\delta^*} \sin\alpha^* + \frac{5Z}{8\delta^{*v^*}} [(\delta_x^2 + \delta_y^2) - \right.$$

$$\begin{aligned}
& -2z^*(\delta_y \delta_\alpha - \delta_x \delta_\beta) + 2\delta_z^2 + (z^{*2} + R^{*2})(\delta_\alpha^2 + \delta_\beta^2)] + \\
& + \frac{5Z}{8\delta^*v^*} \left( \frac{3v^*}{2\delta^*} - 1 \right) [(\delta_x^2 + \delta_y^2)\cos^2 \alpha^* - 2l(\delta_y \delta_\alpha - \delta_x \delta_\beta)\cos \alpha^* + \\
& + 2\delta_z^2 \sin^2 \alpha^* + l^2(\delta_\alpha^2 + \delta_\beta^2)].
\end{aligned} \quad (3.39)$$

Таким образом, в линейном приближении система (3.36) уравнений равновесия сводится к линейной системе уравнений относительно  $\delta_x, \delta_y, \delta_z, \delta_\alpha, \delta_\beta$ :

$$\begin{bmatrix} C_r & 0 & 0 & 0 & C_{x\beta} \\ 0 & C_r & 0 & -C_{x\beta} & 0 \\ 0 & 0 & C_z & 0 & 0 \\ 0 & -C_{x\beta} & 0 & C_\alpha & 0 \\ C_{x\beta} & 0 & 0 & 0 & C_\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_x \\ \delta_y \\ \delta_z \\ \delta_\alpha \\ \delta_\beta \end{bmatrix} = (-1)^m \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z + (-1)^m P^* Z \sin \alpha \\ M_x \\ M_y \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

Отличные от нуля элементы матрицы жесткости

$$\begin{aligned}
C_r &= C_{xx} = C_{yy} = \tilde{A}(1 + \frac{2\delta^*}{3v^*} \operatorname{tq}^2 \alpha^*) \cos^2 \alpha^*; \\
C_\alpha &= C_{\alpha\alpha} = C_{\beta\beta} = \tilde{A}(1 + \frac{2\delta^*}{3v^*} \frac{d^2}{l^2}) l^2 = \tilde{A}(1 + \frac{2\delta^*}{3v^*} \operatorname{tq}^2 \theta) l^2; \\
C_z &= 2\tilde{A}(1 + \frac{2\delta^*}{3v^*} \operatorname{ctq}^2 \alpha^*) \sin^2 \alpha^*; \\
C_{x\beta} &= -C_{y\alpha} = \tilde{A}(l \cos \alpha^* + \frac{2\delta^*}{3v^*} (z^* \sin \alpha^* - R^* \cos \alpha^*) \sin \alpha^*) = \\
&= \tilde{A}l(1 - \frac{2\delta^*}{3v^*} \operatorname{tq} \alpha^* \operatorname{tq} \theta) \cos \alpha^*;
\end{aligned} \quad (3.41)$$

$$\tilde{A} = \frac{3P^*Z}{4\delta^*};$$

$$d = R^* \cos \alpha^* - z^* \sin \alpha^*;$$

$$\operatorname{tq} \theta = \frac{d}{l}.$$

Величины  $d, l, \theta$  показаны на рис. 3.8. В выражениях для жесткостей присутствуют пропорциональные  $\delta^*/v^*$  слагаемые, наличие которых вызвано тем, что были учтены значения квадратичного порядка при разложении  $v(\varphi)$ . Учет подобных величин для радиально-упорного подшипника приводит к незначительным поправкам. Последние могут

оказаться существенными лишь в двух случаях: угол контакта близок к нулю (радиальный подшипник), угол контакта близок к  $90^\circ$  (упорный подшипник).

Пусть началом неподвижной системы координат (см. рис. 3.8) выбрана точка  $D$  пересечения линии контактов и оси симметрии подшипника. Тогда  $l = 0, d = R^*/\cos \alpha^*, C_\alpha = \frac{P^*Z}{2v^*} \frac{R^{*2}}{\cos^2 \alpha^*}, C_{x\beta} = -\frac{P^*Z}{2v^*} R^* \operatorname{tq} \alpha^*$ . Как видно, в этом случае угловая жесткость меньше значения аналогичной величины из формулы (3.41) приблизительно в  $v^*/\delta^*$  раз (т.е. как правило, примерно на два порядка). Точка  $D$  называется полюсом подшипника и характеризуется тем, что угловая жесткость подшипника относительно этой точки аномально мала. Поэтому во избежание значительных перекосов следует обеспечить условия эксплуатации, в которых момент внешних сил относительно полюса равен нулю либо незначителен. Заметим, что если бы в формулах (3.41) для жесткостей не были учтены вторые слагаемые [порядка  $\delta^*/v^*$ , обусловленные слагаемыми  $A_2/2$  и  $A_1^2/8$  квадратичного порядка при разложении  $v(\varphi)$ ], то угловая жесткость относительно полюса была бы равна нулю.

Рассмотрим теперь задачу статики (3.36) в следующей постановке:

1) перекосы и смещения колец могут быть велики настолько, что может возникнуть разгрузка некоторых шариков;

2) потенциальная энергия вычисляется по формуле

$$\Pi = \frac{2}{5} K_0 (v^*)^{5/2} \frac{Z}{2\pi} \int_0^{2\pi} [\bar{\delta}^* - 1 + F(\varphi)]^{5/2} \theta [\bar{\delta}^* - 1 + F(\varphi)] d\varphi, \quad (3.42)$$

которая получена из (3.35) в предположении, что  $Z \rightarrow \infty$ . Пункт 1 фактически означает, что допускаются настолько большие смещения, что уже нельзя пользоваться уравнениями статики (3.40), верными в линейном приближении, однако величины  $\epsilon_\alpha$  и  $\epsilon_x$  оказываются все еще малыми. Пренебрежем в выражении (3.34) для упругого сближения квадратичными членами (т.е. слагаемыми  $A_2/2, A_1^2/8$ , вклад порядка  $\delta^*/v^*$ ). Тогда выражение (3.42) для потенциальной энергии принимает вид

$$\begin{aligned}
\Pi = \frac{2}{5} K_0 \frac{Z}{2\pi} \int_0^{2\pi} & [\Lambda_z + \Lambda_x \cos \varphi + \Lambda_y \sin \varphi]^{5/2} \theta (\Lambda_z + \\
& + \Lambda_x \cos \varphi + \Lambda_y \sin \varphi) d\varphi;
\end{aligned}$$

$$\Lambda_z \equiv \delta^* - \delta_z \sin \alpha^*;$$

$$\Lambda_x \equiv (\delta_x + \frac{l}{\cos \alpha^*} \delta_\beta) \cos \alpha^*, \quad \Lambda_y \equiv (\delta_y - \frac{l}{\cos \alpha^*} \delta_\alpha) \cos \alpha^*.$$

Заметим, что выражения, стоящие в круглых скобках в формулах для  $\Lambda_x$  и  $\Lambda_y$ , представляют собой  $x$ - и  $y$ -смещения внутреннего кольца относительно наружного в точке  $D$ . Введем переменную  $\Lambda_r = \sqrt{\Lambda_x^2 + \Lambda_y^2}$  и преобразуем выражение для потенциальной энергии

$$\Pi = \frac{2}{5} K_0 Z \int_0^{2\pi} (\Lambda_z + \Lambda_r \cos\varphi)^{5/2} \theta(\Lambda_z + \Lambda_r \cos\varphi) d\varphi. \quad (3.43)$$

Эта формула верна не только для подшипника с предварительным осевым натягом, но и для подшипника, который в начальный момент находится в состоянии предварительного касания, причем в последнем случае в выражениях для  $\Lambda_x$ ,  $\Lambda_y$ ,  $\Lambda_z$  следует положить  $\alpha^* = \alpha_0$ .

Уравнения равновесия (3.36) в случае, когда потенциальная энергия определяется формулой (3.43), принимают вид

$$(-1)^m F_x = K_0 Z I_r \frac{(\delta_x \cos\alpha^* + \delta_\beta l) \cos\alpha^*}{\Lambda_r};$$

$$(-1)^m F_y = K_0 Z I_r \frac{(\delta_y \cos\alpha^* - \delta_\alpha l) \cos\alpha^*}{\Lambda_r};$$

$$(-1)^{m+1} F_z = K_0 Z I_z \sin\alpha^*;$$

$$(-1)^m M_x = K_0 Z I_r \frac{(\delta_\alpha l - \delta_y \cos\alpha^*) l}{\Lambda_r};$$

$$(-1)^m M_y = K_0 Z I_r \frac{(\delta_\beta l + \delta_x \cos\alpha^*) l}{\Lambda_r};$$

$$\begin{bmatrix} I_r \\ I_z \end{bmatrix} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \begin{bmatrix} \cos\varphi \\ 1 \end{bmatrix} (\Lambda_z + \Lambda_r \cos\varphi)^{3/2} \theta(\Lambda_z + \Lambda_r \cos\varphi) d\varphi.$$

Из двух первых и двух последних уравнений следует, что

$$M_x + \frac{l}{\cos\alpha^*} F_y = 0; \quad M_y - \frac{l}{\cos\alpha^*} F_x = 0,$$

т.е. поперечные моменты относительно полюса равны нулю. Таким образом, и в "нелинейной" постановке угловая жесткость относительно полюса равна нулю.

Разделив первые два соотношения на  $\cos\alpha^*$ , возведя их в квадрат и сложив, получим

$$(F_x^2 + F_y^2)/\cos^2\alpha^* = (K_0 Z I_r)^2.$$

Обозначим  $F_r = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$  радиальную составляющую силы. Тогда совместно с третьим уравнением системы получим

$$\begin{aligned} \frac{F_r}{K_0 Z} &= \frac{\cos\alpha^*}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\Lambda_z + \Lambda_r \cos\varphi)^{3/2} \cos\varphi \theta(\Lambda_z + \Lambda_r \cos\varphi) d\varphi, \\ \frac{(-1)^{m+1} F_z}{K_0 Z} &= \frac{\sin\alpha^*}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\Lambda_z + \Lambda_r \cos\varphi)^{3/2} X \\ &\quad \times \theta(\Lambda_z + \Lambda_r \cos\varphi) d\varphi. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Из этих уравнений можно определить условия разгрузки шариков. Разгрузка начинается, когда  $\Lambda_z + \Lambda_r \cos\varphi$  принимает нулевое значение хотя бы при одном значении  $\varphi$ . При  $\Lambda_z > \Lambda_r > 0$  значение указанной величины положительно, и разгрузка невозможна. Начальному моменту разгрузки соответствует  $\Lambda_z = \Lambda_r$ . Подставив это соотношение в уравнения (3.44), имеем

$$\frac{F_r}{K_0 Z \cos\alpha^*} = \frac{\Lambda_r^{3/2}}{2\pi} \int_0^{2\pi} (1 + \cos\varphi)^{3/2} \cos\varphi d\varphi = \frac{2^{9/2}}{10\pi} \Lambda_r^{3/2};$$

$$\frac{(-1)^{m+1} F_z}{K_0 Z \sin\alpha^*} = \frac{\Lambda_r^{3/2}}{2\pi} \int_0^{2\pi} (1 + \cos\varphi)^{3/2} d\varphi = \frac{2^{9/2}}{6\pi} \Lambda_r^{3/2},$$

откуда, исключая  $\Lambda_r$ , получаем условие начала разгрузки шариков

$$\frac{5 F_r}{\cos\alpha^*} = \frac{3(-1)^{m+1} F_z}{\sin\alpha^*}. \quad (3.45)$$

Для доведения системы уравнений (3.44) до сравнительно простой расчетной методики введем следующие обозначения:

$$\Lambda = \sqrt{\Lambda_z^2 + \Lambda_r^2}; \quad \chi = \arccos \frac{\Lambda_z}{\Lambda},$$

$$\tilde{F} = \sqrt{\left(\frac{F_z}{\sin\alpha^*}\right)^2 + \left(\frac{F_r}{\cos\alpha^*}\right)^2};$$

$$F_0 = \frac{\tilde{F}}{K_0 Z}; \quad \theta_F = \arcsin \frac{F_r}{K_0 Z F_0 \cos\alpha^*},$$

$$0 \leq \theta_F \leq \pi/2.$$

Тогда система (3.44) в новых переменных принимает вид

$$\begin{aligned} F_0 \sin\theta_F &= \Lambda^{3/2} I_r(\chi); \\ F_0 \cos\theta_F &= \Lambda^{3/2} I_z(\chi); \end{aligned} \quad (3.46)$$

$$\begin{aligned} \left[ \begin{array}{c} I_r(x) \\ I_z(x) \end{array} \right] &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\cos\chi + \sin\chi\cos\varphi)^{3/2} \theta(\cos\chi + \sin\chi\cos\varphi) \left[ \begin{array}{c} \cos\varphi \\ 1 \end{array} \right] d\varphi, \end{aligned}$$

где величины  $F_0, \theta_F, K_0, Z$  заданы.  
Определим  $\chi$  из уравнения

$$\cos\theta_F = \frac{I_z(x)}{\sqrt{I_z^2(x) + I_r^2(x)}} \equiv I_0(x), \quad (3.47)$$

которое следует из системы (3.46). Затем

$$\Lambda = \frac{F_0^{2/3}}{\{I_z^2(x) + I_r^2(x)\}^{1/3}} \equiv F_0^{2/3} I_\Lambda(x). \quad (3.48)$$

Максимальную нагрузку  $P_{\max}$ , действующую на шарик, определяем по формуле

$$P_{\max} = K_0(\Lambda_z + \Lambda_r)^{3/2} = \frac{1}{Z} \tilde{F} I_{\max}(x);$$

$$I_{\max}(x) = (\cos\chi + \sin\chi)^{3/2} / \sqrt{I_z^2(x) + I_r^2(x)}.$$

Из последнего уравнения следует, что  $\cos\chi + \sin\chi \geq 0$ , т.е.  $0 \leq \chi \leq 3\pi/4$ . Угол  $\theta_P$  нагруженной зоны (угол сектора, который занимают нагруженные шарики) определяется формулой

$$\theta_P = \begin{cases} 2\pi, & 0 \leq \chi \leq \pi/4, \\ 2\arccos(-\operatorname{ctg}\chi) \equiv 2\pi - 2\arccos(\operatorname{ctg}\chi), & \pi/4 < \chi \leq 3\pi/4. \end{cases}$$

Определим также минимальную нагрузку  $P_{\min}$ , действующую на шарик:

$$P_{\min} = K_0(\Lambda_z - \Lambda_r)^{3/2} \theta(\Lambda_z - \Lambda_r) = \frac{1}{Z} \tilde{F} I_{\min}(x);$$

$$I_{\min}(x) = (\cos\chi - \sin\chi)^{3/2} \theta(\cos\chi - \sin\chi) / \sqrt{I_z^2(x) + I_r^2(x)}.$$

Минимальная нагрузка отлична от нуля при  $0 \leq \chi < \pi/4$  и равна нулю при  $\pi/4 \leq \chi \leq 3\pi/4$ . В табл. 3.1 представлены значения  $\theta_F, \chi, \theta_P, I_\Lambda, I_{\max}, I_{\min}$ . При  $\chi \rightarrow 3\pi/4$

$$I_\Lambda \sim \frac{1,07925}{(3\pi/4 - \chi)^{4/3}}; \quad I_{\max} \sim \frac{1,8856}{(3\pi/4 - \chi)^{1/2}}.$$

Зависимости  $\chi(\theta_F), I_\Lambda(x), I_{\max}(x), I_{\min}(x)$  во всем диапазоне изменения  $\theta_F$  и  $\chi$  можно аппроксимировать следующими формулами:

$$\chi(\theta_F) = \begin{cases} 1,342\theta_F, & 0 \leq \theta_F \leq 0,515, \\ 3,478\theta_F - 1,1, & 0,515 \leq \theta_F \leq 0,648, \\ 8,759(\theta_F - \pi/4) + 3\pi/4, & 0,648 \leq \theta_F \leq \pi/4 \end{cases}$$

(с погрешностью менее 3 %);

$$I_\Lambda(x) = \frac{1,07925}{(3\pi/4 - \chi)^{4/3}} [1 + 0,132 + 0,288(3\pi/4 - \chi)(3\pi/4 - \chi)]$$

(с погрешностью менее 5 %);

$$I_{\max}(x) = \frac{1,8856}{(3\pi/4 - \chi)^{1/2}} [1,364 - 0,262(\chi - 3\pi/8)^2 - 0,186e^{-5,625\chi}]$$

(с погрешностью менее 2 %);

$$I_{\min}(x) = 2 - I_{\max}(x), \quad 0 \leq \chi \leq \pi/4$$

(с погрешностью менее 2 %).

При значениях  $\chi$ , больших  $3\pi/4$ , задача не имеет решения. Исследуем задачу при  $\chi \rightarrow 3\pi/4$ . При указанных значениях  $\chi$  угол зоны нагруженных шариков стремится к нулю, и интегрирование в (3.46) проводится по малой окрестности точки  $\varphi = 0$ , где  $\cos\chi + \sin\chi\cos\varphi \geq 0$ . Эта окрестность тем меньше, чем значение  $\chi$  ближе к  $3\pi/4$ . Если в первом интеграле (3.46) положим  $\cos\varphi = 1$ , то при  $\chi \rightarrow 3\pi/4, I_r/I_z \rightarrow 1$ . Тогда, как следует из (3.47),  $\cos\theta_F \rightarrow 1/\sqrt{2}, \sin\theta_F \rightarrow 1/\sqrt{2}$ , и верно равенство

$$\frac{(-1)^{m+1} F_z}{K_0 Z \sin\alpha^*} = \frac{F_r}{K_0 Z \cos\alpha^*}.$$

Это соотношение определяет максимально допускаемую радиальную нагрузку при заданной осевой

$$F_r = (-1)^{m+1} F_z \operatorname{ctg}\alpha^*.$$

Решение задачи, в котором число шариков равно бесконечности, принадлежит Шовалю. Такое его изложение, хотя и отличается от классического, но, по нашему мнению, является более удобным, поскольку входной параметр  $\theta_F$  меняется в конечных пределах.

Перейдем к исследованию статического комбинированного нагружения подшипника с учетом отклонений геометрических параметров. Для оценки упругого сближения шарика в контакте используем формулы (3.33). Пусть углы перекосов, смещения и отклонения малы настолько, что нагружены все шарики. Тогда потенциальную энергию, запасенную в упругих контактах одного подшипника, вычисляем по формуле

$$\Pi = \frac{2}{5} K_0 \sum_{j=1}^Z (\delta^* + \delta'_j)^{5/2}.$$

Таблица 3.1

Продолжение табл. 3.1

$\theta_F \cdot 10^4$ , рад	$x$ , рад	$\theta_P$ , °	$I_\Lambda$	$I_{\max}$	$I_{\min}$
0,000	0,00	360,00	1,000	1,000	1,000000
0,300	0,04	360,00	1,000	1,060	0,93990
0,600	0,08	360,00	1,001	1,119	0,87950
0,899	0,12	360,00	1,003	1,178	0,81910
1,198	0,16	360,00	1,005	1,237	0,75880
1,495	0,20	360,00	1,008	1,294	0,69860
1,792	0,24	360,00	1,011	1,351	0,63870
2,087	0,28	360,00	1,015	1,407	0,57930
2,381	0,32	360,00	1,020	1,463	0,52050
2,672	0,36	360,00	1,025	1,517	0,46260
2,960	0,40	360,00	1,031	1,570	0,40570
3,245	0,44	360,00	1,038	1,622	0,35020
3,527	0,48	360,00	1,045	1,674	0,29620
3,803	0,52	360,00	1,053	1,723	0,24420
4,074	0,56	360,00	1,062	1,772	0,19460
4,338	0,60	360,00	1,072	1,819	0,14780
4,594	0,64	360,00	1,083	1,865	0,10450
4,839	0,68	360,00	1,095	1,910	0,06573
5,070	0,72	360,00	1,107	1,953	0,03274
5,283	0,76	360,00	1,121	1,995	0,00808
5,465	0,80	332,40	1,135	2,035	0,00000
5,612	0,84	307,40	1,151	2,072	0,00000
5,738	0,88	291,50	1,168	2,108	0,00000
5,894	0,92	279,20	1,186	2,144	0,00000
5,949	0,96	268,90	1,207	2,179	0,00000
6,040	1,00	259,90	1,229	2,214	0,00000
6,123	1,04	251,90	1,254	2,248	0,00000
6,200	1,08	244,60	1,281	2,283	0,00000
6,272	1,12	237,90	1,311	2,318	0,00000
6,339	1,16	231,60	1,334	2,353	0,00000
6,403	1,20	225,80	1,380	2,388	0,00000
6,463	1,24	220,20	1,420	2,425	0,00000
6,521	1,28	214,80	1,465	2,462	0,00000
6,576	1,32	209,70	1,514	2,500	0,00000
6,629	1,36	204,70	1,568	2,539	0,00000
6,680	1,40	199,90	1,628	2,580	0,00000
6,729	1,44	195,10	1,695	2,622	0,00000
6,777	1,48	190,40	1,770	2,667	0,00000
6,825	1,52	185,80	1,854	2,713	0,00000
6,871	1,56	181,20	1,948	2,726	0,00000
6,916	1,60	176,70	2,054	2,814	0,00000
6,961	1,64	172,1	2,157	2,870	0,00000
7,006	1,68	167,40	2,313	2,930	0,00000
7,050	1,72	162,70	2,472	2,994	0,00000
7,094	1,76	157,90	2,657	3,065	0,00000
7,138	1,80	153,00	2,873	3,142	0,00000
7,183	1,84	148,00	3,129	3,228	0,00000
7,228	1,88	142,70	3,435	3,324	0,00000
7,273	1,92	137,30	3,808	3,432	0,00000
7,319	1,96	131,60	4,270	3,557	0,00000

$\theta_F \cdot 10^4$ , рад	$x$ , рад	$\theta_P$ , °	$I_\Lambda$	$I_{\max}$	$I_{\min}$
7,365	2,00	125,50	4,853	3,703	0,00000
7,413	2,04	119,10	5,611	3,876	0,00000
7,462	2,08	112,10	6,628	4,086	0,00000
7,512	2,12	104,50	8,053	4,350	0,00000
7,564	2,16	96,11	10,170	4,695	0,00000
7,618	2,20	86,58	13,590	5,170	0,00000
7,675	2,24	75,45	19,880	5,883	0,00000
7,733	2,28	61,78	34,390	7,122	0,00000
7,827	2,32	29,01	265,100	14,960	0,00000

Предположим, что  $\delta_j'/\delta^* \ll 1$  для любого  $j$ , и разложим выражения в скобках под знаком суммы в ряд по  $\delta_j'/\delta^*$  до квадратичных членов включительно:

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{2}{5} K_0 \delta^{*5/2} \sum_{j=1}^Z \left( 1 + \frac{5}{2} \frac{\delta_j'}{\delta^*} + \frac{15}{8} \frac{\delta_j'^2}{\delta^{*2}} \right) = \frac{2}{5} P^* \delta^* Z + \\ & + P^* \sum_{j=1}^Z \left\{ P'(\alpha^*, \varphi_j, \gamma_1, \gamma_2) + \sum_{m=1,2} (-1)^m [v_m(\varphi_j) \cos \alpha^* - \right. \\ & \left. - z_{m0} \sin \alpha^* + l \xi_m(\varphi_j)] \right\} + \frac{3P^*}{4\delta^*} \left\langle \sum_{j=1}^Z \left\{ P'(\alpha^*, \varphi_j, \gamma_1, \gamma_2) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \sum_{m=1,2} (-1)^m [v_m(\varphi_j) \cos \alpha^* - z_{m0} \sin \alpha^* + l \xi_m(\varphi_j)] \right\}^2 \right\rangle. \quad (3.49) \end{aligned}$$

Функция  $P'(\alpha^*, \varphi, \gamma_1, \gamma_2)$  дана в (3.33). Используя формулу (3.49), можно найти силу  $P_\varphi^i$ , действующую на  $i$ -й шарик в окружном направлении, обусловленную отклонениями формы и размеров дорожек качения и радиальным смещением внутреннего кольца относительно наружного. Момент относительно оси  $Oz$  кольца равен  $P_\varphi^i R^*$ . С другой стороны, этот момент равен  $-\partial \Pi / \partial \varphi_i$ . Продифференцировав выражение (3.49) и учитя при этом только линейные (по отклонениям геометрических параметров и смещениям) слагаемые, получим

$$\begin{aligned} P_\varphi^i = & -\frac{1}{R^*} \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_i} = -\frac{P^*}{R^*} \frac{\partial}{\partial \varphi_i} \left\{ P'(\alpha^*, \varphi_i, \gamma_1, \gamma_2) + \right. \\ & \left. + \sum_{m=1,2} (-1)^m [v_m(\varphi_i) \cos \alpha^* + l \xi_m(\varphi_i)] \right\} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{P^*}{R^*} \left\{ \sum_{m=1,2} [(\cos\alpha^* - 1) \frac{\partial p'_m(\varphi - \gamma_m)}{\partial \varphi} + \right. \\
&+ (-1)^m \frac{\partial p'_m + 2(\varphi - \gamma_m)}{\partial \varphi} \cos\alpha^* - \\
&- (-1)^m \frac{\partial p'_m + m(\varphi - \gamma_m)}{\partial \varphi} \sin\alpha^*] \Big|_{\varphi=\varphi_i} + [(\delta_y \cos\varphi_i - \\
&\left. - \delta_x \sin\varphi_i) \cos\alpha^* - l(\delta_\alpha \cos\varphi_i + \delta_\beta \sin\varphi_i)] \right\}. \quad (3.50)
\end{aligned}$$

Предположим, что кольца подшипника идеальны. Тогда в формуле остаются лишь слагаемые в последних квадратных скобках, и максимальное по  $\varphi$  значение силы

$$P_{\varphi \max} = \frac{P^*}{R^*} \sqrt{(\delta_y \cos\alpha^* - l\delta_\alpha)^2 + (\delta_x \cos\alpha^* + l\delta_\beta)^2}. \quad (3.51)$$

Предположим, как это было раньше, что шарики расположены равномерно по окружности:  $\varphi_j = \varphi_0 + 2\pi(j-1)/Z$ , а их число превышает 2. Воспользовавшись формулами суммирования (3.38), получим

$$\begin{aligned}
\Pi &= \frac{2}{5} P^* \delta^* Z + P^* \bar{D}_z + \frac{3P^*}{4\delta^*} \sum_{j=1}^Z P'^2(\alpha^*, \varphi_j, \gamma_1, \gamma_2) - \\
&- P^* Z \delta_z \sin\alpha^* + \frac{3P^*}{2\delta^*} [\delta_x \cos\alpha^* + l\delta_\beta] \bar{D}_x + \frac{3P^*}{2\delta^*} [\delta_y \cos\alpha^* - \\
&- l\delta_\alpha] \bar{D}_y - \frac{3P^*}{2\delta^*} \delta_z \bar{D}_z \sin\alpha^* + \frac{3P^*}{8\delta^*} Z (\delta_x \cos\alpha^* + l\delta_\beta)^2 + \\
&+ \frac{3P^*}{8\delta^*} Z (\delta_y \cos\alpha^* - l\delta_\alpha)^2 + \frac{3P^*}{4\delta^*} Z \delta_z^2 \sin^2 \alpha^*; \quad (3.52)
\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \bar{D}_x \\ \bar{D}_y \\ \bar{D}_z \end{bmatrix} \equiv \sum_{j=1}^Z P'(\alpha^*, \varphi_j, \gamma_1, \gamma_2) \begin{bmatrix} \cos\varphi_j \\ \sin\varphi_j \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (3.53)$$

Таким образом, потенциальная энергия складывается из трех слагаемых, не зависящих от координат ротора, а определяемых только отклонениями геометрических параметров и углом поворота комплекта; линейного слагаемого  $P^* Z \delta_z \sin\alpha^*$ ; трех слагаемых, в которые входят обобщенные отклонения  $\bar{D}_x, \bar{D}_y, \bar{D}_z$ ; последних трех слагаемых, представляющих собой потенциальную энергию (в квадратичном приближении) подшипника без отклонений формы и размеров, причем угловая жесткость относительно полюса равна нулю.

Используя выражение (3.52) и уравнения (3.36), условия равновесия запишем в следующем виде:

$$\begin{bmatrix} \tilde{C}_r & 0 & 0 & 0 & -\tilde{C}_{x\beta} \\ 0 & \tilde{C}_r & 0 & -\tilde{C}_{x\beta} & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{C}_z & 0 & 0 \\ 0 & -\tilde{C}_{x\beta} & 0 & \tilde{C}_\alpha & 0 \\ \tilde{C}_{x\beta} & 0 & 0 & 0 & \tilde{C}_\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_x \\ \delta_y \\ \delta_z \\ \delta_\alpha \\ \delta_\beta \end{bmatrix} = \\
= (-1)^m \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z + (-1)^m P^* Z \sin\alpha^* \\ M_x \\ M_y \end{bmatrix} + \frac{3P^*}{2\delta^*} \begin{bmatrix} -\bar{D}_x \cos\alpha^* \\ -\bar{D}_y \cos\alpha^* \\ \bar{D}_z \sin\alpha^* \\ \bar{D}_y l \\ -\bar{D}_x l \end{bmatrix}, \quad (3.54)$$

где  $\tilde{C}_r, \tilde{C}_z, \tilde{C}_\alpha, \tilde{C}_{x\beta}$  – жесткости, рассчитываемые по формулам (3.41) после отбрасывания вторых слагаемых в скобках (т. е. величин порядка  $\delta^*/v^*$ ).

Наличие отклонений формы и размеров, обусловленных погрешностями изготовления, приводит к тому, что и при отсутствии внешних сил кольца смещаются друг относительно друга. Уравнения равновесия обладают свойством: если правые части равны нулю (если кольца идеальны и на них не действуют силы), то уравнения имеют тривиальное решение  $\delta_x = \delta_y = \delta_z = \delta_\alpha = \delta_\beta = 0$ , из которого следует, что смещения и перекосы внутреннего и наружного колец одинаковы. В матрице жесткости первая и вторая строки пропорциональны соответственно пятой и четвертой. Следствием этого, как и ранее, являются два уравнения

$$M_x + \frac{l}{\cos\alpha^*} F_y = 0; M_y - \frac{l}{\cos\alpha^*} F_x = 0,$$

означающие равенство нулю поперечных моментов относительно полюса. Если ввести величины

$$\tilde{\delta}_x = \delta_x + \frac{l}{\cos\alpha^*} \delta_\beta; \quad \tilde{\delta}_y = \delta_y - \frac{l}{\cos\alpha^*} \delta_\alpha,$$

соответствующие  $x$ - и  $y$ -смещениям колец друг относительно друга в полюсе, то их вместе с  $\delta_z$  можно определить из системы (3.54):

$$\begin{aligned}
\tilde{\delta}_x &= \frac{(-1)^m F_x}{\tilde{C}_r} - \frac{2}{Z \cos\alpha^*} \bar{D}_x; \\
\tilde{\delta}_y &= \frac{(-1)^m F_y}{\tilde{C}_r} - \frac{2}{Z \cos\alpha^*} \bar{D}_y; \quad (3.55)
\end{aligned}$$

$$\tilde{\delta}_z = \frac{(-1)^m F_z + P^* Z \sin \alpha^*}{\tilde{C}_z} + \frac{1}{Z \sin \alpha^*} \bar{D}_z.$$

Для применения данных формул к расчету конкретных подшипников получим выражения  $\bar{D}_x$ ,  $\bar{D}_y$ ,  $\bar{D}_z$  через разложение в ряд Фурье отклонений геометрии. В выражения (3.53), определяющие указанные величины, входят слагаемые вида [см. выражение (3.33) для  $P'$ ]

$$\sum_{j=1}^Z p'_l (\varphi_j - \gamma_m) \begin{bmatrix} \cos(n\varphi_j) \\ \sin(n\varphi_j) \end{bmatrix}, \quad l = 1, \dots, 6;$$

$n$  – целое число.

Воспользуемся комплексной формой представления отклонений формы и размеров в виде ряда Фурье (3.1)

$$p'_l (\varphi_j - \gamma_m) = \sum_k c_{kl} e^{ik(\varphi_j - \gamma_m)}$$

и вычислим

$$Q_{lnm} = \sum_{j=1}^Z p'_l (\varphi_j - \gamma_m) e^{in\varphi_j}. \quad (3.56)$$

Подставляя разложение  $l$ -го отклонения, получим

$$Q_{lnm} = \sum_{j=1}^Z e^{in\varphi_j} \sum_k c_{kl} e^{ik(\varphi_j - \gamma_m)} = \sum_k c_{kl} e^{-ik\gamma_m} \sum_{j=1}^Z e^{i(n+k)\varphi_j}$$

Используя формулы суммирования (3.38) в комплексной форме

$$\sum_{j=1}^Z e^{is\varphi_j} = \begin{cases} 0, s \neq rZ, r \text{ – целое число,} \\ Ze^{is\varphi_0}, s = rZ, \end{cases} \quad (3.57)$$

получим

$$Q_{lnm} = Z \sum_{k=tZ-n}^Z c_{kl} \exp \left\{ -i(k\gamma_m - tZ\varphi_0) \right\}, \quad t \text{ – целое число.} \quad (3.58)$$

В этой формуле суммирование проводим не по всем целым  $k$ , а лишь вида  $tZ - n$ .

Полученное комплексное равенство эквивалентно двум вещественным:

$$\begin{bmatrix} \operatorname{Re} Q_{lnm} \\ \operatorname{Im} Q_{lnm} \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^Z p'_l (\varphi_j - \gamma_m) \begin{bmatrix} \cos(n\varphi_j) \\ \sin(n\varphi_j) \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{Z}{2} \sum_{k=tZ-n}^Z \begin{bmatrix} a_{kl} \\ -b_{kl} \end{bmatrix} \cos(k\gamma_m - tZ\varphi_0) - \begin{bmatrix} b_{kl} \\ a_{kl} \end{bmatrix} \sin(k\gamma_m - tZ\varphi_0). \quad (3.59)$$

Здесь  $a_{kl}$ ,  $b_{kl}$  – амплитуды при косинусах и синусах порядка  $k$  в разложении  $l$ -го отклонения в ряд Фурье;  $\operatorname{Re} A$ ,  $\operatorname{Im} A$  – соответственно действительная и мнимая части комплексного числа  $A$ .

Используя выражения (3.59), можно рассчитать значения  $\bar{D}_x$ ,  $\bar{D}_y$ ,  $\bar{D}_z$ , определенные формулами (3.53):

$$\begin{bmatrix} \bar{D}_x \\ \bar{D}_y \\ \bar{D}_z \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^Z \left[ p'_{\eta j} + \sum_{m=1,2} [( \cos \alpha^* - 1 ) p'_m (\varphi_j - \gamma_m) + \right. \\ \left. + (-1)^m p'_{2+m} (\varphi_j - \gamma_m) \cos \alpha^* - (-1)^m p'_{4+m} (\varphi_j - \gamma_m) \sin \alpha^*] \right] \begin{bmatrix} \cos \varphi_j \\ \sin \varphi_j \\ 1 \end{bmatrix} = \\ = \sum_{j=1}^Z \begin{bmatrix} p'_{\eta j} \cos \varphi_j \\ p'_{\eta j} \sin \varphi_j \\ p'_{\eta j} \end{bmatrix} + \sum_{m=1,2} \left\{ (\cos \alpha^* - 1) \begin{bmatrix} \operatorname{Re} Q_{m1m} \\ \operatorname{Im} Q_{m1m} \\ Q_{m0m} \end{bmatrix} + \right. \\ \left. + (-1)^m \cos \alpha^* \begin{bmatrix} \operatorname{Re} Q_{(2+m)1m} \\ \operatorname{Im} Q_{(2+m)1m} \\ Q_{(2+m)0m} \end{bmatrix} + (-1)^m \sin \alpha^* \begin{bmatrix} \operatorname{Re} Q_{(4+m)1m} \\ \operatorname{Im} Q_{(4+m)1m} \\ Q_{(4+m)0m} \end{bmatrix} \right].$$

При  $k = tZ - 1$  получаем

$$\bar{D}_x = \sum_{j=1}^Z p'_{\eta j} \cos \varphi_j + \frac{Z}{2} \sum_{m=1,2} \sum_t \left\{ \cos(k\gamma_m - tZ\varphi_0) [(\cos \alpha^* - 1) a_{km} + (-1)^m \cos \alpha^* a_{k(2+m)} - (-1)^m \sin \alpha^* a_{k(4+m)}] - \sin(k\gamma_m - tZ\varphi_0) [(\cos \alpha^* - 1) b_{km} + (-1)^m \cos \alpha^* b_{k(2+m)} - (-1)^m \sin \alpha^* b_{k(4+m)}] \right\}; \quad (3.60)$$

$$\bar{D}_y = \sum_{j=1}^Z p'_{\eta j} \sin \varphi_j + \frac{Z}{2} \sum_{m=1,2} \sum_t \left\{ -\cos(k\gamma_m - tZ\varphi_0) [(\cos \alpha^* - 1) b_{km} + (-1)^m \cos \alpha^* b_{k(2+m)} - (-1)^m \sin \alpha^* b_{k(4+m)}] - \sin(k\gamma_m - tZ\varphi_0) [(\cos \alpha^* - 1) a_{km} + (-1)^m \cos \alpha^* a_{k(2+m)} - (-1)^m \sin \alpha^* a_{k(4+m)}] \right\}; \quad (3.61)$$

$$\bar{D}_z = \sum_{j=1}^Z p'_{\eta j} + \frac{Z}{2} \sum_{m=1,2} \sum_t \left\{ \cos[tZ(\gamma_m - \varphi_0)] [(\cos \alpha^* - 1) a_{(tZ)m} + (-1)^m \cos \alpha^* a_{(tZ)(2+m)} - (-1)^m \sin \alpha^* a_{(tZ)(4+m)}] - \right.$$

$$-\sin[tZ(\gamma_m - \varphi_0)] [(cos\alpha^* - 1)b_{(tZ)m} + (-1)^m cos\alpha^* b_{(tZ)(2+m)} - \\ - (-1)^m sin\alpha^* b_{(tZ)(4+m)}] \Big\}. \quad (3.62)$$

Из полученных выражений следует, что  $\bar{D}_z$  зависит только от гармоник отклонений формы и размеров колец, номера которых кратны числу  $Z$  шариков в комплекте. Эти гармоники влияют также на относительное осевое смещение колец [см. (3.55)]. Так, например, если число шариков в комплекте  $Z = 7$ , то в формулы входят только гармоники с номерами ..., -14, -7, 0, 7, 14, ... и т. д. На радиальные смещения колец оказывают влияние  $\bar{D}_x$ ,  $\bar{D}_y$  и, как следует из полученных для них выражений, лишь те гармоники отклонений геометрических параметров колец, которые имеют номера  $tZ - 1$ . Например, для подшипника с числом шариков  $Z = 7$  номера этих гармоник равны ..., -13, -6, 1, 8, 15, ... и т. д. На смещение колец влияет также разноразмерность шариков в комплекте. Так, если кольца подшипника идеальны, то смещения, обусловленные только разноразмерностью, равны

$$\tilde{\delta}_x = -\frac{2}{Z \cos\alpha^*} \sum_{j=1}^Z p'_{7j} \cos\varphi_j;$$

$$\tilde{\delta}_y = -\frac{2}{Z \cos\alpha^*} \sum_{j=1}^Z p'_{7j} \sin\varphi_j;$$

$$\tilde{\delta}_z = \frac{1}{Z \sin\alpha^*} \sum_{j=1}^Z p'_{7j}$$

В формулы для  $\bar{D}_x$ ,  $\bar{D}_y$ ,  $\bar{D}_z$  входят не отдельные амплитуды отклонений  $m$ -го кольца, а их линейные комбинации с коэффициентами, зависящими от угла контакта. Если ввести обобщенные амплитуды отклонений  $A_{km}$ ,  $B_{km}$   $m$ -го кольца по формулам

$$\begin{bmatrix} A_{km} \\ B_{km} \end{bmatrix} = (\cos\alpha^* - 1) \begin{bmatrix} a_{km} \\ b_{km} \end{bmatrix} + \\ + (-1)^m \cos\alpha^* \begin{bmatrix} a_{k(2+m)} \\ b_{k(2+m)} \end{bmatrix} - (-1)^m \sin\alpha^* \begin{bmatrix} a_{k(4+m)} \\ b_{k(4+m)} \end{bmatrix}, \quad (3.63)$$

то формулы примут вид

$$\bar{D}_x = \sum_{j=1}^Z p'_{7j} \cos\varphi_j + \frac{Z}{2} \sum_{t=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=1,2} \left\{ \cos[(tZ-1)\gamma_m - tZ\varphi_0] \tilde{A}_{(tZ-1)m} - \sin[(tZ-1)\gamma_m - tZ\varphi_0] \tilde{B}_{(tZ-1)m} \right\}; \quad (3.64)$$

$$\bar{D}_y = \sum_{j=1}^Z p'_{7j} \sin\varphi_j + \frac{Z}{2} \sum_{t=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=1,2} \left\{ -\cos[(tZ -$$

$$- 1)\gamma_m - tZ\varphi_0] \tilde{B}_{(tZ-1)m} - \sin[(tZ-1)\gamma_m - tZ\varphi_0] \tilde{A}_{(tZ-1)m} \right\}; \quad (3.65)$$

$$\bar{D}_z = \sum_{j=1}^Z p'_{7j} + \frac{Z}{2} \sum_{t=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=1,2} \left\{ \cos[tZ(\gamma_m - \varphi_0)] \tilde{A}_{(tZ)m} - \sin[tZ(\gamma_m - \varphi_0)] \tilde{B}_{(tZ)m} \right\}. \quad (3.66)$$

Обобщим методы и формулы статического расчета одного подшипника применительно к узлу, состоящему из  $M$  подшипников.

Предположим, что ось симметрии узла с名义альной (идеальной) геометрией в начальном состоянии совпадает с осью ротора. Введем систему координат, связанную со статором, и систему  $O'\xi\eta\zeta$ , связанную с ротором ( $Oz$  и  $O'\zeta$  — оси симметрии колец, закрепленных соответственно на статоре и на роторе). Пусть в начальном состоянии системы координат совпадают. На ротор действуют внешние силы  $F_x$ ,  $F_y$ ,  $F_z$  и моменты  $M_x$ ,  $M_y$ . Эти факторы вызывают перекосы и смещения системы координат ротора, которые, как и ранее, будем характеризовать тремя углами  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  и координатами  $x_0$ ,  $y_0$ ,  $z_0$  точки  $O'$  в неподвижной системе статора. Зададим геометрию каждого подшипника в начальный момент в неподвижной системе координат. Обозначим вектор номинальной геометрии  $n$ -го подшипника через  $p^{0n} = [p_1^{0n}, p_2^{0n}, p_3^{0n}, p_4^{0n}, p_5^{0n}, p_6^{0n}, p_7^{0n}]$ . Пусть  $\bar{m}_n$  — номер того кольца  $n$ -го подшипника, которое крепится к ротору, тогда  $\tilde{m}_n = \bar{m}_n - (-1)^{\bar{m}_n}$  — номер кольца, закрепленного на статоре. Вследствие нагружения произойдет перекос  $m_n$ -го кольца в  $n$ -м подшипнике, а кольцо  $\bar{m}_n$  останется неподвижным, причем углы перекоса и смещения  $n$ -го подшипника будут одинаковы для всех подшипников и равны  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $x_0$ ,  $y_0$ ,  $z_0$ .

Ранее получено выражение (3.39) для потенциальной энергии одного подшипника. Энергия для всего узла получается суммированием значений потенциальной энергии отдельных подшипников, т. е.

$$\Pi = \sum_{n=1}^M \Pi_n,$$

а для  $\Pi_n$  следует использовать выражение (3.39), в котором величины  $K_0$ ,  $\delta^*$ ,  $Z$ ,  $\alpha^*$ ,  $v^*$ ,  $z^*$ ,  $R^*$ ,  $l$  имеют индекс  $n$ , а величина  $\delta_x$  равна разности  $x$ -координат внутреннего и наружного колец ( $\delta_x = x_{20} - x_{10}$ ); аналогичные соотношения имеют место и для  $\delta_y$ ,  $\delta_z$ ,  $\delta_\alpha$ ,  $\delta_\beta$ . Когда в  $n$ -м подшипнике ротор перекошен, а статор неподвижен (т. е.  $\bar{m}_n$ -е кольцо перекошено, а  $\tilde{m}_n$ -е неподвижно), то  $x_{20} = 0$ ,  $x_{10} = x_0$ , если внутреннее кольцо крепится к статору, и  $x_{10} = 0$ ,  $x_{20} = x_0$ , если к статору крепится наружное кольцо. Таким образом,

$$\delta_x^n = (-1)^{\bar{m}_n} x_0, \quad \delta_y^n = (-1)^{\bar{m}_n} y_0;$$

$$\delta_z^n = (-1)^{\bar{m}_n} z_0, \quad \delta_\alpha^n = (-1)^{\bar{m}_n} \alpha, \quad \delta_\beta^n = (-1)^{\bar{m}_n} \beta;$$

$\gamma_1 = \gamma, \gamma_2 = 0$ , если  $\bar{m}_n = 1$ ;

$\gamma_1 = 0, \gamma_2 = \gamma$ , если  $\bar{m}_n = 2$ .

Выражение для  $\gamma_m$  можно записать в короткой форме:  $\gamma_m = \gamma \delta_{mn}$ , где символ Кронекера  $\delta_{ij} = 1$  при  $i = j$  и  $\delta_{ij} = 0$  при  $i \neq j$ . Потенциальная энергия узла

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{2}{5} \sum_{n=1}^M K_0^n (\delta^{*n})^{5/2} \left\{ Z^n - \frac{5}{2} Z^n \frac{(-1)^{\bar{m}_n} z_0}{\delta^{*n}} \sin \alpha^{*n} + \right. \\ & + \frac{5Z^n}{8\delta^{*n} v^{*n}} \left[ x_0^2 + y_0^2 - 2z^{*n} (y_0 \alpha - x_0 \beta) + 2z_0^2 + [(z^{*n})^2 + \right. \\ & \left. + (R^{*n})^2] (\alpha^2 + \beta^2) \right] + \frac{5Z^n}{8\delta^{*n} v^{*n}} \left( \frac{3v^{*n}}{2\delta^{*n}} - 1 \right) [ (x_0^2 + \right. \\ & \left. + y_0^2) \cos^2 \alpha^{*n} - 2l^n (y_0 \alpha - x_0 \beta) \cos \alpha^{*n} + 2z_0^2 \sin^2 \alpha^{*n} + \right. \\ & \left. + (l^n)^2 (\alpha^2 + \beta^2) ] \right\}. \end{aligned} \quad (3.67)$$

Уравнения равновесия узла будут иметь вид

$$\begin{bmatrix} K_r & 0 & 0 & 0 & K_{x\beta} \\ 0 & K_r & 0 & -K_{x\beta} & 0 \\ 0 & 0 & K_z & 0 & 0 \\ 0 & -K_{x\beta} & 0 & K_\alpha & 0 \\ K_{x\beta} & 0 & 0 & 0 & K_\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z + \sum_{n=1}^M (-1)^{\bar{m}_n} P^{*n} Z^n \sin \alpha^{*n} \\ M_x \\ M_y \end{bmatrix}, \quad (3.68)$$

где  $P^{*n} = K_0^{*n} (\delta^{*n})^{3/2}$  – нагрузка в контактах  $n$ -го подшипника; коэффициенты матрицы представляют собой жесткости узла:

$$\begin{aligned} K_r &= \sum_{n=1}^M \frac{3P^{*n} Z^n}{4\delta^{*n}} \left( 1 + \frac{2\delta^{*n}}{3v^{*n}} \operatorname{tg}^2 \alpha^{*n} \right) \cos^2 \alpha^{*n}; \\ K_z &= \sum_{n=1}^M \frac{3P^{*n} Z^n}{2\delta^{*n}} \left( 1 + \frac{2\delta^{*n}}{3v^{*n}} \operatorname{ctg}^2 \alpha^{*n} \right) \sin^2 \alpha^{*n}; \\ K_\alpha &= \sum_{n=1}^M \frac{3P^{*n} Z^n}{4\delta^{*n}} \left( 1 + \frac{2\delta^{*n}}{3v^{*n}} \operatorname{tg}^2 \theta^n \right) (l^n)^2; \\ K_{x\beta} &= \sum_{n=1}^M \frac{3P^{*n} Z^n}{4\delta^{*n}} [ l^n \cos \alpha^{*n} + \frac{2\delta^{*n}}{3v^{*n}} \sin \alpha^{*n} (z^{*n} \sin \alpha^{*n} - R^{*n} \cos \alpha^{*n}) ]. \end{aligned} \quad (3.69)$$

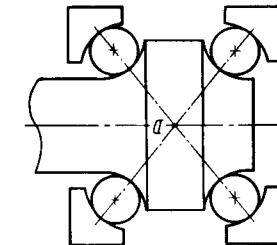


Рис. 3.9

Для узлов, способных поддерживать состояние предварительного натяга без приложения внешней осевой силы  $F_z, z_0 = 0$  является положением равновесия, и, как следует из третьего уравнения системы (3.68), это возможно лишь при

$$\sum_{n=1}^M (-1)^{\bar{m}_n} P^{*n} Z^n \sin \alpha^{*n} = 0,$$

т. е. если сумма осевых сил, действующих на ротор со стороны всех подшипников в состоянии предварительного натяга, равна нулю.

На рис. 3.9 приведена конструкция узла, у которого полюсы отдельных подшипников совпадают ( $D$  – полюс узла).

Рассмотрим узел, состоящий из двух подшипников с одинаковой nominalной геометрией и не имеющий полюса, для которого верны следующие соотношения:

$$\begin{aligned} R^{*1} &= R^{*2} = R^*; \quad z^{*2} = -z^{*1} = z^*; \quad \alpha^{*2} = -\alpha^{*1} = \alpha^*; \\ Z' &= Z^2 = Z; \quad P^{*1} = P^{*2} = P^*; \quad v^{*1} = v^{*2} = v^*; \end{aligned} \quad (3.70)$$

$$l_2 = -l_1 = l; \quad \delta^{*1} = \delta^{*2} = \delta^*; \quad \bar{m}_1 = \bar{m}_2 = \bar{m};$$

$$\tilde{m}_1 = \tilde{m}_2 = \tilde{m}.$$

В отличие от формулы (3.33), здесь  $l_1, l_2$  относятся к разным подшипникам. Индекс  $n = 1$  относится к левому подшипнику, а  $n = 2$  – к правому. Узел с  $m = 2$  изображен на рис. 1.13. Последние два соотношения (3.70) означают, что на роторе крепят либо оба внутренних, либо оба наружных колец. Жесткости такого узла вычисляем по формулам:

$$\begin{aligned} K_r &= \frac{3P^* Z}{2\delta^*} \left( 1 + \frac{2\delta^*}{3v^*} \operatorname{tg}^2 \alpha^* \right) \cos^2 \alpha^*; \\ K_z &= \frac{3P^* Z}{\delta^*} \left( 1 + \frac{2\delta^*}{3v^*} \operatorname{ctg}^2 \alpha^* \right) \sin^2 \alpha^*; \\ K_\alpha &= \frac{3P^* Z}{2\delta^*} \left( 1 + \frac{2\delta^*}{3v^*} \operatorname{tg}^2 \theta \right) l^2; \\ K_{x\beta} &= 0. \end{aligned} \quad (3.71)$$

Перейдем к исследованию статики узла с учетом отклонений формы и размеров. При получении формул (3.70) для жесткостей узла предполагали, что существует система координат, связанная со статором, в которой кольца в начальный момент представляют собой идеальные торы, а ось Oz является их осью симметрии. Однако это предположение выполняется далеко не всегда. В действительности следует учитывать, что кольца в результате их посадки в статор и ротор имеют определенные перекосы и смещения. Будем считать, что эти погрешности, обусловленные посадкой, малы. Покажем, что их можно рассматривать как погрешности изготовления в системе, связанной с ротором или статором – в зависимости от того, где они крепятся.

Исследуем выражение для упругого сближения  $\delta'$  из (3.33). При его получении исходили из того, что есть неподвижная система координат  $K = Oxyz$  и связанная с кольцом система  $K' = O'\xi\eta\zeta$ , в координатах которой выражены отклонения формы и размеров кольца. Предположим теперь, что в системе  $K'$  кольцо имеет перекосы, обусловленные посадкой. Это означает, что существует система  $K'' = O''\xi'\eta'\zeta'$ , в которой эти перекосы и смещения равны нулю и в которой измерены отклонения вследствие погрешностей изготовления кольца. Координаты в системах  $K'$  и  $K''$  связаны соотношениями

$$\begin{bmatrix} \xi \\ \eta' \\ \zeta' \end{bmatrix} = S(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma}) \begin{bmatrix} \xi - \tilde{\xi} \\ \eta - \tilde{\eta} \\ \zeta - \tilde{\zeta} \end{bmatrix}, \quad (3.72)$$

где  $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$  – углы перекоса;  $\tilde{\gamma}$  – угол поворота кольца при посадке;  $\tilde{\xi}, \tilde{\eta}, \tilde{\zeta}$  – смещения при посадке (координаты точки  $O''$  в системе  $K'$ ). Напомним, что  $\beta, -\tilde{\alpha}, 1$  – составляющие единичного вектора вдоль оси  $O''\zeta'$  в системе  $K'$ , а  $\cos\tilde{\gamma}, -\sin\tilde{\gamma}$  – составляющие единичного вектора вдоль оси  $O''\xi'$  на плоскость  $O'\eta\zeta$  системы  $K'$ . Таким образом,  $\gamma$  – угол поворота кольца при посадке, отсчитываемый против часовой стрелки, если смотреть с конца направляющего вектора оси  $O''\zeta'$ . Значения  $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\xi}, \tilde{\eta}, \tilde{\zeta}$  малы вследствие малости смещений при посадке. Используя формулы (3.20) и (3.72), получим связь координат в системах  $K$  и  $K''$ :

$$\begin{bmatrix} \xi \\ \eta' \\ \zeta' \end{bmatrix} = S(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma}) S(\alpha, \beta, \gamma) \begin{bmatrix} x - \bar{x}_0 \\ y - \bar{y}_0 \\ z - \bar{z}_0 \end{bmatrix}, \quad (3.73)$$

где

$$\begin{bmatrix} \bar{x}_0 \\ \bar{y}_0 \\ \bar{z}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} + S^T(\alpha, \beta, \gamma) \begin{bmatrix} \tilde{\xi} \\ \tilde{\eta} \\ \tilde{\zeta} \end{bmatrix};$$

$S^T$  – транспонированная матрица  $S$ . Поскольку углы  $\alpha, \beta, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$  малы, то с квадратичной по этим углам точностью

$$S(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{bmatrix} \cos\gamma & \sin\gamma & -\xi(\gamma) \\ -\sin\gamma & \cos\gamma & -\zeta(\gamma) \\ \beta & -\alpha & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.74)$$

где  $\xi(\gamma), \zeta(\gamma)$  вычисляем по формулам (3.28).

Для произведения матриц, входящего в выражение (3.73), с такой же точностью имеем

$$S(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma}) S(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{bmatrix} \cos(\gamma + \tilde{\gamma}) & \sin(\gamma + \tilde{\gamma}) & -\tilde{\xi}(\gamma + \tilde{\gamma}) \\ -\sin(\gamma + \tilde{\gamma}) & \cos(\gamma + \tilde{\gamma}) & -\tilde{\zeta}(\gamma + \tilde{\gamma}) \\ \tilde{\beta} & -\tilde{\alpha} & 1 \end{bmatrix} = S(\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \gamma + \tilde{\gamma}), \quad (3.75)$$

где

$$\bar{\beta} = \beta + \tilde{\beta} \cos\gamma + \tilde{\alpha} \sin\gamma, \quad \bar{\alpha} = \alpha + \tilde{\alpha} \cos\gamma - \tilde{\beta} \sin\gamma,$$

$$\tilde{\xi}(\gamma + \tilde{\gamma}) = \xi(\gamma + \tilde{\gamma}) \Big|_{\substack{\alpha=\bar{\alpha} \\ \beta=\bar{\beta}}} \quad \tilde{\zeta}(\gamma + \tilde{\gamma}) = \zeta(\gamma + \tilde{\gamma}) \Big|_{\substack{\alpha=\bar{\alpha} \\ \beta=\bar{\beta}}}$$

Для величин  $\bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{z}_0$  квадратичной погрешностью получаем выражение

$$\begin{bmatrix} \bar{x}_0 \\ \bar{y}_0 \\ \bar{z}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 + \tilde{\xi} \cos\gamma - \tilde{\eta} \sin\gamma \\ y_0 + \tilde{\xi} \sin\gamma + \tilde{\eta} \cos\gamma \\ z_0 - \tilde{\zeta} \end{bmatrix}. \quad (3.76)$$

Таким образом, связь координат в системах  $K''$  и  $K$  имеет вид

$$\begin{bmatrix} \xi' \\ \eta' \\ \zeta' \end{bmatrix} = S(\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \gamma + \tilde{\gamma}) \begin{bmatrix} x - \bar{x}_0 \\ y - \bar{y}_0 \\ z - \bar{z}_0 \end{bmatrix}, \quad (3.77)$$

т. е. аналогична связи (3.20) координат в системах  $K'$  и  $K$ .

Пусть теперь отклонения формы и размеров рабочих поверхностей кольца измерены в цилиндрической системе, связанной с системой  $K''$ . Обозначим соответствующие отклонения через  $\bar{p}_j$ . Тогда, исходя из уравнения (3.77), получим выражение для упругого сближения  $\delta$ , аналогичное (3.33), но в котором  $\alpha_m, \beta_m, \gamma_m, z_{m0}, x_{m0}, y_{m0}, p'_j (j = 1, \dots, 6)$  заменены соответственно на  $\bar{\alpha}_m, \bar{\beta}_m, \bar{\gamma}_m = \gamma_m + \gamma_0, \bar{z}_{m0}, \bar{x}_{m0}, \bar{y}_{m0}, \bar{p}_j (j = 1, \dots, 6)$ , а именно:

$$\delta = \delta^* + \delta'; \quad \delta^* = p_7^0 - p_1^0 - p_2^0 + v^*;$$

$$\begin{aligned}\delta' &= \sum_{m=1,2} (-1)^m [\bar{v}_m(\varphi) \cos\alpha^* - \bar{z}_{m0} \sin\alpha^* + l\bar{\xi}_m(\varphi)] + \\ &+ \bar{P}'(\alpha^*, \varphi, \bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2); \\ \bar{P}'(\alpha^*, \varphi, \bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2) &= p'_7 + \sum_{m=1,2} [(\cos\alpha^* - 1)\bar{p}'_m(\varphi - \bar{\gamma}_m) + \\ &+ (-1)^m \bar{p}'_{2+m}(\varphi - \bar{\gamma}_m) \cos\alpha^* - (-1)^m \bar{p}'_{4+m}(\varphi - \gamma_m) \sin\alpha^*]; \\ \bar{v}(\varphi) &= v(\varphi)|_{\substack{x_0 = \bar{x}_0 \\ y_0 = \bar{y}_0}}.\end{aligned}$$

Подставив выражения (3.75) для  $\bar{\alpha}, \bar{\beta}$  и (3.76) для  $\bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{z}_0$  в формулу для  $\delta'$ , получим

$$\begin{aligned}\delta' &= \sum_{m=1,2} (-1)^m [\bar{v}_m(\varphi) \cos\alpha^* - z_{m0} \sin\alpha^* + l\bar{\xi}_m(\varphi)] + \\ &+ \bar{P}'(\alpha^*, \varphi, \bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2) + \sum_{m=1,2} (-1)^m \left\{ [\bar{\xi}_m \cos(\varphi - \gamma_m) + \right. \\ &\left. + \eta_m \sin(\varphi - \gamma_m)] \cos\alpha^* + \bar{\xi}_m \sin\alpha^* + l[\bar{\beta}_m \cos(\varphi - \gamma_m) - \right. \\ &\left. - \bar{\alpha}_m \sin(\varphi - \gamma_m)] \right\}. \quad (3.78)\end{aligned}$$

Поскольку значения  $\delta'$ , определяемые формулами (3.78) и (3.33), должны совпадать (действительно, упругое сближение не зависит от того, в какой системе координат – в  $K'$  или  $K''$  мы задаем геометрию кольца), то, сравнив указанные формулы, видим, что отклонения геометрических параметров в системах  $K'$  и  $K''$  связаны соотношением

$$\begin{aligned}p'_7 + \sum_{m=1,2} [(\cos\alpha^* - 1)p'_m(\varphi - \gamma_m) + (-1)^m p'_{2+m}(\varphi - \gamma_m) \cos\alpha^* - (-1)^m p'_{4+m}(\varphi - \gamma_m) \sin\alpha^*] - \sum_{m=1,2} (-1)^m \times \\ \times \left\{ [\bar{\xi}_m \cos(\varphi - \gamma_m) + \bar{\eta}_m \sin(\varphi - \gamma_m)] \cos\alpha^* + \bar{\xi}_m \sin\alpha^* + \right. \\ \left. + (z^* \cos\alpha^* + R^* \sin\alpha^*) [\bar{\beta}_m \cos(\varphi - \gamma_m) - \bar{\alpha}_m \sin(\varphi - \gamma_m)] \right\} = \\ = p'_7 + \sum_{m=1,2} [(\cos\alpha^* - 1)\bar{p}'_m(\varphi - \bar{\gamma}_m) + (-1)^m \bar{p}'_{2+m}(\varphi - \bar{\gamma}_m) \cos\alpha^* - (-1)^m \bar{p}'_{4+m}(\varphi - \bar{\gamma}_m) \sin\alpha^*]. \quad (3.79)\end{aligned}$$

Здесь использована формула  $l = z^* \cos\alpha^* + R^* \sin\alpha^*$ . Поскольку в окончательное выражение, связывающее отклонения в двух системах координат, не должен входить угол контакта  $\alpha^*$ , то из формулы (3.79) находим

$$\begin{aligned}\bar{p}'_m(\varphi - \bar{\gamma}_m) &= p'_m(\varphi); \\ \bar{p}'_{4+m}(\varphi - \bar{\gamma}_m) &= p'_{4+m}(\varphi) + \bar{\xi}_m + R^*(\bar{\beta}_m \cos\varphi - \bar{\alpha}_m \sin\varphi); \\ \bar{p}'_{2+m}(\varphi - \bar{\gamma}_m) &= p'_{2+m}(\varphi) - (\bar{\xi}_m + z^* \bar{\beta}_m) \cos\varphi + \\ &+ (z^* \alpha_m - \bar{\eta}_m) \sin\varphi. \quad (3.80)\end{aligned}$$

Таким образом, наличие перекосов и смещений при посадке  $m$ -го кольца ( $\bar{\alpha}_m, \bar{\beta}_m, \bar{\gamma}_m, \bar{\xi}_m, \bar{\eta}_m, \bar{\xi}_m$ ) эквивалентно появлению дополнительных слагаемых в выражениях для отклонений, обусловленных изготовлением.

Предположим вначале, что угол поворота кольца при посадке равен нулю ( $\bar{\gamma}_m = 0$ ). Тогда осевое смещение при посадке эквивалентно изменению осевого положения центра кривизны желоба, а наличие радиальных смещений и перекосы при посадке эквивалентны появлению дополнительных выражений для отклонений в составляющих  $p_{2+m}, p_{4+m}$  вектора геометрии, причем гармоники этих отклонений являются гармониками первого порядка. Наличие же угла поворота при посадке равносильно тому, что происходит поворот кольца с суммарными отклонениями (включая смещения при посадке) на угол  $\bar{\gamma}_m$ . С учетом формулы (3.2) для коэффициентов разложения отклонений в ряд Фурье получим следующие соотношения:

$$\begin{aligned}0,5\bar{a}_{0(4+m)} &= 0,5a_{0(4+m)} + \xi_m; \\ \bar{a}_{1(4+m)} &= a_{1(4+m)} + R^*\bar{\beta}_m; \\ \bar{b}_{1(4+m)} &= b_{1(4+m)} - R^*\bar{\alpha}_m; \\ \bar{a}_{1(2+m)} &= a_{1(2+m)} - \bar{\xi}_m - z^*\bar{\beta}_m; \\ \bar{b}_{1(2+m)} &= b_{1(2+m)} - \bar{\eta}_m + z^*\bar{\alpha}_m; \\ \bar{a}_{km} &= a_{km}; \quad \bar{b}_{km} = b_{km}; \quad k \neq 0, 1. \quad (3.81)\end{aligned}$$

Здесь величины с чертой относятся к системе  $K'$ . Из этих формул следует, что если значения  $\bar{a}_{0(4+m)}, \bar{a}_{1(4+m)}, \bar{b}_{1(4+m)}, \bar{a}_{1(2+m)}, \bar{b}_{1(2+m)}$  отличны от нуля, то соответствующие амплитуды отклонений геометрических параметров в системе  $K'$ , связанной с ротором, можно сделать равными нулю надлежащим выбором смещений при посадке. Практическое же достижение этого результата – сложная технологическая задача.

Пусть теперь известны погрешности  $p'_j$  изготовления всех колец ротора (статора) в системе, связанной с ротором (статором). Эти отклонения можно либо измерить в узле в собранном состоянии (отдельно для колец статора и колец ротора), либо, зная смещения при посадке каждого из колец, рассчитать по формулам (3.80), (3.81). Выражение потенциальной

енергии всего узла получаем суммированием энергий отдельных подшипников, т. е. выражений (3.52):

$$\begin{aligned} \Pi = & \sum_{n=1}^M \left\{ \frac{2}{5} P^{*n} \delta^{*n} Z^n + P^{*n} \bar{D}_z^n + \right. \\ & + \frac{3P^{*n}}{4\delta^{*n}} \sum_{j=1}^{Z^n} [P'(\alpha^{*n}, \varphi_j^n, \gamma_1^n, \gamma_2^n)]^2 - P^{*n} Z^n (-1)^{\bar{m}_n} z_0 \sin \alpha^{*n} + \\ & + (-1)^{\bar{m}_n} \frac{3P^{*n}}{2\delta^{*n}} [x_0 \cos \alpha^{*n} + l^n \beta] \bar{D}_x^n + (-1)^{\bar{m}_n} \frac{3P^{*n}}{2\delta^{*n}} [y_0 \cos \alpha^{*n} - \\ & - l^n \alpha] \bar{D}_y^n - (-1)^{\bar{m}_n} \frac{3P^{*n}}{2\delta^{*n}} z_0 \bar{D}_z^n \sin \alpha^{*n} + \frac{3P^{*n}}{8\delta^{*n}} Z^n (x_0 \cos \alpha^{*n} + \\ & + l^n \beta)^2 + \frac{3P^{*n}}{8\delta^{*n}} Z^n (y_0 \cos \alpha^{*n} - l^n \alpha)^2 + \frac{3P^{*n}}{4\delta^{*n}} Z^n z_0^2 \sin^2 \alpha^{*n} \Big\}. \quad (3.82) \end{aligned}$$

Значения  $\bar{D}_x^n$ ,  $\bar{D}_y^n$ ,  $\bar{D}_z^n$  для  $n$ -го подшипника вычисляем по формуле (3.53). Кроме того,

$$\varphi_j^n = \varphi_0^n + \frac{2\pi}{Z} (j-1); \quad \gamma_m^n = \gamma \delta_{m\bar{m}_n}, \quad (3.83)$$

где  $\varphi_0^n$  — угол поворота комплекта шариков в  $n$ -м подшипнике.

Используя выражение (3.82), запишем уравнения равновесия ротора на подшипниках с учетом отклонений формы и размеров при изготовлении:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} K_r & 0 & 0 & 0 & K_{x\beta} \\ 0 & K_r & 0 & -K_{x\beta} & 0 \\ 0 & 0 & K_z & 0 & 0 \\ 0 & -K_{x\beta} & 0 & K_\alpha & 0 \\ K_{x\beta} & 0 & 0 & 0 & K_\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \\ & = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z + \sum_{n=1}^M (-1)^{\bar{m}_n} P^{*n} Z^n \sin \alpha^{*n} \\ M_x \\ M_y \end{bmatrix} + \sum_{n=1}^M (-1)^{\bar{m}_n} \frac{3P^{*n}}{2\delta^{*n}} \begin{bmatrix} -\bar{D}_x^n \cos \alpha^{*n} \\ -\bar{D}_y^n \cos \alpha^{*n} \\ \bar{D}_z^n \sin \alpha^{*n} \\ \bar{D}_y^n l^n \\ -\bar{D}_x^n l^n \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Входящие в эти уравнения жесткости вычисляем по формулам (3.69), причем вторыми слагаемыми в правых частях (т. е. величинами, пропорциональными  $\delta^{*n}/v^{*n}$ ) следует пренебречь. Для ротора на одинаковых шариковых подшипниках уравнения равновесия можно записать в более простой форме:

$$\begin{bmatrix} K_r & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & K_\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \\ M_x \\ M_y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -(\bar{D}_x^1 + \bar{D}_x^2) \cos \alpha^* \\ -(\bar{D}_y^1 + \bar{D}_y^2) \cos \alpha^* \\ (\bar{D}_z^2 - \bar{D}_z^1) \sin \alpha^* \\ (\bar{D}_y^2 - \bar{D}_y^1) l \\ -(\bar{D}_x^2 - \bar{D}_x^1) l \end{bmatrix} \quad (3.85)$$

### 3.3. УЧЕТ УПРУГОСТИ ВАЛА ПРИ РАСЧЕТЕ ОСЕВОЙ И РАДИАЛЬНОЙ ЖЕСТКОСТЕЙ РОТОРА НА ДВУХ ШАРИКОВЫХ ПОДШИПНИКАХ

При наличии инерционной нагрузки происходит перемещение центра масс ротора, на которое влияют не только жесткости опор, но и деформируемость всего ротора. В связи с этим рассмотрим две задачи о перемещении центра масс ротора под действием осевой и радиальной перегрузок. Геометрия узла схематически представлена на рис. 3.10. Предположим, что до приложения нагрузки центр масс совпадает с центром симметрии ротора. Пусть опоры одинаковы [см. (3.70)] и имеют осевую, радиальную, угловую жесткости  $C_z$ ,  $C_r$ ,  $C_\alpha$  и перекрестные жесткости  $(-1)^{n+1} C_{x\beta}$ . Предположим, что маховик имеет массу  $M$  и площадь поперечного сечения, значительно превышающие массу и аналогичную площадь остальной части ротора. Это допущение позволяет свести распределенные инерционные нагрузки в точку  $O$  – центр маховика и рассматривать задачу об упругой деформации вала под действием такой сосредоточенной силы.

Пусть осевая перегрузка равна  $W_z$ . Тогда сила  $F_z = MW_z$ , приложенная в точке  $O$ , вызовет осевые перемещения точек ротора. Обозначим  $f(z)$  конечное положение точки с начальной координатой  $z$ . Тогда перемещение точки равно  $f(z) - z$ . В левой и правой опорах возникнут силы реакции  $F_{z1}$  и  $F_{z2}$ , причем

$$\begin{aligned} F_{z1} &= \pm F_z^* - C_z [f(-0,5l) + 0,5l]; \\ F_{z2} &= \mp F_z^* - C_z [f(0,5l) - 0,5l], \end{aligned} \quad (3.86)$$

где  $F_z^*$  – усилие осевого натяга. Верхний знак в этих формулах берется в том случае, если смещение ротора в положительном направлении оси  $Oz$  вызывает уменьшение осевого усилия в левой опоре ( $n = 1$ ) и увеличение в правой ( $n = 2$ ); в противном случае берется нижний знак. Если воспользоваться введенными ранее обозначениями, то этот знак такой же, как и знак числа  $-\operatorname{sgn}(\sin \alpha^{*1}) (-1)^{\bar{m}} \cdot [\operatorname{sgn}(x) - \operatorname{знак} \text{числа } x]$ .

Запишем условие равновесия

$$F_{z1} + F_{z2} + F_z = 0. \quad (3.87)$$

Отрезок  $dz$  после деформирования будет иметь длину  $df$ , а относительное удлинение  $\frac{df - dz}{dz} = \frac{df}{dz} - 1$ . По закону Гука, напряжение в точке  $z$

$$\sigma = E \left( \frac{df}{dz} - 1 \right), \quad (3.88)$$

где  $E$  – модуль упругости материала вала.

На каждом из участков  $[-0,5l], [0,5l]$  значение  $\sigma S(z)$  ( $S(z)$  – площадь поперечного сечения) должно быть постоянным и равным  $-F_{z1}$  на левом участке и  $F_{z2}$  – на правом. Таким образом, имеем соотношение

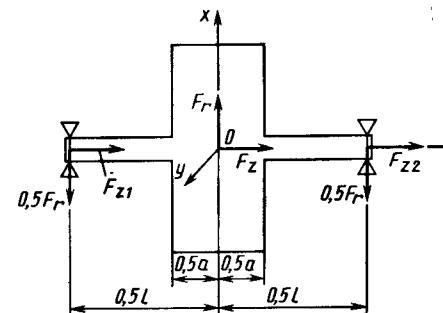


Рис. 3.10

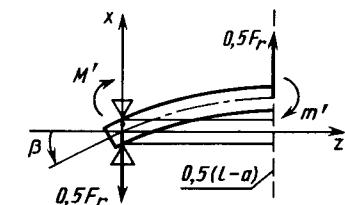


Рис. 3.11

$df/dz = 1 + F_{zn} (-1)^n / [ES(z)]$ , справедливо при  $n = 1$  для левого участка, при  $n = 2$  – для правого.

Проинтегрировав эти уравнения, находим

$$f(z) = z - \int_0^z \frac{F_{z1}}{ES(z)} dz + f(0), \quad -0,5l \leq z \leq 0; \quad (3.89)$$

$$f(z) = z + \int_0^z \frac{F_{z2}}{ES(z)} dz + f(0), \quad 0 \leq z \leq 0,5l.$$

Используя данные формулы и соотношения (3.86), получим

$$F_{z1} = [\pm F_z^* - C_z f(0)] / [1 + \frac{C_z}{E} \int_0^{0,5l} \frac{dz}{S(-z)}];$$

$$F_{z2} = [\mp F_z^* - C_z f(0)] / [1 + \frac{C_z}{E} \int_0^{0,5l} \frac{dz}{S(z)}].$$

Из условия равновесия (3.87) находим связь между  $F_z$  и  $f(0)$ :

$$F_z = 2f(0) \left[ \frac{1}{C_z} + \frac{1}{E} \int_0^{0,5l} \frac{dz}{S(z)} \right]^{-1}.$$

Следовательно, осевая жесткость узла

$$\tilde{K}_z = 2 \left[ \frac{1}{C_z} + \frac{1}{E} \int_0^{0,5l} \frac{dz}{S(z)} \right]^{-1}. \quad (3.90)$$

Пусть  $S(z) = S = \text{const}$  на части вала  $[0,5a, 0,5l]$ . Тогда

$$\tilde{K}_z \approx 2 [1/C_z + (l-a)/(2SE)]^{-1}. \quad (3.91)$$

Вычислим значение величины  $C_z(l-a)/(2ES)$ , определяющей относительную поправку к жесткости опоры, обусловленную упругостью вала. Параметры приборного узла:  $C_z = 2 \cdot 10^7 \text{ Н/м}$ ,  $(l-a)/2 = 2 \text{ см}$ ,  $E = 212 \text{ ГПа}$ , сечение вала – кольцо с

внешним радиусом 4 мм и внутренним 2 мм. Площадь поперечного сечения  $S = \pi[(4 \cdot 10^{-3})^2 - (2 \cdot 10^{-3})^2] = 3,77 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2$ ; относительное значение поправки

$$\frac{C_z(l-a)}{2SE} = \frac{2 \cdot 10^7 \cdot 2 \cdot 10^{-4}}{3,77 \cdot 10^{-5} \cdot 2,12 \cdot 10^{11}} = 5 \cdot 10^{-2}.$$

Следовательно, неучет упругости вала приводит к погрешности при определении жесткости, равной 5 %.

Пусть радиальная перегрузка равна  $W_r$ . Тогда сила, приложенная в точке  $O$ ,  $F_r = MW_r$ . Рассмотрим ротор как упругую балку известного поперечного сечения. Предположим, что  $m_n = 2$  ( $n = 1, 2$ ), т. е. на роторе закреплены внутренние кольца. Маховик вследствие большой площади поперечного сечения считаем абсолютно жестким, а части ротора, лежащие на отрезках  $[-0,5l, -0,5a]$  и  $[a/2, 0,5l]$  (см. рис. 3.10), — заделанными в точках  $z = \pm 0,5a$ . Введем систему координат, как показано на рис. 3.11, сдвинув начало в центр левой опоры. Под действием радиальной силы ротор получит в точке с координатой  $z$  прогиб  $f(z)$ . В опорах возникнут силы реакции, равные  $0,5F_r$ , и моменты  $M'$ . Рассмотрим левую часть балки. Со стороны отброшенной части действуют момент  $m'$  и сила  $0,5F_r$ . Уравнение равновесия моментов относительно опоры имеет вид

$$M' + m' - 0,25F_r(l-a) = 0. \quad (3.92)$$

Запишем уравнение изогнутой оси балки

$$\frac{d^2f}{dz^2} = \frac{0,25F_r(l-a) - m' - 0,5F_rz}{EJ},$$

где  $J$  — момент инерции сечения. Проинтегрировав это уравнение, с учетом  $\frac{df}{dz}|_{z=0,5(l-a)} = 0$  (поскольку крепление жесткое) получим

$$\frac{df}{dz} = \frac{1}{EJ} \left[ \frac{F_r}{4} \left( \frac{(l-a)^2}{4} - z^2 \right) - \left( \frac{F_r}{4}(l-a) - m' \right) \left( \frac{l-a}{2} - z \right) \right]. \quad (3.94)$$

При  $z = 0$  угол  $\beta$  перекоса колец в левом подшипнике

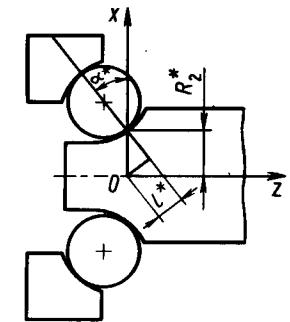
$$\beta = \frac{1}{EJ} \left[ \frac{F_r(l-a)^2}{16} - \left( \frac{F_r(l-a)}{4} - m' \right) \frac{l-a}{2} \right]. \quad (3.95)$$

Воспользовавшись первым и последним уравнениями (3.40) равновесия подшипника, при  $\delta_x = f(0)$ ,  $\delta_\beta = \beta$ ,  $M_y = M'$ ,  $F_x = 0,5F_r$ ,  $m = 2$  получаем

$$\begin{aligned} C_r f(0) + C_{x\beta} \beta &= 0,5F_r; \\ C_{x\beta} f(0) + C_\alpha \beta &= M'. \end{aligned} \quad (3.96)$$

Рассмотрим отдельно левую опору (рис. 3.12). Центр опоры (точка  $O$ ) находится на линии пересечения оси  $Oz$  и плоскости, проходящей через

Рис. 3.12



точки касания шариков с внутренним кольцом. Для вычисления жесткостей, входящих в уравнения (3.95), воспользуемся формулами

$$C_r = \frac{3P^*Z}{4\delta^*} \cos^2 \alpha^*; \quad C_\alpha = \frac{3P^*Z}{4\delta^*} l^{*2};$$

$$C_{x\beta} = \frac{3P^*Z}{4\delta^*} l^* \cos \alpha^*,$$

полученными из общих выражений (3.41) после отбрасывания вследствие малости величин порядка  $\delta^*/v^*$ . Для опоры, изображенной на рис. 3.12, угол контакта таков, что  $\sin \alpha^* > 0$  и  $z^* = -0,5p_7^0 \sin \alpha^*$ . Следовательно,  $l^* \equiv z^* \cos \alpha^* + R^* \sin \alpha^* = (R^* - 0,5p_7^0 \cos \alpha^*) \sin \alpha^* = R_2^* \sin \alpha^*$ , где  $R_2^*$  — радиус окружности, проходящей через точки касания шариков с внутренним кольцом.

Умножив первое уравнение системы (3.96) на  $-l^*/\cos \alpha^*$  и сложив со вторым, получим

$$-\frac{l^*F_r}{2\cos \alpha^*} + M' = 0; \quad C_r f(0) + C_{x\beta} \beta = \frac{F_r}{2}. \quad (3.97)$$

Решив уравнения (3.92), (3.95), (3.97), получим следующие формулы:

$$\begin{aligned} m' &= \frac{F_r}{4} (l-a) - \frac{l^*F_r}{2\cos \alpha^*} = \frac{F_r}{4} (l-a) - \frac{R_2^* F_r \operatorname{tg} \alpha^*}{2} ; \\ f(0) &= \frac{F_r}{2C_r} \left\{ 1 - \frac{C_{x\beta}}{EJ} \left[ \frac{(l-a)^2}{8} - \frac{R_2^* (l-a) \operatorname{tg} \alpha^*}{2} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.98)$$

Проинтегрировав уравнение (3.94) с использованием (3.98), получим смещение центра ротора

$$\begin{aligned} f\left(\frac{l}{2}\right) \equiv f\left(\frac{l-a}{2}\right) &= f(0) + \frac{F_r}{EJ} \left[ \frac{(l-a)^3}{48} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{R_2^* (l-a)^2 \operatorname{tg} \alpha^*}{16} \right] = \frac{F_r}{\tilde{K}_r}, \\ \frac{1}{\tilde{K}_r} &= \frac{1}{2C_r} + \frac{(l-a)^3}{48EJ} + \frac{R_2^{*2} (l-a) \operatorname{tg}^2 \alpha^*}{4EJ} - \frac{R_2^* (l-a)^2 \operatorname{tg} \alpha^*}{8EJ}. \end{aligned} \quad (3.99)$$

Определим сумму трех последних слагаемых для ротора, если:  $C_r = 2 \cdot 10^7 \text{ Н/м}$ ;

$l - a = 4$  см;  $E = 212$  ГПа;  $R_2^* = 4$  мм;  $\alpha^* = 30^\circ$ ; сечение вала – кольцо с внешним радиусом  $r_e = 4$  мм и внутренним  $r_i = 2$  мм:

$$J = \frac{\pi}{4} (r_e^4 - r_i^4) = \frac{3,14}{4} [(4 \cdot 10^{-3})^4 - (2 \cdot 10^{-3})^4] = 1,88 \cdot 10^{-10} \text{ м}^4;$$

$$\frac{(l-a)^3}{48EJ} = \frac{(4 \cdot 10^{-2})^3}{48 \cdot 39,86} = 3,35 \cdot 10^{-8} \text{ м/Н};$$

$$\frac{R_2^{*2} (l-a) \operatorname{tg}^2 \alpha^*}{4EJ} = \frac{(4 \cdot 10^{-3})^2 (0,577)^2 4 \cdot 10^{-2}}{4 \cdot 39,86} = 1,34 \cdot 10^{-9} \text{ м/Н};$$

$$\frac{R_2^{*2} (l-a)^2 \operatorname{tg} \alpha^*}{8EJ} = \frac{4 \cdot 10^{-3} (410^{-2})^2 0,577}{8 \cdot 39,86} = 1,16 \cdot 10^{-8} \text{ м/Н.}$$

Сумма двух последних слагаемых в формуле (3.99) равна  $3,35 \cdot 10^{-8} + 1,34 \times 10^{-9} = 1,16 \cdot 10^{-8} = 2,32 \cdot 10^{-8}$  м/Н, что в  $2,5 \cdot 10^{-8} / (2,32 \cdot 10^{-8}) = 1,08$  раза меньше по сравнению с первым слагаемым. Таким образом, жесткость вала при изгибе может быть сравнимой с радиальной жесткостью опор. Следовательно, при конструировании равножестких опор следует учитывать жесткость при изгибе.

### 3.4. РАСЧЕТ ПАРАМЕТРОВ КОНТАКТА ТОРЦА РОЛИКА С БОРТИКОМ КОЛЬЦА

При конструировании цилиндрических роликовых подшипников, работающих при комбинированном (радиальном и осевом) нагружении, возникает проблема восприятия осевой нагрузки. Если сделать торец и бортик плоскими, то при отсутствии перекосов контакт будет представлять собой область  $ABCDE$  (рис. 3.13). При равномерном распределении контактного давления максимальное давление совпало бы со средним

$$p = F_a'/S,$$

где  $F_a'$  – осевая сила, действующая на ролик;  $S$  – площадь области  $ABCDE$ . Однако в действительности давление распределено неравномерно, с локальными максимумами у границ луночки, а при малейшем перекосе область контакта превращается в точку (в одну из  $A, B, C, D, E$ ), и максимальное давление становится недопустимо большим. При этом в малой области контакта, расположенной вблизи одной из указанных точек (как правило,  $B$  или  $D$ ), возникают пластические деформации, край ролика режет кромку бортика, что приводит к исчезновению смазочного слоя. В результате происходит интенсивное изнашивание рабочих поверхностей торца и бортика.

Чтобы избежать этих нежелательных явлений и уменьшить давление в контакте, торец ролика делают сферическим, радиусом  $R_0$  (рис. 3.14, a), а бортик – наклонным с некоторым углом  $\delta$  от вала. Радиус торца и угол отвала должны быть такими, чтобы область контакта не выходила за контур  $ABCDE$ . Размеры области контакта будем рассчитывать по теории Герца (см. подразд. 2.1), предполагая с некоторой погрешностью, что при нахождении упругих перемещений бортик и ролик вблизи контакта можно считать полупространствами. Более того, так как кривизна торца во много раз больше кривизны бортика, область контакта будем считать кругом, радиус которого, в соответствии с формулой (2.17),

$$r_0 = \sqrt[3]{3F_a' R_0 / (2E')}, \quad (3.100)$$

где  $E' = E / (1 - \nu^2)$  – приведенный модуль упругости материала ролика и бортика;  $\nu$  – коэффициент Пуассона.

Если ролик расположен без перекосов относительно кольца (для определенности внутреннего), то координаты центра круга контакта  $x = 0$ ,  $y = y_0$  (см. рис. 3.13). Пренебрежем незначительными по сравнению с вы-

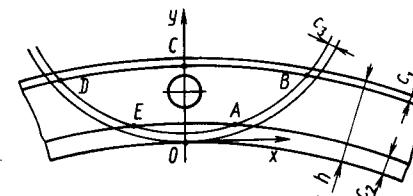


Рис. 3.13

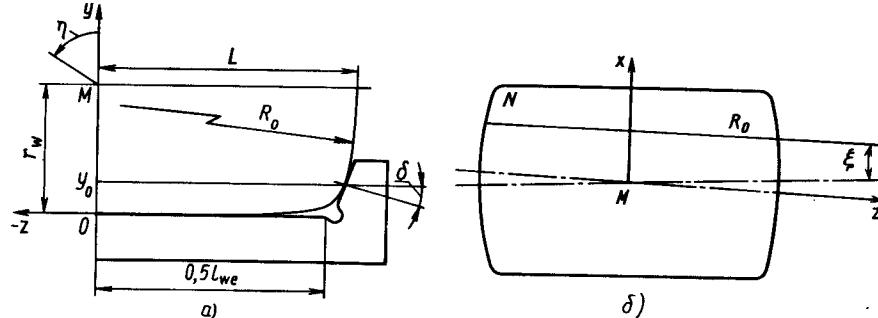


Рис. 3.14

сотой  $h$  бортика размерами фасок  $c_1$  на бортике и  $c_3$  на ролике, а также расстоянием  $c_2$  от верхней кромки канавки для выхода шлифовального круга до поверхности дорожки качения. Тогда с учетом  $2r_0 = h$  получаем формулу для расчета радиуса торца:

$$R_0 = E' h^3 / (12F'_a). \quad (3.101)$$

Учет перекосов и фасок приводит к существенному уменьшению  $R_0$ . Введем углы перекоса ролика  $\xi$  и  $\eta$  (рыскание и крен) в плоскостях  $Oxz$  и  $Oyz$  соответственно. При повороте ролика вокруг точки  $M$  (см. рис. 3.14, а) в положительном направлении (против часовой стрелки) на угол  $\eta$  центр сферической поверхности торца переместится вниз приблизительно на  $\eta R_0$  ( $R_0 \gg L$  – половины длины ролика). Тогда смещение центра круга контакта

$$\Delta_y = -\eta R_0. \quad (3.102)$$

При повороте ролика в положительном направлении на угол  $\xi$  (рис. 3.14, б) произвольно взятая точка  $N$  с абсциссой  $x$  переместится влево на  $\xi x$ . После перемещения этой точки в направлении  $Oz$  на расстояние

$$x^2 / (2R_0) + \Delta_z = \xi x, \quad (3.103)$$

( $\Delta_z$  – половина зазора по оси  $Oz$ ) ролик упирается в бортик. При выводе уравнения (3.103) полагали, что радиусы сечений сферы параллельными плоскостями, проходящими через центры сферы и круга контакта, близки по значению. При  $L \ll R_0$   $x \approx \xi R_0$ . Подставив  $x$  в (3.103), получаем формулы для максимально возможного угла рыскания

$$\xi_{\max} = \sqrt{2\Delta_z / R_0} \quad (3.104)$$

и для максимального смещения точки контакта по  $Ox$

$$\Delta_x = \sqrt{2\Delta_z R_0}. \quad (3.105)$$

Угол отвала конического бортика (см. рис. 3.14, а) определяем по формуле

$$\delta = (r_w - y_0) / R_0. \quad (3.106)$$

Выбор параметров торцевого контакта и формы ролика. Изложим метод В.П. Ковалева выбора радиуса  $R_0$  торца и угла  $\delta$  отвала бортика на примере вагонного подшипника 42726 модифицированной конструкции ВЗИИТ, предназначенного в основном для установки в вагонные буксы. Конструктивные, технологические и режимные параметры подшипника: радиус дорожки внутреннего кольца  $R_2 = 79$  мм, высота бортика  $h = 7,5$  мм,  $c_1 = 0,7$  мм,  $c_2 = 1,5$  мм,  $c_3 = 0$ ,  $F'_a = 2$  кН,  $\nu = 0,3$ ,  $E = 210$  ГПа,  $r_w = 16$  мм.

Рассмотрим два варианта контакта, отличающиеся зазором между бортиком и роликом по оси  $Oz$ :  $2\Delta_z = 70$  и 150 мкм.

При отсутствии перекосов точку контакта надо поместить на оси  $Oy$  посередине между точками  $O$  и  $C$  (см. рис. 3.13). Тогда  $R_0$  найдем по формуле (3.101), в которую вместо  $h$  следует подставить эффективную высоту бортика  $h_{\text{эфф}} = h - c_1 - c_2 = 5,3$  мм; получаем  $R_0 = 1,42$  м.

Пусть теперь угол  $\eta$  перекоса, измеряемый в радианах, изменяется от  $-2,2 \cdot 10^{-4}$  до  $2,2 \cdot 10^{-4}$ . На рис. 3.15 заштрихована область, внутрь которой не должен заходить круг контакта. Определив по формуле (3.105) при  $2\Delta_z = 150$  мкм  $\Delta_x = 14,6$  мм, убеждаемся, что точка контакта выходит за пределы незаштрихованной области. Следовательно, значение  $R_0 = 1,42$  м слишком велико, так как приводит к краевому контакту. Используем метод последовательных приближений. Положим  $y_0 = c_2 + h_{\text{эфф}}/2 = 4,05$  мм,  $R_0 = 400$  мм. Тогда по формуле (3.102)  $|\Delta_y| = 88$  мкм, а по формуле (3.105) при  $2\Delta_z = 150$  мм  $\Delta_x = 7,75$  мм. Построим (см. рис. 3.15) прямоугольник, ограниченный прямыми  $x = 0$ ,  $x = \Delta_x$ ,  $y = y_0 - |\Delta_y|$  и  $y = y_0 + |\Delta_y|$ . Проведем две окружности одинакового максимально возможного радиуса с центрами в правых вершинах прямоугольника. Нижняя окружность радиуса  $r_0 = 1,7$  мм касается нижней границы, в то время как расстояние от верхней окружности до верхней границы достаточно велико. Поэтому целесообразно увеличить  $y_0$  и  $R_0$ , взяв, например,  $y_0 = 4,5$ ,  $R_0 = 450$  мм. Тогда  $|\Delta_y| = 0,1$  мм,  $\Delta_x = 8,2$  мм. Построив соответствующий прямоугольник, видим, что  $r_0 = 1,8$  мм. Из формулы (3.101) получаем

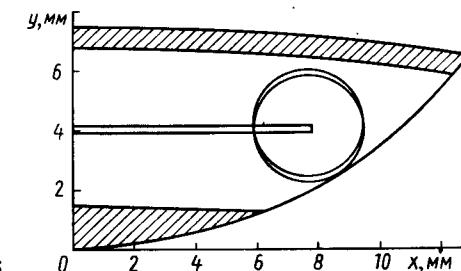


Рис. 3.15

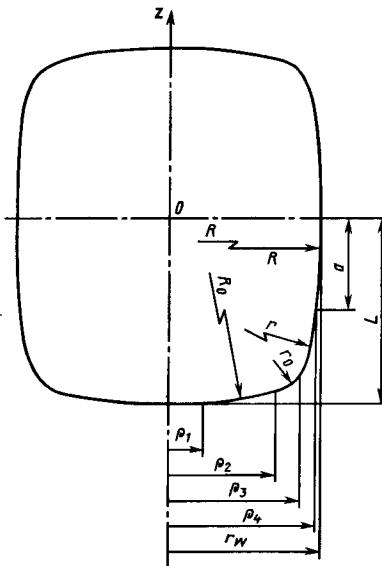


Рис. 3.16

$R_0 = 2E'r_0^3/(3F'_a) = 448$  мм, что мало отличается от ранее выбранного значения  $R_0$ . На этом процедуру подбора  $R_0$  заканчиваем. Угол отвала бортика находим по формуле (3.106) :  $\delta = 0,0256 \approx 1^\circ 28'$ .

Рациональное профилирование ролика. Пусть эффективная длина дорожки (см. рис. 3.14, а)  $l_{we} = 49$  мм (длина ролика 52 мм, по 1,5 мм занимает каждая канавка для выхода шлифовального круга). Тогда методом, изложенным в подразд. 2.2, выберем оптимальные параметры двухрадиусного меридиана — большой радиус  $R$ , малый радиус  $r$  и координату  $a$  точки сопряжения дуг. При радиальной нагрузке на ролик  $F_r' = 15$  кН и  $|\eta| \leq 2,2 \cdot 10^{-4}$  радиус  $R = 60$  м,  $r = 300$  мм,  $a = 21$  мм. Используя параметры торца и меридиана, можно указать рациональную форму ролика (рис. 3.16) (разработка Е.М. Филатовой), сечение которого плоскостью, проходящей через ось, представляет собой кривую, составленную из сопряженных дуг окружностей четырех различных радиусов  $R$ ,  $r$ ,  $r_0$ ,  $R_0$  и двух отрезков прямых. На торцах ролика имеются две плоские круговые области радиуса  $\rho_1$ ; фаска радиуса  $r_0$  может быть технологической. Для изготовления ролика необходимо дать количественное описание поверхности. Введем функцию

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Тогда в цилиндрической системе координат  $O\rho\varphi z$  уравнение поверхности ролика примет вид

$$|z| = L - \theta(\rho_2 - \rho)\theta(\rho - \rho_1)(\sqrt{R_0^2 - \rho_1^2} - \sqrt{R_0^2 - \rho^2}) - \theta(\rho_3 - \rho)\theta(\rho - \rho_2)\left\{\sqrt{R_0^2 - \rho_1^2} - \sqrt{R_0^2 - \rho_2^2} + r_0\sqrt{1 - (\rho_2/R_0)^2} - \sqrt{r_0^2 - [\rho - \rho_2(1 - r_0/R_0)]^2}\right\} - \theta(\rho_4 - \rho)\theta(\rho - \rho_3)\left\{\sqrt{2R(r_w - \rho_4)}[-1 + r/R - \sqrt{(r/R)^2 + r(\rho_4 - \rho)/[R(r_w - \rho_4)]}] + L\right\} - \theta(\rho - \rho_4)[L - \sqrt{2R(r_w - \rho)}], \quad (3.107)$$

где  $0 \leq \rho \leq r_w$ ;  $\rho_1, L, R_0, r, R, r_w, \rho_4$  заданы;  $\rho_3$  выбираем для обеспечения требуемого радиуса фаски, а  $r_0$  и  $\rho_2$  определяем из условий сопряжения фаски с окружностью радиуса  $R_0$ :

$$\rho_2 = [\rho_3 - r_0/\sqrt{1 + 2(\frac{r_w - \rho_4}{R} + \frac{\rho_4 - \rho_3}{r})}]/(1 - \frac{r_0}{R_0}); \quad (3.108)$$

$$r_0 \left[ \sqrt{1 - (\frac{\rho_2}{R_0})^2} - \sqrt{2(\frac{r_w - \rho_4}{R} + \frac{\rho_4 - \rho_3}{r})/[1 + 2(\frac{r_w - \rho_4}{R} + \frac{\rho_4 - \rho_3}{r})]} \right] = L - \sqrt{2R(r_w - \rho_4)}[1 - \frac{r}{R} + \sqrt{(\frac{r}{R})^2 + \frac{r}{R} - \frac{\rho_4 - \rho_3}{r_w - \rho_4}}]. \quad (3.109)$$

Для получения приближенного решения этих уравнений в (3.108) положим  $\rho_2 \approx \rho_3$ , что дает формулу для  $r_0$ ; затем определяем  $\rho_2$  по формуле (3.109). В рассматриваемом примере для вагонного подшипника 42726  $\rho_1 = 4$  мм;  $L = 52$  мм;  $R_0 = 450$  мм;  $r = 300$  мм;  $R = 60$  м;  $r_w = 16$  мм;  $\rho_4 = r_w - a^2/(2R) = 15996,3$  мкм;  $\rho_3 = 15970$  мкм;  $r_0 = 736$  мкм;  $\rho_2 = 15234$  мкм. Поскольку  $r_0/R_0 < 0,002$ ;  $\rho_2/R_0 = 0,032$ ;  $(\rho_2/R_0)^2 \approx 0,0009$ ;  $(r_w - \rho_4)/R < 10^{-7}$ ;  $(\rho_4 - \rho_3)/r < 10^{-4}$ , то соответствующими членами в (3.108) и (3.109) можно пренебречь. Тогда

$$r_0 \approx L - \sqrt{2R(r_w - \rho_4)} - \sqrt{2r(\rho_4 - \rho_3)};$$

$$\rho_2 \approx \rho_3 - r_0.$$

При других значениях параметров поверхности (3.107) для нахождения  $\rho_2$  и  $r_0$  могут потребоваться точные соотношения (3.108) и (3.109).

### 3.5. ТРЕНИЕ В ПОДШИПНИКАХ

Момент сопротивления вращению ротора — одна из важных количественных характеристик узла — складывается из моментов для отдельных подшипников, которые в свою очередь слагаются из составляющих момента, обусловленных трением шариков о кольца, закрепленные на роторе, и трением сепаратора о базу того же кольца (при базировании относительно колец). Трение шарика о кольцо определяется полем скорости в области контакта и толщиной пленки. Толщина пленки в контакте зависит от нагрузки или давления на контакт и скорости качения (которая в свою очередь определяется кинематикой шарика). Следовательно, задачу определения кинематики шарика, сепаратора, толщины пленки и задачу определения нагрузок необходимо рассматривать совместно.

Проведем аналитическое исследование, в котором сделаем ряд упрощающих предположений. Рассмотрим шариковый подшипник без отклонений формы и размеров, угловые скорости колец которого равны  $\Omega_m$  (рис. 3.17). Предположим, что решена задача определения толщины пленок и нагрузок в контактах, т. е. проведен силовой расчет подшипника в предположении идеальной кинематики шарика и без учета центробежной силы. Будем считать также, что отличие переменных  $\omega_c$ ,  $\omega_l$  от кинематических значений мало. Это отличие объясняется воздействием сепаратора, который вследствие трения о базу (при базировании относительно колец) тормозит движение шарика по окружности и замедляет его собственное вращение из-за трения в окне сепаратора, а также воздействием гироскопических моментов шарика, возникающих в результате регулярной прецессии вектора угловой скорости шарика.

Однако сила, с которой сепаратор воздействует на шарик, невелика. Кроме того, вязкость в контакте шарик — кольцо, вследствие ее экспоненциальной зависимости от давления, значительна, а толщина пленки мала. Последнее приводит к тому, что уже малые проскальзывания шарика о дорожки качения обуславливают большие силы трения. Поэтому воздействие сепаратора и гироскопических моментов вызывает лишь незначительные проскальзывания и кинематика шарика остается почти идеальной. Далее, силы трения, возникающие в контактах шарик — кольцо, шарик — сепаратор для подшипника, собранного с осевым натягом, пренебрежимо малы по сравнению с упругими силами.

Таким образом, задача определения кинематических переменных  $\omega_c$ ,  $\omega_l$ ,  $\omega_n$ ,  $\omega_\tau$  (см. рис. 3.17, 3.18) отделяется от задачи определения положения центра шарика, нагрузок и толщины пленок в контактах. Именно в такой упрощенной постановке, не теряющей тем не менее физического смысла, и будем решать задачу.

Пусть все шарики вследствие симметрии находятся в одинаковых условиях. Будем следить за движением одного из них, центр которого в данный момент лежит на оси  $Ox$ . Тогда вектор угловой скорости шарика при  $e_\tau = e_y$

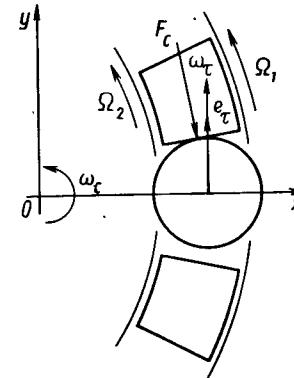


Рис. 3.17

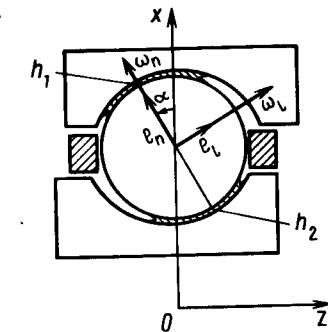


Рис. 3.18

$$\omega = \omega_\tau e_\tau + \omega_n e_n + \omega_l e_l,$$

где  $e_n = e_x \cos\alpha - e_z \sin\alpha$  — единичный вектор вдоль линии контактов;  $e_l = e_z \cos\alpha + e_x \sin\alpha$  — единичный вектор, перпендикулярный линии контактов, лежащий в плоскости  $Oxz$ ;  $e_x$ ,  $e_y$ ,  $e_z$  — единичные векторы системы координат  $Oxyz$ .

Поскольку составляющие угловой скорости  $\omega_n$ ,  $\omega_\tau$  и  $\omega_l$  не зависят от времени, то вектор угловой скорости шарика прецессирует вокруг оси  $Oz$ , а вектор угловой скорости этой прецессии равен  $\omega_c e_z$ . Уравнение момента импульса шарика имеет в этом случае вид

$$I \frac{d\omega}{dt} \equiv I[\omega_c e_z, \omega] = M, \quad (3.110)$$

где  $I = 8\pi\rho R^5/15 = 2m_b R^2/5$  — момент инерции шара радиусом  $R$  и массой  $m_b$ ;  $\rho$  — плотность материала шарика;  $M$  — момент сил относительно центра, действующих со стороны колец и сепаратора;  $[a, b]$  — векторное произведение векторов  $a$  и  $b$ . Представим последнее уравнение в проекциях на векторы  $e_x$ ,  $e_y$ ,  $e_z$ :

$$I\omega_c [e_z, (\omega_\tau e_y + \omega_n e_n + \omega_l e_l)] \equiv I\omega_c \omega_\tau [e_z, e_y] + I\omega_c \omega_n [e_z, e_n] + I\omega_c \omega_l [e_z, e_l] = M_x e_x + M_y e_y + M_z e_z.$$

Умножая полученное уравнение скалярно на единичные векторы  $e_n$ ,  $e_\tau$ ,  $e_l$ , образующие правую тройку, т. е.  $[e_\tau, e_l] = e_n$ , получим

$$-I\omega_c \omega_\tau \cos\alpha = M_x \cos\alpha - M_z \sin\alpha \equiv M_n;$$

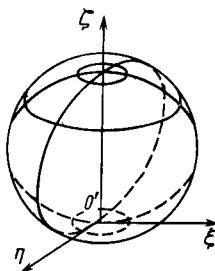


Рис. 3.19

$$I\omega_c(\omega_n \cos\alpha + \omega_l \sin\alpha) = M_y \equiv M_r; \quad (3.111)$$

$$-I\omega_c \omega_r \sin\alpha = M_x \sin\alpha + M_z \cos\alpha \equiv M_l,$$

где  $M_n, M_r, M_l$  — проекции момента сил, действующих на шарик, на векторы  $e_n, e_r, e_l$  базиса, соответствующего движению шарика.

Кроме того, вследствие равномерного движения шарика по окружности, проекции на вектор  $e_r$  сил, действующих на него со стороны сепаратора ( $F_{cr}$ ) и колец ( $F_{rr}$ ), должны быть уравновешены, т. е.

$$F_{rr} + F_{cr} = 0. \quad (3.112)$$

По соотношениям (3.111), (3.112) можно определить неизвестные кинематические переменные  $\omega_c, \omega_n, \omega_l, \omega_r$ .

Получим выражения для  $M_n, M_r, M_l, F_{rr}$ . Определим силу и момент, возникающие в контакте шарика с  $m$ -м колцом. Рассмотрим распределение скоростей скольжения на указанном контакте. Введем прямоугольную систему координат  $O'\eta\xi$ , которая связана в данный момент с контактом (рис. 3.19). Оси  $O'\eta, O'\xi, O'\zeta$  направим вдоль малой и большой осей эллиптической площадки контакта, а также по нормали к ней. Единичные векторы введенной системы координат  $e_\eta, e_\xi, e_\zeta$  связаны с векторами  $e_n, e_r, e_l$  соотношениями  $e_\eta = e_r, e_\xi = (-1)^m e_l, e_\zeta = (-1)^m e_n$  и образуют правую тройку:  $[e_\eta, e_\xi] = e_\zeta$ . Найдем распределение скоростей поверхности шарика и колца в области контакта. Для этого опишем геометрию поверхностей в контакте как без учета, так и с учетом деформации.

Радиус-вектор  $r$ , начало которого есть центр шарика, а конец — точка на его поверхности с координатами  $\xi, \eta$ , дается формулой

$$r = \left( -\frac{p_7^0}{2} + \delta_b + \frac{\xi^2}{2r_\xi^b} + \frac{\eta^2}{2r_\eta^b} \right) e_\zeta + \xi e_\xi + \eta e_\eta, \quad (3.113)$$

где  $r_\xi^b, r_\eta^b$  — радиусы кривизны поверхности деформированного шарика;  $\delta_b$  — упругая деформация шарика в центре контакта.

Найдем эти величины. Обозначив радиусы кривизны поверхности колца в центре контакта через  $r_\xi^0, r_\eta^0$ , запишем уравнения начальных форм поверхностей колца и шарика

$$\xi_r^0(\xi, \eta) = \frac{\xi^2}{2r_\xi^0} + \frac{\eta^2}{2r_\eta^0}; \quad \xi_b^0(\xi, \eta) = \frac{\xi^2 + \eta^2}{p_7^0},$$

Заметим, что  $r_\xi^0 > 0, r_\eta^0 > 0$  для наружного кольца и  $r_\xi^0 > 0, r_\eta^0 < 0$  для внутреннего кольца. Обозначим через  $r_\xi^r, r_\eta^r$  радиусы кривизны деформированной поверхности колца и зададим деформированные поверхности колца и шарика соответственно функциями

$$\xi_r(\xi, \eta) = \frac{\xi^2}{2r_\xi^0} + \frac{\eta^2}{2r_\eta^0} - \theta_r I = \frac{\xi^2}{2r_\xi^r} + \frac{\eta^2}{2r_\eta^r} - \delta_r; \quad (3.114)$$

$$\xi_b(\xi, \eta) = \frac{\xi^2 + \eta^2}{p_7^0} + \theta_b I = \frac{\xi^2}{2r_\xi^b} + \frac{\eta^2}{2r_\eta^b} + \delta_b, \quad (3.115)$$

где  $\theta_r, \theta_b$  — комбинации упругих констант материалов колца и шарика;  $\delta_r, \delta_b$  — упругие деформации колца и шарика в центре контакта (см. подразд. 2.1);

$$I = \iint_G \frac{p(\bar{\xi}, \bar{\eta}) d\bar{\xi} d\bar{\eta}}{\sqrt{(\xi - \bar{\xi})^2 + (\eta - \bar{\eta})^2}}.$$

Условие соприкосновения тел в каждой точке области контакта имеет вид  $\xi_b - \xi_r = \delta$ , где  $\delta$  — упругое сближение шарика с колцом. Таким образом,

$$\begin{aligned} (\theta_b + \theta_r) I &= \delta - \frac{\xi^2 + \eta^2}{p_7^0} + \frac{\xi^2}{2r_\xi^0} + \frac{\eta^2}{2r_\eta^0} = \delta + \xi^2 \left( -\frac{1}{p_7^0} + \frac{1}{2r_\xi^0} \right) + \\ &+ \eta^2 \left( -\frac{1}{p_7^0} + \frac{1}{2r_\eta^0} \right) \equiv \tilde{A}. \end{aligned}$$

Из этого соотношения определяем  $I$  и подставляем в формулы (3.114), (3.115):

$$\begin{aligned} -\delta_r + \frac{\xi^2}{2r_\xi^r} + \frac{\eta^2}{2r_\eta^r} &= \frac{\xi^2}{2r_\xi^0} + \frac{\eta^2}{2r_\eta^0} - \frac{\theta_r}{\theta_b + \theta_r} \tilde{A}; \\ \delta_b + \frac{\xi^2}{2r_\xi^b} + \frac{\eta^2}{2r_\eta^b} &= \frac{\xi^2 + \eta^2}{p_7^0} + \frac{\theta_b}{\theta_b + \theta_r} \tilde{A}. \end{aligned}$$

Из этих уравнений находим неизвестные параметры

$$\delta_r = \frac{\theta_r}{\theta_b + \theta_r} \delta, \quad \delta_b = \frac{\theta_b}{\theta_b + \theta_r} \delta;$$

$$\frac{1}{r'_\xi} = \frac{1}{r_\xi^0} + \frac{\theta_r}{\theta_b + \theta_r} \left( \frac{2}{p_7^0} - \frac{1}{r_\xi^0} \right) = \frac{1}{r'_\xi}; \quad (3.116)$$

$$\frac{1}{r'_\eta} = \frac{1}{r_\eta^0} + \frac{\tilde{\theta}_r}{\theta_b + \theta_r} \left( \frac{2}{p_7^0} - \frac{1}{r_\eta^0} \right) = \frac{1}{r'_\eta}.$$

Для большинства подшипников выполняются приближенные равенства

$$\frac{\theta_r}{\theta_b + \theta_r} \approx \frac{\theta_b}{\theta_b + \theta_r} \approx 0,5.$$

Вследствие высокой степени прилегания поверхностей шарика и кольца в направлении большой оси контакта

$$2/p_7^0 - 1/r_\xi^0 \ll 2/p_7^0,$$

поэтому кривизны деформированных поверхностей кольца и шарика вдоль оси  $O'\xi$  незначительно отличаются от начальных кривизн ( $1/r'_\xi = 1/r_\xi^b \approx 2/p_7^0$ ).

Воспользуемся выражением (3.113) и найдем распределение скоростей поверхности шарика на площадке контакта:

$$\mathbf{v}^b = \omega_c R^* \mathbf{e}_\tau + [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}] = \omega_c R^* \mathbf{e}_\eta + \begin{vmatrix} \mathbf{e}_\eta & \mathbf{e}_\xi & \mathbf{e}_\xi \\ \omega_\tau & (-1)^m \omega_l & (-1)^m \omega_n \\ \eta & \xi & -\frac{p_7^0}{2} + \delta_b + \frac{\xi^2}{2r_\xi^b} + \frac{\eta^2}{2r_\eta^b} \end{vmatrix}$$

Проекции скорости на плоскость  $O'\xi\eta$  вычисляем по формулам

$$v_\eta^b = \omega_c R^* - (-1)^m [\omega_n \xi + \omega_l (\frac{p_7^0}{2} - \delta_b - \frac{\xi^2}{2r_\xi^b} - \frac{\eta^2}{2r_\eta^b})];$$

$$v_\xi^b = (-1)^m \omega_n \eta + \omega_\tau (\delta_b + \frac{p_7^0}{2r_\xi^b} + \frac{\xi^2}{2r_\eta^b}).$$

В последней формуле можно пренебречь слагаемыми в скобках, поскольку, как правило,  $\omega_\tau \ll \omega_n$  и полуось  $b$  площадки контакта вдоль  $O'\eta$  больше характерных значений  $\delta_b$ ,  $b^2/(2r_\eta^b)$ ,  $a^2/(2r_\xi^b)$ , где  $a, b$  – большая и малая полуоси контакта. Кроме того,  $b^2/(2r_\eta^b)$  – меньше  $a^2/(2r_\xi^b)$ . Используя формулы Герца (2.17) – (2.20), определим  $\delta_b$  и  $a^2/(2r_\xi^b)$ :

$$a = k_a \left( \frac{PR}{E'} \right)^{1/3} \approx 1,24 \left( \frac{PR\gamma^2}{E'} \right)^{1/3};$$

$$\delta_b = \frac{\theta_b}{\theta_b + \theta_r} \delta \approx 0,5 k_\delta \left( \frac{P^2}{RE'^2} \right)^{1/3} \approx 0,4 \left( \frac{P^2}{RE'^2\gamma^2} \right)^{1/3} \ln(4\gamma),$$

где  $R$  – приведенный радиус кривизны площадки контакта;  $\gamma$  – отношение полуосей площадки контакта.

Тогда

$$\frac{a^2}{2r_\xi^b \delta_b} \approx \frac{2R\gamma^2}{r_\xi^b \ln(4\gamma)} \gg 1.$$

Здесь использованы асимптотические формулы для коэффициентов вытянутой площадки контакта:

$$k_a = 1,2407\gamma^{2/3}, \quad k_b = 1,2407\gamma^{-1/3};$$

$$k_p = 0,31017\gamma^{-1/3}, \quad k_\delta = 0,76967\gamma^{-2/3} \ln(4\gamma);$$

поскольку  $R \gg r_\xi^b$ ,  $\gamma \gg 1$ .

Таким образом, проекции скорости поверхности шарика рассчитываем по формулам:

$$\begin{aligned} v_\xi^b &= (-1)^m \omega_n \eta + \omega_\tau \frac{p_7^0}{2}; \\ v_\eta^b &= \omega_c R^* - (-1)^m (\omega_n \xi + \omega_l \frac{p_7^0}{2} - \omega_l \frac{\xi^2}{2r_\xi^b}). \end{aligned} \quad (3.117)$$

Найдем скорость поверхности кольца в области контакта. Расстояние от центра контакта до оси подшипника равно  $R_m^*$  (без учета деформации кольца). Тогда скорость в этой точке равна  $\Omega_m R_m^* \mathbf{e}_\eta$ . Вектор угловой скорости кольца равен  $(-1)^m \Omega_m (-\mathbf{e}_\xi \sin \alpha + \mathbf{e}_\eta \cos \alpha)$ . Вектор  $\mathbf{r}$  с началом в центре контакта и концом на поверхности кольца с координатами  $\xi, \eta$

$$\mathbf{r} = \eta \mathbf{e}_\eta + \xi \mathbf{e}_\xi + \left( -\delta_r + \frac{\xi^2}{2r_\xi^r} + \frac{\eta^2}{2r_\eta^r} \right) \mathbf{e}_\xi.$$

Тогда скорость поверхности кольца

$$\mathbf{v}' = \Omega_m R_m^* \mathbf{e}_\eta + \begin{vmatrix} \mathbf{e}_\eta & \mathbf{e}_\xi & \mathbf{e}_\xi \\ 0 & (-1)^m \Omega_m \cos \alpha & -(-1)^m \Omega_m \sin \alpha \\ \eta & \xi & -\delta_r + \frac{\xi^2}{2r_\xi^r} + \frac{\eta^2}{2r_\eta^r} \end{vmatrix}.$$

Пренебрегая, как и выше,  $\delta_r$  и  $\eta^2/(2r_\eta^r)$ , получаем

$$v_\eta^r = \Omega_m R_m^* + \Omega_m (-1)^m (\xi \sin \alpha + \frac{\xi^2 \cos \alpha}{2r_\eta^r}) ;$$

$$v_\xi^r = -(-1)^m \Omega_m \eta \sin \alpha .$$

Таким образом, скорости скольжения поверхности шарика относительно поверхности кольца в области контакта распределяются в соответствии с соотношениями:

$$\Delta v_\xi = \Delta v_\xi^0 + \omega_{mn} \eta ;$$

$$\Delta v_\eta = \Delta v_\eta^0 - \omega_{mn} \xi + \frac{\omega_{ml} \xi^2}{p_7^0} , \quad (3.118)$$

где

$$\Delta v_\xi^0 = \omega_\tau \frac{p_7^0}{2} , \quad \Delta v_\eta^0 = \omega_c R^* - \Omega_m R_m^* - (-1)^m \frac{p_7^0 \omega_l}{2} =$$

$$= (\omega_c - \omega_c^*) R^* - (-1)^m \frac{p_7^0}{2} (\omega_l - \omega_l^*)$$

проскальзывание в центре контакта;  $\omega_c^*$ ,  $\omega_l^*$  – кинематические значения  $\omega_c$  и  $\omega_l$ , т. е. такие, при которых скольжения в центрах контактов равны нулю;  $\omega_{mn} = (-1)^m (\omega_n + \Omega_m \sin \alpha)$ ,  $\omega_{ml} = (-1)^m (\omega_l - \Omega_m \cos \alpha)$  – проекции угловой скорости шарика относительно  $m$ -го кольца соответственно на векторы  $e_n$  и  $e_l$ .

Третье слагаемое во второй формуле (3.118), так называемое дифференциальное проскальзывание, обусловлено кривизной контактирующих тел в плоскости, перпендикулярной скорости центра шарика. Составляющая  $\Delta v_\eta$  скорости проскальзывания обращается в нуль в точках с координатами

$$\xi_{12} = \frac{\omega_{mn} p_7^0 \pm \sqrt{\omega_{mn}^2 (p_7^0)^2 - 4 \omega_{ml} p_7^0 \Delta v_\eta^0}}{2 \omega_{ml}} .$$

Такие точки существуют только при положительном значении подкоренного выражения. При  $\omega_{mn} = \omega_\tau = 0$ , как следует из первой формулы (3.118), на линиях  $\xi = \xi_1$ ,  $\xi = \xi_2$  скорость проскальзывания равна нулю.

Распределение скоростей проскальзывания в соответствии с (3.118) вызовет касательные напряжения  $\tau = \tau_\xi e_\xi + \tau_\eta e_\eta$  на поверхности шарика. Эти напряжения следует рассчитывать на основании термогидродинамической теории смазки, т. е. с учетом тепловых явлений в тонком слое смазочного материала. Кроме того, высокие контактные давления и малое время

пребывания частицы в контакте приводят к тому, что смазочный материал приобретает свойства, отличающие его от обычных жидкостей, для которых справедлива линейная связь между касательным напряжением и производной скорости поперек слоя, а именно проявляются релаксационные свойства, т. е. при данной скорости сдвига напряжение устанавливается не мгновенно, а, как правило, зависит от времени по экспоненциальному закону. Вязкость жидкости зависит от давления и температуры, и погрешность в оценке реальной температуры в области контакта, например на 10 К, может привести к занижению значения вязкости и, следовательно, сдвиговых напряжений на 30 . . . 40 %. Следует также учитывать снижение пьезокоэффициента вязкости при повышении температуры. Для правильного определения температуры необходимо учитывать разогрев смазочного материала в области контакта вследствие выделения теплоты.

Будем считать, что зависимость вязкости от давления и температуры описывается формулой, учитывающей уменьшение пьезокоэффициента при повышении температуры:

$$\mu(p, T) = \mu_0 \exp \left\{ [\alpha_p - \kappa(T - T_0)] p - \delta'(T - T_0) \right\} , \quad (3.119)$$

где  $\mu_0 = \mu(0, T_0)$ .

В соответствии с термогидродинамической теорией смазки, с учетом прогрева смазочной пленки найдем распределение касательных напряжений в контакте. Примем вектор касательного напряжения постоянным в попечном направлении пленки и коллинеарным вектору скорости проскальзывания:

$$\tau_\xi = -\Lambda \mu(p, T) \frac{\Delta v_\xi}{h} , \quad \tau_\eta = -\Lambda \mu(p, T) \frac{\Delta v_\eta}{h} . \quad (3.120)$$

Здесь  $h$  – локальная толщина пленки (которая, как мы считаем, постоянна в контакте), а  $\Lambda$  – коэффициент, вычисляемый по формуле

$$\Lambda = \frac{\operatorname{arsh} \Lambda_0}{\Lambda_0 \sqrt{1 + \Lambda_0^2}} ;$$

$$\Lambda_0 = \sqrt{\frac{\mu(p, T) (\delta' + \kappa p)}{8 k_t}} \sqrt{(\Delta v_\xi)^2 + (\Delta v_\eta)^2} , \quad (3.121)$$

где  $k_t$  – теплопроводность смазочного материала;  $T$  – равные по значению температуры поверхностей контактирующих тел.

Отметим, что формулы (3.120) не учитывают релаксацию касательных напряжений. Зная распределение касательных напряжений, можно найти силу  $F$  и момент  $M$ , действующие на шарик:

$$F = \iint_G (\tau_\xi e_\xi + \tau_\eta e_\eta) d\xi d\eta ;$$

$$M = \iint_G \begin{vmatrix} e_\eta & e_\xi & e_\zeta \\ \eta & \xi & \frac{\xi^2}{p_7^0} \\ \tau_\eta & \tau_\xi & 0 \end{vmatrix} d\xi d\eta = e_\xi \iint_G (\tau_\xi \eta - \tau_\eta \xi) d\xi d\eta + \iint_G \frac{\xi^2}{p_7^0} (\tau_\eta e_\xi - \tau_\xi e_\eta) d\xi d\eta, \quad (3.122)$$

т. е. вычисляя указанные интегралы по области контакта  $G$ , которая является эллипсом с большой и малой полуосами  $a$  и  $b$ . При вычислении  $M$  мы вновь пренебрегли слагаемым  $\eta^2/(2r_7')$ . Распределение давления в контакте вычисляем по формуле

$$p(\xi, \eta) = p_0 \sqrt{1 - \xi^2/a^2 - \eta^2/b^2}.$$

Вследствие сложности подынтегральных функций в (3.122), для вычисления  $F$  и  $M$  получим приближенные формулы. Предположим вначале, что скорость проскальзывания настолько мала, что  $\Lambda_0 \ll 1$ . Тогда  $\operatorname{arsh} \Lambda_0 \approx \Lambda_0$ ,

$\sqrt{1 + \Lambda_0^2} \approx 1$  и  $\Lambda \approx 1$ . При  $\tilde{\alpha} = \alpha_p - \kappa(T - T_0)$ ,  $Q = \tilde{\alpha}/p_0$  получим

$$F = - \frac{\mu_0 \exp \{-\delta'(T - T_0)\}}{h} [e_\xi \iint_G \Delta v_\xi f(\xi, \eta) d\xi d\eta + e_\eta \iint_G \Delta v_\eta f(\xi, \eta) d\xi d\eta], \quad (3.123)$$

$$M = - \frac{\mu_0 \exp \{-\delta'(T - T_0)\}}{h} [e_\xi \iint_G (\Delta v_\xi \eta - \Delta v_\eta \xi) f(\xi, \eta) d\xi d\eta + \iint_G \frac{\Delta v_\eta e_\xi - \Delta v_\xi e_\eta}{p_7^0} \xi^2 f(\xi, \eta) d\xi d\eta], \quad (3.124)$$

где  $f(\xi, \eta) = \exp \{Q\sqrt{1 - \xi^2/a^2 - \eta^2/b^2}\}$ .

Подстановка вторых слагаемых в формулах (3.118) не влияет на значение  $F$  (3.123) вследствие антисимметричности подынтегральных выражений. По этой же причине подстановка первых слагаемых (3.118) в первый интеграл (3.124) не меняет значения  $M$ . При вычислении второго интеграла в (3.124) пренебрежем квадратом малой величины  $\xi/p_7^0$ . Учитывая все это, получим

$$F = - \frac{\mu_0 \exp \{-\delta'(T - T_0)\}}{h} [(\Delta v_\xi^0 e_\xi + \Delta v_\eta^0 e_\eta) \iint_G f(\xi, \eta) d\xi d\eta + e_\eta \frac{\omega_m l}{p_7^0} \iint_G \xi^2 f(\xi, \eta) d\xi d\eta];$$

$$M = - \frac{\mu_0 \exp \{-\delta'(T - T_0)\}}{h} [\omega_{mn} e_\zeta \iint_G (\xi^2 + \eta^2) f(\xi, \eta) d\xi d\eta + \frac{\Delta v_\eta^0 e_\xi - \Delta v_\xi^0 e_\eta}{p_7^0} \iint_G \xi^2 f(\xi, \eta) d\xi d\eta].$$

Проведем замену

$$\xi = \operatorname{arcos} \varphi; \eta = br \sin \varphi; d\xi d\eta = ab r dr d\varphi$$

и введем обозначения

$$\alpha_s(Q) = \frac{2}{Q^2} [e^Q (Q - 1) + 1]; \quad \alpha_r(Q) = 4 [e^Q (\frac{6}{Q^4} - \frac{6}{Q^3} + \frac{2}{Q^2}) + \frac{1}{Q^2} - \frac{6}{Q^4}];$$

$s = \pi ab$  — площадь контакта.

Тогда

$$\begin{aligned} \iint_G f(\xi, \eta) d\xi d\eta &= ab \int_0^1 dr \int_0^{2\pi} r \exp \{Q\sqrt{1 - r^2}\} d\varphi = \\ &= s \int_0^1 \exp \{Q\sqrt{1 - r^2}\} d(r^2) = s \alpha_s(Q); \\ \iint_G \frac{\xi^2}{\eta^2} f(\xi, \eta) d\xi d\eta &= ab \int_0^1 dr \int_0^{2\pi} r^3 \left[ \frac{a^2 \cos^2 \varphi}{b^2 \sin^2 \varphi} \right] \exp \{Q\sqrt{1 - r^2}\} d\varphi = \\ &= \frac{s}{2} \left[ \frac{a^2}{b^2} \right] \int_0^1 r^2 \exp \{Q\sqrt{1 - r^2}\} d(r^2) = \frac{s}{8} \left[ \frac{a^2}{b^2} \right] \alpha_r(Q). \end{aligned}$$

Теперь выражения для силы и момента примут вид

$$F = - \frac{\mu_0 \exp \{-\delta'(T - T_0)\}}{h} s [\alpha_s (\Delta v_\xi^0 e_\xi + \Delta v_\eta^0 e_\eta) + \frac{\omega_m l a^2}{p_7^0} \alpha_r e_\eta]; \quad (3.126)$$

$$M = - \frac{\mu_0 \exp \{-\delta'(T - T_0)\}}{8h} s \alpha_r [\omega_{mn} (a^2 + b^2) e_\zeta + \frac{\Delta v_\eta^0 e_\xi - \Delta v_\xi^0 e_\eta}{p_7^0} a^2]. \quad (3.127)$$

Из полученных формул следует, что в момент входят два слагаемых, обусловленных составляющей угловой скорости шарика, перпендикулярной области контакта, и дифференциальным проскальзыванием. При этом

$$\alpha_r \mu_0 \exp \left\{ -\delta'(T - T_0) \right\} = \alpha_r \mu(0, T)$$

представляет собой эффективную вязкость смазочного материала при  $\omega_n \neq 0$ . Если бы вязкость в области контакта не зависела от давления и была равна  $\alpha_r \mu(0, T)$ , то она обусловила бы момент, вычисляемый по формуле (3.127). Для доказательства этого утверждения достаточно показать, что при  $p_0 \rightarrow 0$  (когда значение давления на всем контакте стремится к нулю) коэффициент  $\alpha_r$  будет стремиться к единице. Но при  $p_0 \rightarrow 0$  параметр  $Q$  также стремится к нулю. Разложим  $\alpha_r(Q)$  в окрестности  $Q = 0$ :

$$\begin{aligned} \alpha_r(Q) &= 4 \left\{ [1 + Q + \frac{Q^2}{2} + \frac{Q^3}{6} + \frac{Q^4}{24} + O(Q^4)] \left( \frac{6}{Q^4} - \frac{6}{Q^3} + \frac{2}{Q^2} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{Q^2} - \frac{6}{Q^4} \right\} = 4 \left[ \frac{6}{Q^4} - \frac{6}{Q^3} + \frac{2}{Q^2} + \frac{6}{Q^3} - \frac{6}{Q^2} + \frac{2}{Q} + \frac{3}{Q^2} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{3}{Q} + 1 + \frac{1}{Q} - 1 + \frac{1}{4} + O(1) + \frac{1}{Q^2} - \frac{6}{Q^4} \right] = 1 + O(1). \end{aligned}$$

Таким образом,  $\lim_{Q \rightarrow 0} \alpha_r(Q) = 1$ . Аналогично можно показать, что  $\lim_{Q \rightarrow 0} \alpha_s(Q) = 1$ .

Величина  $\alpha_s \mu(0, T)$  представляет собой эффективную вязкость смазочного материала при чистом скольжении. В формулу (3.126) входят два слагаемых: первое — составляющая силы, обусловленная скольжением в центре контакта, второе — сила, пропорциональная угловой скорости качения, причиной возникновения которой является дифференциальное проскальзывание. Даже при чистом качении шарика по желобу кольца возникает сила трения качения [см. (3.126)].

Коэффициенты  $\alpha_r$  и  $\alpha_s$  характеризуют увеличение вязкости, обусловленное высокими контактными давлениями. Для подшипников характерно  $Q = 6 \dots 20$ . Коэффициенты  $\alpha_r$  и  $\alpha_s$  принимают в зависимости от параметра нагружения  $Q$  следующие значения:

$Q \dots$	6	8	10	12	15	20
$\alpha_r \dots$	52	250	1286	6970	94 535	$8,32 \cdot 10^6$
$\alpha_s \dots$	112	652	3965	24 865	406 811	$4,61 \cdot 10^9$

Экспоненциальная зависимость вязкости от давления приводит к изменению эффективной вязкости смазочного материала в контакте. Коэффициент  $\alpha_r$  для данного диапазона изменения  $Q$  примерно в  $2 \dots 7$  раз меньше  $\alpha_s$ . Указанные коэффициенты можно использовать лишь при весьма грубой оценке состояния смазочного материала в контакте, поскольку при получении формул (3.126), (3.127) мы предполагали, что скорости скольжения в контакте достаточно малы и  $\Lambda_0 \ll 1$ . При произвольном  $\Lambda_0$  аналитическое вычисление интегралов (3.122) с использованием нелинейной зависи-

мости (3.121) касательного напряжения от локальных скорости скольжения и давления невозможно, поэтому учтем указанную зависимость поправочным коэффициентом. Будем считать, что в формулах (3.120) для касательного напряжения коэффициент  $\Lambda$  постоянен и равен характерному значению на площадке контакта, вычисляемому по характерному значению  $\Lambda_0$ . Найдем среднее значение  $\bar{\Delta}_v^2$  квадрата локальной скорости проскальзывания, причем в формулах (3.118) примем  $\Delta v_\xi^0 = \Delta v_\eta^0 = \omega_{ml} = 0$ :

$$\begin{aligned} \bar{\Delta}_v^2 &= \frac{1}{s} \iint_G (\omega_{mn}^2 \eta^2 + \omega_{mn}^2 \xi^2) d\xi d\eta = \frac{\omega_{mn}^2 n}{s} \iint_G (\eta^2 + \xi^2) d\xi d\eta = \\ &= \frac{\omega_{mn}^2 n ab}{2s} \int_0^{2\pi} dr \int_0^r r^3 (a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi) d\varphi = \pi ab \frac{\omega_{mn}^2 n}{s} (a^2 + b^2) \int_0^r r^3 dr = \\ &= \frac{\omega_{mn}^2 n (a^2 + b^2)}{4}. \end{aligned}$$

Вычислим средние значения  $\delta' + kp_0$  и  $\sqrt{\mu(p, T)}$ :

$$\begin{aligned} &\frac{1}{s} \iint_G [\delta' + kp_0 (1 - \frac{\xi^2}{a^2} - \frac{\eta^2}{b^2})^{1/2}] d\xi d\eta = \\ &= 2 \int_0^r (\delta' + kp_0 \sqrt{1 - r^2}) dr = 2 \left[ \frac{\delta'}{2} + \frac{k}{2} p_0 \int_0^r \sqrt{1 - r^2} dr^2 \right] = \\ &= \delta' + \frac{2kp_0}{3}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{s} \iint_G \sqrt{\mu(p, T)} d\xi d\eta = \frac{\mu_0^{1/2} \exp \left\{ -\delta'(T - T_0)/2 \right\}}{s} \times \\ &\times \int_0^r \exp \left\{ \frac{1}{2} \tilde{\alpha} p_0 \sqrt{1 - \frac{\xi^2}{a^2} - \frac{\eta^2}{b^2}} \right\} d\xi d\eta = \mu_0^{1/2} \exp \left\{ \frac{-\delta'(T - T_0)}{2} \right\} \times \\ &\times \int_0^r \exp \left\{ \frac{Q \sqrt{1 - r^2}}{2} \right\} dr^2 = \mu_0^{1/2} \exp \left\{ \frac{-\delta'(T - T_0)}{2} \right\} \alpha_s \left( \frac{Q}{2} \right). \end{aligned}$$

Таким образом, характерное значение  $\Lambda_0 m$  в контакте

$$\begin{aligned} \bar{\Lambda}_{0m} &= \frac{1}{4} |\omega_{mn}| \alpha_s \left( \frac{Q}{2} \right) \sqrt{a_m^2 + b_m^2} \left[ \frac{\mu_0}{2k_t} \exp \left\{ -\delta'(T - T_0) \right\} \right. \\ &\quad \left. \times \left( \delta' + \frac{2kp_0 m}{3} \right)^{1/2} \right]. \end{aligned} \tag{3.128}$$

Тогда поправочный коэффициент, учитывающий снижение касательных напряжений вследствие прогрева смазочной пленки,

$$k_{1m} = \frac{\operatorname{arsh} \bar{\Lambda}_{0m}}{\bar{\Lambda}_{0m} \sqrt{1 + \bar{\Lambda}_{0m}^2}}. \tag{3.129}$$

Таким образом, выражения для силы и момента принимают вид

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= -\frac{\mu_0}{h} \exp \left\{ -\delta'(T - T_0) \right\} k_{1m} s \left\{ \alpha_s (\Delta v_\xi^0 \mathbf{e}_\xi + \Delta v_\eta^0 \mathbf{e}_\eta) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\omega_m l a^2}{8 p_7^0} \alpha_r \mathbf{e}_r \right\}; \\ \mathbf{M} &= -\frac{\mu_0}{8 h} \exp \left\{ -\delta'(T - T_0) \right\} k_{1m} s \alpha_r \left\{ \omega_{mn} (a^2 + b^2) \mathbf{e}_\xi + \right. \\ &\quad \left. + \frac{a^2}{p_7^0} (\Delta v_\eta^0 \mathbf{e}_\xi - \Delta v_\xi^0 \mathbf{e}_\eta) \right\}, \end{aligned} \quad (3.130)$$

причем  $\Delta v_\xi^0$ ,  $\Delta v_\eta^0$  не обязательно равны нулю,  $\mu_{\text{эфф}} = \mu(0, T) k_{1m} \alpha_s$  — эффективная вязкость смазочного материала в контакте при чистом скольжении.

В полученных выражениях учтена лишь часть всей силы и всего момента, действующих на шарик, обусловленная локальным проскальзыванием в контакте. Мы считали, что распределение давления в контакте является эллиптическим. Фактическое давление отличается от контактного давления, определяемого по формуле Герца, вследствие наличия в контакте смазочной пленки переменной толщины. Это приводит к созданию результирующей силы, направленной против направления скорости качения, и момента относительно оси  $O'\xi$ , для определения которых (точнее, силы и момента, действующих на единицу длины) воспользуемся аппроксимационными формулами для указанных величин, полученными численным расчетом зластогидродинамического контакта двух цилиндров радиусами  $R_1$ ,  $R_2$  (рис. 3.20) при чистом качении со скоростью  $u$ . Тогда сила  $\mathbf{F}_1$  и момент  $\mathbf{M}_1$  (относительно начала координат), действующие на единицу длины цилиндра, в режиме обильного смазывания вычисляем по формулам

$$\mathbf{F}_1 = 3,01 E' R \frac{R_2 - R_1}{R_2 + R_1} \left( \frac{\mu(0, T) u}{\alpha E'^2 R} \right)^{0,54} \left( \frac{p'_0}{E'} \right)^{0,3} \mathbf{e}_\eta; \quad (3.131)$$

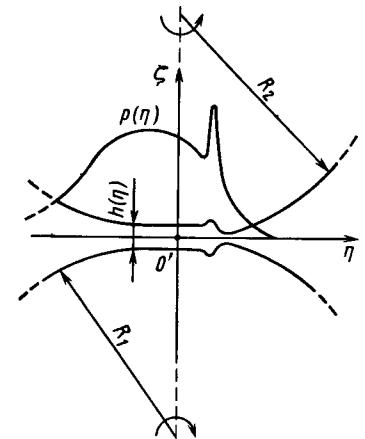
$$\mathbf{M}_1 = 6,02 E' R^2 \left( \frac{\mu(0, T) u}{\alpha E'^2 R} \right)^{0,54} \left( \frac{p'_0}{E'} \right)^{0,3} [\mathbf{e}_\eta, \mathbf{e}_\xi];$$

где

$$R = \left| \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \right|, \quad \frac{1}{E'} = \frac{1}{2} \left( \frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2} \right);$$

$p'_0$  — максимальное контактное давление. Скорость качения в этих формулах считаем направленной вдоль положительного направления оси  $O'\eta$ . Видно, что момент всегда действует в сторону, противоположную качению, сила же может оказаться направленной против вектора  $u$ , если  $(R_2 - R_1)/(R_2 + R_1) < 0$ . Последнее возможно в двух случаях: если цилиндр радиусом  $R_1$  внешним образом касается второго ци-

Рис. 3.20



линдра (именно этот вид касания изображен на рис. 3.20), при этом  $R_1, R_2 > 0$  и  $R_1 > R_2$ ; если цилиндр радиусом  $R_2$  внутренним образом касается цилиндра радиусом  $R_1$ , при этом  $R_2 > 0 > R_1$ ,  $|R_2| < |R_1|$ .

Предположим теперь, что область контакта, изображенная на рис. 3.20, представляет собой поперечное сечение вытянутого эллиптического контакта с большой полуосью  $a$ . Предположим также, что скорость и качения на всем контакте постоянна. В сечении плоскостью  $\xi = \text{const}$  силу и момент, действующие на единицу длины, вычисляем по формуле (3.131), причем  $p'_0$  (для линейного контакта) следует заменить на  $p_0 \sqrt{1 - (\xi/a)^2}$ , где  $p_0$  — максимальное давление в эллиптической области контакта, определяемое по формуле Герца. Величины  $R_2, R_1$  представляют собой радиусы кривизны контактирующих тел в плоскости  $O'\eta\xi$ . Интегрированием силы и момента, вычисляемых по формулам (3.131), вдоль большой оси контактного эллипса, получаем силу  $\mathbf{F}_k$  и момент  $\mathbf{M}_k$ , действующие на тело с поперечным радиусом  $R_1$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_k &= 5,53 a E' R k_h \frac{R_2 - R_1}{R_2 + R_1} \left( \frac{\mu(0, T) u}{\alpha E'^2 R} \right)^{0,54} \left( \frac{p_0}{E'} \right)^{0,3} \mathbf{e}_\eta; \\ \mathbf{M}_k &= 11,06 a E' R^2 k_h \left( \frac{\mu(0, T) u}{\alpha E'^2 R} \right)^{0,54} \left( \frac{p_0}{E'} \right)^{0,3} [\mathbf{e}_\eta, \mathbf{e}_\xi]. \end{aligned} \quad (3.132)$$

Коэффициент  $k_h$ , учитывающий наличие масляного голодания в контакте,

$$k_h = 0,74 \left( \frac{h_0}{h_\infty} \right)^{2,46} / \left( 1 - 0,26 \left( \frac{h_0}{h_\infty} \right)^{18} \right),$$

где  $h_0$  — фактическая толщина пленки в контакте;  $h_\infty$  — расчетное значение толщины при обильном смазывании.

В контакте шарика с кольцом с высокой точностью можно считать скорость и качения постоянной на всем эллипсе контакта и рассчитывать по формуле (3.16), предполагая кинематику идеальной. Можно использовать формулы

$$R_1 = \frac{p_7^0}{2}; \quad R_2 = \frac{(-1)^m R_m^*}{\cos \alpha}; \quad R = \left( \frac{2}{p_7^0} + \frac{(-1)^m \cos \alpha}{R_m^*} \right)^{-1},$$

подставляя вместо  $p_0$  максимальное значение давления  $p_{0m}$ , определяемое по формуле Герца. Таким образом, формулы (3.132) в применении к шариковому подшипнику дают значения силы и момента сопротивления качению, в первом приближении не зависящие от фактической кинематики шарика. Если обозначить эти величины (коэффициенты в формулах (3.132), стоящие перед векторами  $e_\eta$  и  $[e_\eta, e_\xi]$ ) через  $F_{km}$  и  $M_{km}$ , то результирующая сила и момент, действующие на шарик в контакте с  $m$ -м кольцом, определяются соотношениями:

$$\begin{aligned} F_m &= \frac{-\mu(0, T_m)}{h_m} k_{1m} s_m [\alpha_{sm} ((-1)^m \Delta v_{\xi m}^0 e_\tau + \Delta v_{\eta m}^0 e_\tau) + \\ &+ \frac{\omega_m l a_m^2}{8 p_i^0} \alpha_{rm} e_\tau] + (-1)^m F_{km} e_\tau \operatorname{sgn}(\Omega_2 - \Omega_1); \\ M'_m &= -\frac{\mu(0, T_m)}{8 h_m} k_{1m} s_m \alpha_{rm} [\omega_{mn} (-1)^m (a_m^2 + b_m^2) e_n + \\ &+ \frac{(-1)^m \Delta v_{\eta m}^0 e_l - \Delta v_{\xi m}^0 e_\tau}{p_i^0} a_m^2] - M_{km} \operatorname{sgn}(\Omega_2 - \Omega_1) e_l. \end{aligned} \quad (3.133)$$

Входящая в эти формулы функция  $\operatorname{sgn}(x)$  — знак числа  $x$ , т. е. направление действия силы и момента качения, возникающих вследствие несимметричного распределения давления в эластогидродинамическом контакте, зависит от знака  $\Omega_2 - \Omega_1$ . Рассмотрим качение шарика (см. рис. 3.17) по желобам колец. Пусть, например,  $\Omega_2 > \Omega_1$ . В этом случае шарик катится относительно наружного кольца против часовой стрелки, а относительно внутреннего — по часовой стрелке. Тогда сила трения качения, действующая на поверхности наружного кольца, направлена против, а действующая на поверхности внутреннего — по вектору  $e_\tau$ . Момент на каждом кольце имеет положительную составляющую, направленную вдоль оси  $Oz$  подшипника, т. е. вдоль вектора  $e_l$ . Аналогично и для  $\Omega_2 < \Omega_1$ . При  $\Omega_2 = \Omega_1$  качение отсутствует, а сила и момент равны нулю. Используя выражения (3.133), можно найти момент  $M_m$  относительно центра шарика [поскольку именно он входит в уравнения (3.111)]:

$$\begin{aligned} M_m &= M'_m - (-1)^m \frac{p_i^0}{2} [e_n, F_m] = -\frac{\mu(0, T_m)}{8 h_m} k_{1m} s_m \alpha_{rm} \times \\ &\times \left\{ (-1)^m (a_m^2 + b_m^2) \omega_{mn} e_n + \frac{a_m^2}{p_i^0} [(-1)^m \Delta v_{\eta m}^0 e_l - \Delta v_{\xi m}^0 e_\tau] \right\} - \\ &- M_{km} \operatorname{sgn}(\Omega_2 - \Omega_1) e_l - (-1)^m \frac{p_i^0}{2} \left\langle \frac{\mu(0, T_m)}{h_m} \times \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\times k_{1m} s_m \alpha_{sm} [(-1)^{m+1} \Delta v_{\xi m}^0 e_\tau + \Delta v_{\eta m}^0 e_l] + \frac{\omega_m l a_m^2}{8 p_i^0} \alpha_{rm} e_l + \\ &+ (-1)^m F_{km} \operatorname{sgn}(\Omega_2 - \Omega_1) e_l. \end{aligned}$$

Используя формулы (3.133), можно вычислить момент сопротивления вращению  $m$ -го кольца. Предположим, что сепаратор базируется относительно колец и моменты трения, действующие на сепаратор со стороны каждого из колец, равны  $M_{sr}^m e_z$ . Тогда можно определить силу  $F_{ct}$ , действующую на шарик со стороны сепаратора. Поскольку сепаратор вращается с постоянной угловой скоростью, то из условия равенства моментов получаем

$$(M_{sr}^1 + M_{sr}^2) e_z - ZR^* F_{ct} [e_x, e_\tau] = 0.$$

Отсюда

$$F_{ct} = \frac{M_{sr}^1 + M_{sr}^2}{ZR^*}.$$

Если базирование осуществляется относительно одного из колец, скажем наружного (внутреннего), то  $M_{sr}^2 = 0$  ( $M_{sr}^1 = 0$ ).

Момент сопротивления вращению  $m$ -го кольца обозначим через  $M_{rot}^m e_z$ . Очевидно,  $-(M_{rot}^1 + M_{rot}^2) e_z$  представляет собой суммарный момент сил относительно оси  $Oz$ , действующий на систему «сепаратор + шарики». Но поскольку момент импульса этой системы не меняется, то  $M_{rot}^1 = -M_{rot}^2 = M_{rot}$ . Тогда, используя выражения (3.133) для силы и момента (относительно центра контакта), действующих на шарик, можно, просуммировав моменты, действующие на кольцо по всем контактам, а также учитя момент со стороны сепаратора, получить выражение

$$\begin{aligned} M_{rot} &= -M_{sr}^1 + Z \operatorname{sgn}(\Omega_2 - \Omega_1) (M_{k1} \cos \alpha + F_{k1} R_1^*) + Z \frac{\mu(0, T_1)}{h_1} k_{11} s_1 \times \\ &\times \left\{ R_1^* [(\omega_c - \omega_c^*) R^* + \frac{p_i^0}{2} (\omega_l - \omega_l^*)] \alpha_{s1} - R_1^* \frac{a_1^2}{8 p_i^0} \alpha_{r1} \times \right. \\ &\times (\omega_l - \Omega_1 \cos \alpha) - \left. \frac{\alpha_{r1} (a_1^2 + b_1^2)}{8} (\omega_n + \Omega_1 \sin \alpha) \sin \alpha \right\}. \end{aligned} \quad (3.134)$$

При получении этой формулы предполагали, что

$$\frac{\alpha_{r1} a_1^2 \cos \alpha}{4 p_i^0 \alpha_{s1} R_1^*} \ll 1.$$

Таким образом, для определения момента сопротивления вращению необходимо рассчитать кинематику шарика, решив систему уравнений

(3.111), (3.112), которая нелинейна по переменным  $\omega_c$ ,  $\omega_\tau$ ,  $\omega_l$ ,  $\omega_n$ . Действительно, в левую часть уравнений этой системы входят произведения переменных. Кроме того, в правых частях (3.111) имеются коэффициенты  $k_{1m}$ , учитывающие температурные эффекты в смазочной пленке и вычисляемые для каждого кольца по формулам (3.128), (3.129), причем в последнюю входит неизвестная величина  $|\omega_{mn}|$  – абсолютное значение составляющей угловой скорости, перпендикулярной области контакта шарика с  $m$ -м кольцом. Таким образом, в общем случае систему уравнений кинематики следует решать численно.

Для проведения аналитического исследования сделаем дополнительные предположения: пренебрежем величинами порядка  $|\omega_c - \omega_c^*|/\omega_c^*$  и  $|\omega_l - \omega_l^*|/\omega_l^*$ , при вычислении коэффициентов  $k_{1m}$  примем  $|\omega_{mn}| = |\Omega_2 - \Omega_1| |\sin\alpha|/2$ .

Первое предположение не вызывает сомнений в своей справедливости для большинства подшипников, работающих в нормальных условиях. Для приборных подшипников отличие  $\omega_c$  от  $\omega_c^*$ , по-видимому, не превышает 1 %. Второе предположение означает, что абсолютное значение составляющей угловой скорости, перпендикулярной области контакта колец, равное  $|(\Omega_2 - \Omega_1) \sin\alpha|$ , распределено поровну между областями контакта с наружным и внутренним кольцами. Это предположение несет в себе определенную погрешность, однако позволяет априори, не решая задачу, оценить значение коэффициентов  $R_{1m}$ .

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} \tilde{K}_m &= \frac{\mu(0, T_m)}{h_m} k_{1m} s_m; \\ V_m &= (\omega_c - \omega_c^*) R^* - (-1)^m \frac{p_7^0}{2} (\omega_l - \omega_l^*); \\ F_{gm} &= \tilde{K}_m \frac{a_m^2}{8 p_7^0} \alpha_{rm} (\omega_l^* - \Omega_m \cos\alpha); \\ \tilde{M}_k &= M_{k1} + M_{k2} + \frac{p_7^0}{2} (F_{k1} + F_{k2}); \\ \mu_{\text{эфф}}^m &= \mu(0, T_m) k_{1m} \alpha_{sm}. \end{aligned} \quad (3.135)$$

Величина  $\mu_{\text{эфф}}$  играет роль эффективной вязкости смазочного материала при скольжении с учетом тепловых эффектов.

Систему уравнений (3.111), (3.112) можно записать в виде

$$\sum_{m=1,2} \tilde{K}_m \alpha_{sm} V_m = F_{cr} + (F_{k2} - F_{k1}) \operatorname{sgn}(\Omega_2 - \Omega_1) + F_{g1} - F_{g2}; \quad (3.136)$$

$$\begin{aligned} \sum_{m=1,2} (-1)^m \tilde{K}_m \tilde{\alpha}_{sm} V_m &= \frac{2}{p_7^0} \tilde{M}_k \operatorname{sgn}(\Omega_2 - \Omega_1) - F_{g1} - F_{g2} - \\ &- \frac{2I\omega_c^* \sin\alpha}{p_7^0} \omega_\tau; \end{aligned} \quad (3.137)$$

$$\begin{aligned} I\omega_c^* \omega_\tau \cos\alpha - \omega_n \sum_{m=1,2} \frac{\tilde{K}_m}{8} \alpha_{rm} (a_m^2 + b_m^2) &= \\ = \sum_{m=1,2} \frac{\tilde{K}_m}{8} \alpha_{rm} (a_m^2 + b_m^2) \Omega_m \sin\alpha; \end{aligned} \quad (3.138)$$

$$\omega_\tau \sum_{m=1,2} \tilde{K}_m \left( \frac{p_7^0}{2} \right)^2 \tilde{\alpha}_{sm} + I\omega_c^* \omega_n \cos\alpha = -I\omega_c^* \omega_l^* \sin\alpha; \quad (3.139)$$

$$\tilde{\alpha}_{sm} = \alpha_{sm} \left( 1 - \frac{\alpha_{rm}}{4\alpha_{sm}} \left( \frac{a_m}{p_7^0} \right)^2 \right) \approx \alpha_{sm}.$$

Из последних двух уравнений находим

$$\begin{aligned} \omega_\tau &= [ \left( \sum_{m=1,2} \frac{\tilde{K}_m}{8} \alpha_{rm} (a_m^2 + b_m^2) \Omega_m \sin\alpha \right) I\omega_c^* \cos\alpha - \\ &- \left( \sum_{m=1,2} \frac{\tilde{K}_m}{8} \alpha_{rm} (a_m^2 + b_m^2) \right) I\omega_c^* \omega_l^* \sin\alpha ] / A' = \\ &= \frac{I\omega_c^* \sin\alpha}{p_7^0} (\Omega_2 - \Omega_1) \sum_{m=1,2} \frac{\tilde{K}_m}{8} \alpha_{rm} (a_m^2 + b_m^2) \bar{R}_m^* / A'; \end{aligned} \quad (3.140)$$

$$\begin{aligned} \omega_n &= - \left[ \left[ \sum_{m=1,2} \frac{\tilde{K}_m}{8} \alpha_{rm} (a_m^2 + b_m^2) \Omega_m \sin\alpha \right] \sum_{m=1,2} \frac{\tilde{K}_m}{8} \left( \frac{p_7^0}{2} \right)^2 \alpha_{sm} + \right. \\ &\left. + I^2 \omega_c^{*2} \omega_l^* \sin\alpha \cos\alpha \right] / A', \end{aligned} \quad (3.141)$$

где  $\bar{R}_1^* = R_2^*$ ;  $\bar{R}_2^* = R_1^*$ .

$$A' = \left[ \sum_{m=1,2} \frac{\tilde{K}_m}{8} \alpha_{rm} (a_m^2 + b_m^2) \right] \sum_{m=1,2} \tilde{K}_m \left( \frac{p_7^0}{2} \right)^2 \alpha_{sm} + (I\omega_c^* \cos\alpha)^2.$$

Используя найденное значение  $\omega_\tau$ , из двух первых уравнений определим  $V_m$ :

$$V_1 = \frac{1}{2\tilde{K}_1 \alpha_{s1}} [F_{cr} + (F_{k2} - F_{k1} - \frac{2}{p_7^0} \tilde{M}_k) \operatorname{sgn}(\Omega_2 - \Omega_1) + 2F_{g1} + \frac{2I\omega_c^* \sin\alpha}{p_7^0} \omega_r]; \quad (3.142)$$

$$V_2 = \frac{1}{2\tilde{K}_2 \alpha_{s2}} [F_{cr} + (F_{k2} - F_{k1} + \frac{2}{p_7^0} \tilde{M}_k) \operatorname{sgn}(\Omega_2 - \Omega_1) - 2F_{g2} - \frac{2I\omega_c^* \sin\alpha}{p_7^0} \omega_r].$$

По известным  $V_1$ ,  $V_2$  из формул (3.135) находим

$$\omega_c - \omega_c^* = \frac{V_1 + V_2}{2R^*}; \quad \omega_l - \omega_l^* = \frac{V_1 - V_2}{p_7^0}.$$

Теперь можно записать выражение для момента сопротивления вращению:

$$M_{\text{rot}} = -M_{sr}^1 + Z \operatorname{sgn}(\Omega_2 - \Omega_1) (M_{k1} \cos\alpha + F_{k1} R_1^*) - Z R_1^* F_{g1} + \frac{Z R_1^*}{2} [F_{cr} + (F_{k2} - F_{k1} - \frac{2}{p_7^0} \tilde{M}_k) \operatorname{sgn}(\Omega_2 - \Omega_1) + \frac{2}{p_7^0} I\omega_c^* \sin\alpha \omega_r + 2F_{g1}] - Z \tilde{K}_1 \frac{\alpha_{r1}}{8} (a_1^2 + b_1^2) \sin\alpha (\omega_n + \Omega_1 \sin\alpha) \equiv M_1 + M_2 + M_3 + M_4, \quad (3.143)$$

где

$$M_1 = \frac{R_1^* M_{sr}^2 - R_2^* M_{sr}^1}{R_1^* + R_2^*}; \quad M_2 = -Z \frac{M_{k1} R_2^* + M_{k2} R_1^*}{p_7^0} \operatorname{sgn}(\Omega_2 - \Omega_1); \\ M_3 = -\frac{Z \tilde{K}_1 \alpha_{r1} (a_1^2 + b_1^2)}{8} \sin^2\alpha (\Omega_2 - \Omega_1) [(I\omega_c^*)^2 \frac{R_2^*}{p_7^0} \cos\alpha - \frac{\tilde{K}_2}{8} \alpha_{r2} (a_2^2 + b_2^2) \sum_{m=1,2} \tilde{K}_m (\frac{p_7^0}{2})^2 \alpha_{sm}] / A'; \quad (3.144)$$

$$M_4 = \frac{Z R_1^*}{(p_7^0)^2} (I\omega_c^* \sin\alpha)^2 (\Omega_2 - \Omega_1) \sum_{m=1,2} \frac{\tilde{K}_m}{8} \alpha_{rm} (a_m^2 + b_m^2) \bar{R}_m^* / A'.$$

Слагаемое  $M_1$  обусловлено силами базирования,  $M_2$  – моментами качения шарика по дорожкам, вызванными несимметричностью распределения давления в контактах,  $M_3$  обусловлено составляющей  $\omega_n$  угловой скорости шарика,  $M_4$  – составляющей  $\omega_r$ . Если момент инерции шарика пренебрежимо мал (как, например, в приборных подшипниках), то слагаемым  $M_4$  можно пренебречь, а слагаемое  $M_3$  при  $I = 0$  принимает более простой вид

$$M_3 = Z(\Omega_2 - \Omega_1) \sin^2\alpha \left[ \sum_{m=1,2} \frac{8}{\tilde{K}_m \alpha_{rm} (a_m^2 + b_m^2)} \right]^{-1}.$$

Слагаемые  $M_2$ ,  $M_3$ ,  $M_4$  можно рассчитать по формулам (3.144), момент же  $M_1$ , обусловленный силами базирования, возникающими в области контакта сепаратор – кольцо, оценить сложнее. Характер и значение этих сил определяющим образом зависят от количества смазочного материала и режима движения сепаратора. Обычно при расчете кинематики шариков и момента сопротивления вращению предполагают, что сепаратор занимает центральное положение, а момент сил базирования вычисляют по формуле И.П. Петрова

$$M_{sr}^m = \frac{2\pi\mu R_s^3 b_s}{\Delta} (\Omega_m - \omega_c),$$

где  $R_s$  – радиус базы сепаратора;  $b_s$  – ширина базового пояска;  $\Delta$  – радиальный зазор базирования;  $\mu$  – вязкость смазочного материала.

Однако допущение о центральном положении сепаратора часто оказывается неверным, поскольку такое положение неустойчиво и сепаратор совершают сложное движение под действием сил со стороны шариков. Следовательно, априори, не решая задачи о движении сепаратора, невозможно оценить момент базирования. Иногда значение  $M_1$  можно определить экспериментально. Представим весь момент сопротивления в виде суммы

$$M_{\text{rot}}(Z) = M_1 + Z M_b, \quad (3.145)$$

где  $M_b$  – момент, обусловленный движением одного шарика.

Тогда для комплекта без одного шарика получим

$$M_{\text{rot}}(Z-1) = M_1 + (Z-1) M_b.$$

Умножив соотношение (3.145) на  $Z-1$  и вычтя из него выражение для  $M_{\text{rot}}(Z-1)$ , умноженное на  $Z$ , имеем

$$M_1 = Z M_{\text{rot}}(Z-1) - (Z-1) M_{\text{rot}}(Z). \quad (3.146)$$

Наглядный геометрический смысл формулы (3.146) состоит в следующем. Измеряем два значения момента сопротивления при двух значениях

$Z$  и по этим двум точкам проводим линейную экстраполяцию на нулевое число шариков. Полученное значение и считаем равным моменту  $M_1$ , обусловленному силами базирования. Данный метод, предложенный А.В. Баузром, требует экспериментальной проверки. Действительно, соотношение (3.145) не является очевидным. Так, если в комплекте, содержащем, скажем, семь шариков, оставить всего три (при меньшем числе шариков кольца смогут совершать неограниченные радиальные перемещения одно относительно другого), то это может привести к радикальному изменению режима движения сепаратора, а следовательно, и значения  $M_1$  – момента, обусловленного базированием. Правильность формулы (3.145) можно проверить, определив значение  $M_{\text{rot}}$  при трех значениях  $Z : Z, Z - 1, Z - 2$ . Если полученные три точки лежат на одной прямой, то, по-видимому, формула (3.146) дает правильное значение  $M_1$ .

Опишем разработанный В.П. Ковалевым метод нахождения силы и момента, действующего на сепаратор. Перейдем в правую систему координат, в которой контакт неподвижен. Направим ось  $Oy$  к центру сепаратора перпендикулярно поверхностям сепаратора и кольца, ось  $Ox$  перпендикулярно оси  $Oy$  и оси колец, ось  $Oz$  параллельно оси колец. Предположим, что в контакте осуществляется гидродинамический режим смазки, а деформации поверхностей малы. Пусть  $R_s$  – радиус сепаратора,  $R_r$  – радиус кольца,  $b_s$  – ширина контакта по оси  $Oz$ . Будем считать, что течение смазочного материала одномерно, т. е. пренебрежем потоком вдоль оси  $Oz$ . Пусть толщины пленок на поверхностях на входе в контакт равны  $h_1$  и  $h_2$ . Толщина пленки

$$h(x) = (-1)^{m+1} \frac{x^2}{2} \left( \frac{1}{R_s} - \frac{1}{R_r} \right) + h_0,$$

где  $h_0 = h(0)$  – минимальная толщина.

Зададимся определенным режимом движения сепаратора. Предположим, что сепаратор касается базы и его центр совершает орбитальное движение по круговой траектории с радиусом  $\Delta$ , равным радиальному зазору базирования, при угловой скорости  $\omega_c^*$  так, что со стороны кольца на него действует сила, радиальная составляющая которой равна  $m_s \Delta (\omega_c^*)^2$ , где  $m_s$  – масса сепаратора.

Данный режим движения выбран не случайно. Как следует из эксперимента, он характерен для приборных подшипников.

Для отыскания распределения давления  $p(x)$  в области контакта воспользуемся уравнением

$$q = - \frac{1}{12\mu} h^3(x) \frac{dp}{dx} + uh, \quad (3.147)$$

где объемный расход смазочного материала в единицу времени  $q = u_1 h_1 + u_2 h_2$ ;  $u = (u_1 + u_2)/2$ ;  $u_1$  – скорость движения поверхности сепаратора;  $u_2$  – скорость движения поверхности кольца.

Пусть  $x_1$  и  $x_2$  – абсциссы входной и выходной границ контакта. Гра-

ническими условиями задачи являются условия равенства нулю давления и жидкости, т. е.

$$p(x_1) = p(x_2) = 0,$$

и кавитационное условие равенства нулю градиента давления на выходной границе

$$\frac{dp}{dx} \Big|_{x=x_2} = 0.$$

Перепишем уравнение (3.147):

$$\frac{dp}{dx} = 12\mu \frac{uh - q}{h^3}. \quad (3.148)$$

Отнесем линейные размеры вдоль оси  $Ox$  к характерной длине  $\sqrt{2R_s h_0}$ , где

$$\frac{1}{R_s} = (-1)^{m+1} \left( \frac{1}{R_s} - \frac{1}{R_r} \right).$$

Введем обозначения для безразмерных координат входной и выходной границ:

$$\xi_1 = \frac{x_1}{\sqrt{2R_s h_0}} ; \quad \xi_2 = \frac{x_2}{\sqrt{2R_s h_0}}.$$

В безразмерных координатах контактный зазор

$$h(\xi) = h_0 (1 + \xi^2).$$

Введем безразмерное давление  $\bar{p} = ph_0^2 / (12\mu |u| \sqrt{2R_s h_0})$ .

Уравнение (3.148) в новых переменных примет вид

$$\frac{d\bar{p}}{d\xi} = \frac{1 + \xi^2 - f_q}{(1 + \xi^2)^3} \operatorname{sgn} u,$$

где  $f_q = q/(uh_0)$ . Учитывая кавитационное граничное условие, получаем  $1 + \xi_2^2 = f_q$ . Таким образом, абсцисса выходной границы контакта определяется только расходом и минимальной толщиной пленки смазочного материала. Условие равенства нулю давления на границах контакта имеет вид

$$\int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{\xi^2 - \xi_2^2}{(1 + \xi^2)^3} d\xi = 0. \quad (3.149)$$

Это уравнение служит для определения абсциссы  $\xi_1$  входной границы контакта.

Таким образом, если задан режим движения сепаратора (т. е. заданы скорости  $u_1, u_2, u$ ), то, зная толщины пленок на каждой из поверхностей при входе в контакт, можно найти расход  $q$ , а по нему  $\xi_2 = \sqrt{q/(uh_0)} - 1$ . Из уравнения же (3.149) находим значение  $\xi_1$ . Однако это уравнение не имеет аналитического решения. В дальнейшем рассмотрим два предельных случая — обильное смазывание и масляное голодание, при которых удается найти приближенное решение уравнения (3.149).

Со стороны смазочной пленки на сепаратор действуют:

нормальная сила

$$P = (-1)^{m+1} b_s e_y \int_{x_1}^{x_2} p dx \operatorname{sgn}(x_2 - x_1); \quad (3.150)$$

момент относительно центра контакта

$$M = (-1)^{m+1} b_s e_z \int_{x_1}^{x_2} p dx \operatorname{sgn}(x_2 - x_1); \quad (3.151)$$

касательная сила

$$\begin{aligned} F &= e_x b_s [\mu(u_2 - u_1) \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{h(x)} + \frac{(-1)^m}{2} \left( \frac{1}{R_s} + \frac{1}{R_r} \right) \int_{x_1}^{x_2} p dx] X \\ &\times \operatorname{sgn}(x_2 - x_1). \end{aligned} \quad (3.152)$$

Используя введенные выше безразмерные величины, эти три формулы можно записать в виде

$$\frac{Ph_0}{\mu|u|R_{sr}b_s} = (-1)^{m+1} f_p(\xi_1, \xi_2) e_y; \quad (3.153)$$

$$\frac{Mh_0^{1/2}}{\mu|u|R_{sr}b_s} = 2(-1)^m f_m(\xi_1, \xi_2) e_z; \quad (3.154)$$

$$\frac{Fh_0^{1/2}}{\mu|u|R_{sr}b_s^{1/2}} = \left[ \frac{u_2 - u_1}{|u|} f_f(\xi_1, \xi_2) + \frac{R_r + R_s}{R_r - R_s} f_m(\xi_1, \xi_2) \right] e_x, \quad (3.155)$$

где

$$f_p = -24 \int_{\xi_1}^{\xi_2} \xi \frac{\xi^2 - \xi_2^2}{(1 + \xi^2)^3} d\xi; \quad f_f = \sqrt{2} \operatorname{sgn}(\xi_2 - \xi_1) \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{d\xi}{1 + \xi^2};$$

$$f_m = 6\sqrt{2} \int_{\xi_1}^{\xi_2} \xi^2 \frac{\xi^2 - \xi_2^2}{(1 + \xi^2)^3} d\xi. \quad (3.156)$$

Заметим, что  $\operatorname{sgn}(\xi_2 - \xi_1) = \operatorname{sgn}(x_2 - x_1) = \operatorname{sgn}u$ .

При обильном смазывании  $\xi_1 = -\infty$ . Из уравнения (3.149) численно найдено  $\xi_2 = 0,47513$ . Следовательно,  $f_q = q/(uh_0) = 1 + \xi_2^2 = 1,2257$ . По формуле  $q = 1,2257uh_0$  определяем максимальный расход смазочного материала за единицу времени. Значения коэффициентов

$$f_p \approx 4,89; \quad f_m \approx 4,6; \quad f_f \approx 2,85 \quad (3.157)$$

были найдены численным интегрированием (3.156).

При масляном голодании  $|\xi_1|, |\xi_2| \ll 1$ . Пренебрежем величиной  $\xi^2$  в знаменателе подынтегрального выражения в (3.149), тогда

$$\begin{aligned} \int_{\xi_1}^{\xi_2} (\xi^2 - \xi_2^2) d\xi &= \left( \frac{\xi^3}{3} - \xi_2^2 \xi \right) \Big|_{\xi_1}^{\xi_2} = \frac{1}{3} (\xi_2^3 - \xi_1^3) - \xi_2^2 (\xi_2 - \xi_1) = \\ &= -\frac{1}{3} (\xi_1 + 2\xi_2) (\xi_1 - \xi_2)^2. \end{aligned}$$

Приравняв это выражение к нулю, получим  $\xi_1 = -2\xi_2$ . Затем находим значения коэффициентов

$$f_f = 3\sqrt{2} |\xi_2|; \quad f_p = 54\xi_2^4; \quad f_m = \frac{108\sqrt{2}}{5} \xi_2^5. \quad (3.158)$$

Кроме того, поскольку  $|\xi_2| \ll 1$ , то

$$q/(uh_0) = 1 + \xi_2^2 \approx 1.$$

Предположим, что в контакте сепаратор — кольцо имеет место масляное голодание. Найдем скорости поверхностей в этом контакте. Переидем в такую движущуюся систему координат, в которой контакт неподвижен. Очевидно, эта система вращается с угловой скоростью  $\omega_c^*$  так, что центр сепаратора в ней фиксирован. Абсолютные скорости поверхностей кольца и сепаратора равны  $\Omega_m R_r$  ( $m$  — номер кольца, относительно которого осуществляется базирование) и  $\omega_c^* R$ , соответственно, а их скорости в системе, связанной с контактом,

$$u_2 = (\Omega_m - \omega_c^*) R_r; \quad u_1 = 0; \quad u = (\Omega_m - \omega_c^*) R_r / 2.$$

Поскольку центробежная сила, действующая на сепаратор, должна возникнуть со стороны смазочной пленки, то

$$m_s (\omega_c^*)^2 \Delta = 54 \frac{\mu|u|}{h_0} R_{sr} b_s \xi_2^4 = 54 \frac{\mu u^2}{|q|} R_{sr} b_s \xi_2^4.$$

Отсюда находим

$$\xi_2 = \left[ \frac{2m_s(\omega_c^*)^2 \Delta |q|}{27\mu R_{sr} b_s (\Omega_m - \omega_c^*)^2 R_f^2} \right]^{1/4}. \quad (3.159)$$

Вычислим момент сил со стороны базы относительно центра кольца

$$\begin{aligned} M_{sr}^m &= M - R_r [e_y, F] = 2(-1)^m f_m \frac{\mu |u| R_{sr}^{3/2} b_s}{h_0^{1/2}} e_z + \\ &+ (R_r \frac{u_2 - u_1}{|u|} f_f + R_r \frac{R_r + R_s}{R_r - R_s} f_m) \frac{\mu |u| R_{sr}^{1/2} b_s}{h_0^{1/2}} e_z = \\ &= \frac{\mu |u| R_{sr}^{1/2} b_s}{h_0^{1/2}} R_r (f_m + 2f_f \operatorname{sgn} u) e_z = \frac{\mu R_{sr}^{1/2} R_r^{5/2} b_s |\Omega_m - \omega_c^*|^{3/2}}{|q|} \times \\ &\times (f_m + 2f_f \operatorname{sgn} u) e_z. \end{aligned} \quad (3.160)$$

При получении формул (3.159), (3.160) использованы соотношения  $h_0 = |q/u|$ ,  $(u_2 - u_1)/u = 2$ . Поскольку  $f_m \sim \xi_2^5$ ,  $f_f \sim \xi_2$  и  $\xi_2 \ll 1$ , пренебрежем  $f_m$  в формуле (3.160). Кроме того, воспользуемся выражением (3.159). Получим

$$M_{sr}^m = 4,427 \left( \frac{\mu^3 R_{sr} R_f^8 b_s^3 (\omega_c^*)^2 m_s \Delta}{|q|} \right)^{1/4} (\Omega_m - \omega_c^*) e_z. \quad (3.161)$$

Таким образом, задавшись количеством смазочного материала на поверхности кольца, можно найти  $q$ , положив  $u_1 = 0$ , и, подставив полученное значение расхода в (3.161), определить момент, действующий со стороны базы. Использовав формулы (3.161) и (3.144), можно определить  $M_1$ .

Рассмотренный случай масляного голодания характерен для подшипников с ресурсным смазыванием. Для того чтобы узнать, реализуется ли данный режим смазки в конкретном подшипнике, следует, во-первых, экспериментально определить толщину пленки на базе кольца, во-вторых, вычислить расход  $q$  смазочного материала, в-третьих, рассчитать  $\xi_2$  по формуле (3.159). Если полученное значение мало, то в контакте реализуется скучное смазывание, и для вычисления момента можно пользоваться формулой (3.161).

Следует заметить, что гидродинамический характер контактирования (на чем были основаны все приведенные рассуждения) является предположением. Фактический режим смазки в контакте может оказаться значительно более сложным из-за шероховатости поверхностей сепаратора и кольца. Если толщина  $h_0$  пленки окажется меньше характерной высоты неровностей, то возможен контакт смешанного типа: на части поверхности будет

осуществляться гидродинамическое трение, а на оставшейся части — граничное или даже трение без смазочного материала.

Второе важное предположение касается режима движения сепаратора. При движении центра сепаратора по круговой орбите с угловой скоростью, равной скорости собственного вращения, точка контакта сепаратора с кольцом неподвижна относительно сепаратора. Такой тип движения не является единственным возможным. Однако, как показывают эксперименты, проведенные для приборного подшипника 106074 и численные расчеты динамики ротора на шариковых подшипниках, такая форма движения действительно реализуется в условиях скучного смазывания или кулоновского трения.

Отметим, что проведенное исследование кинематики и момента сопротивления подшипника можно обобщить для учета центробежной силы, действующей на шарик. Основной эффект центробежной силы сводится к изменению нагрузок и значений давления в контактах шарика с кольцами. Если считать, что угловая скорость шарика равна кинематической, а это предположение действительно выполняется с большой точностью, то можно, используя методы, изложенные в подразд. 2.2, определить изменение нагрузки на наружное (внутреннее) кольцо и рассчитать соответствующие значения максимального контактного давления, изменение которого приводит к изменению значений  $Q_m = \tilde{\alpha} p_{0m}$  [ $\tilde{\alpha} = \alpha_p - \kappa(T - T_0)$ ], а следовательно, и  $\alpha_{sm}$ ,  $\alpha_{rm}$ ,  $k_{1m}$ . Влияние же центробежной силы посредством изменения углов контакта менее значительно.

В заключение рассмотрим следующую задачу. Дан подшипник с шариками малой массы (например, приборный). Пренебрежем эффектами, обусловленными дифференциальным проскальзыванием и наличием пленки смазочного материала между шариком и сепаратором, в области контакта которых реализуется режим гидродинамической смазки, т. е. будем считать  $F_{gm} = F_{km} = M_{km} = 0$ ,  $m = 1, 2$ . Пусть на шарик действует только сила  $F_{ct}$  со стороны сепаратора и момент  $M_l$ . Тогда вследствие малой массы и момента инерции уравнения движения центра шарика и его собственного вращения сводятся к уравнениям равновесия сил и моментов. Действительно, если силы и моменты, приложенные к шарику, не уравновешены, то вследствие малости массы и момента инерции ускорение шарика и производная его угловой скорости должны быть очень велики, в пределе бесконечны. Очевидно, что это невозможно. Таким образом, уравнения движения можно записать в виде

$$\begin{aligned} \tilde{K}_1 \dot{\alpha}_{s1} V_1 + \tilde{K}_2 \alpha_{s2} V_2 &= F_{ct}; \\ \tilde{K}_2 \alpha_{s2} V_2 - \tilde{K}_1 \dot{\alpha}_{s1} V_1 &= -2M_l/p_0^0 \end{aligned} \quad (3.162)$$

[см. уравнения (3.136), (3.137)]. Используя связь (3.135)  $V_m$  с величинами  $\omega_c$ ,  $\omega_l$ , получаем

$$F_{c\tau} = (\tilde{K}_1 \alpha_{s1} + \tilde{K}_2 \alpha_{s2}) R^* (\omega_c - \omega_c^*) + (\tilde{K}_1 \alpha_{s1} - \tilde{K}_2 \alpha_{s2}) \frac{p_7^0}{2} (\omega_l - \omega_l^*);$$

$$M_l = (\tilde{K}_1 \alpha_{s1} - \tilde{K}_2 \alpha_{s2}) \frac{p_7^0 R^*}{2} (\omega_c - \omega_c^*) +$$

$$+ (\tilde{K}_1 \alpha_{s1} + \tilde{K}_2 \alpha_{s2}) \frac{p_7^{02}}{4} (\omega_l - \omega_l^*). \quad (3.163)$$

Таким образом, в легких подшипниках орбитальная сила и момент качения, приложенные к шарику, линейно связаны с отклонениями  $\omega_c$  и  $\omega_l$  от кинематических значений.

### 3.6. ДИНАМИКА РОТОРА НА ПОДШИПНИКАХ

Перейдем к исследованию движения ротора на шариковых подшипниках с учетом отклонений формы и размеров, обусловленных изготовлением. Анализ динамики основан на следующих предположениях.

1. Силы трения в контактах шарик – кольцо малы по сравнению с упругими силами, и ими можно пренебречь.

2. Движение комплекта шариков в каждом подшипнике задано, причем угловые скорости орбитального движения шариков в каждом подшипнике одинаковы и близки (или равны) кинематической скорости  $\omega_c^*$  (верхний индекс обозначает номер подшипника).

3. Траектория точки контакта на шарике – окружность наибольшего радиуса, причем смены траектории в процессе движения не происходит.

4. Жесткости  $K_n^n$ ,  $K_l^n$  [см. формулу (3.13)] таковы, что частоты собственных колебаний шарика в направлениях вдоль и поперек линии контакта достаточно велики и при рассмотрении можно пренебречь собственной динамикой шариков под действием упругих сил со стороны колец. Иными словами, будем предполагать равновесие шарика между кольцами.

Первое предположение выполняется для узлов, собранных с осевым натягом. При этом значительные нагрузки в контактах шарик – кольцо всегда превосходят силы трения в том же контакте, являющиеся следствием взаимодействия сепаратора с базой.

Второе предположение для узлов с осевым натягом также не вызывает сомнения, поскольку заметное отличие от кинематической скорости привело бы к проскальзываниям в контактах с дорожками качения и вследствие жесткой зависимости сил трения от проскальзывания [см. формулу (3.163)] – к значительным силам, действующим на шарик в окружном направлении. Эти силы нечем было бы уравновесить в нормальных условиях работы узла.

Из эксперимента известно, что в большинстве случаев траектория точки контакта на шарике действительно совпадает с окружностью большого радиуса. Однако вполне возможна ситуация, когда таких траекторий две или более и в процессе движения в случайные моменты времени происходит перескок с одной траектории на другую. Этому явлению в настоящее время нет удовлетворительного объяснения. По-видимому, указанный эффект – следствие неустойчивости вращения шарика на некоторых режимах работы подшипника.

Точность выполнения четвертого предположения можно оценить количественно. Пусть  $m_b$  – масса шарика. Тогда угловые частоты его собственных колебаний в направлениях вдоль и поперек линии контакта равны соответственно  $\sqrt{K_n^n/m_b}$ ,  $\sqrt{K_l^n/m_b}$ . Пусть  $\Omega$  – угловая скорость ротора. Тогда комплект шариков вращается относительно кольца, закрепленного на роторе (статоре), с угловой скоростью  $\Omega - \omega_c^{*n}$  ( $\omega_c^{*n}$ ). Упругие силы, действующие со стороны колец на шарик, обусловлены волнистостью. Если  $k$  – номер гармоники в разложении в ряд Фурье отклонений геомет-

рических параметров кольца [см. (3.1)], то угловая частота колебаний силы, обусловленной этой гармоникой, равна  $k(\Omega - \omega_c^{*n})$  и  $k\omega_c^{*n}$  при отклонениях формы и размеров кольца ротора и кольца статора соответственно. Кроме того, имеется составляющая упругой силы, обусловленная отклонением от сферической формы шарика. Так,  $k$ -я гармоника в разложении в ряд Фурье значения диаметра шарика приводит к силе, действующей с частотой  $2k\omega_7^{*n}$ , где  $\omega_7^{*n}$  — угловая скорость собственного вращения шарика в системе координат, врачающейся вместе с центром шарика так, что линия контактов в этой системе неподвижна. Величину  $\omega_7^{*n}$  получим, воспользовавшись выражением (3.14) для  $\omega_l$  и перейдя в указанную систему, угловые скорости колец статора и ротора в которой равны —  $\omega_c^{*n}$  и  $\Omega - \omega_c^{*n}$  соответственно. Тогда

$$\omega_7^{*n} = \frac{1}{p_7^0} [R_{\bar{m}_n}^*(\Omega - \omega_c^{*n}) + R_{\bar{m}_n}^* \omega_c^{*n}], \quad (3.164)$$

где  $\bar{m}_n$  ( $\tilde{m}_n$ ) — номер кольца, закрепленного на роторе (статоре).

Если выбрать  $k \leq 5$ , что почти всегда соответствует гармонике с наибольшей амплитудой, то четвертое предположение выполнимо только при

$$\min\left(\sqrt{\frac{K_n^n}{m_b}}, \sqrt{\frac{K_l^n}{m_b}}\right) \geq 5 \max(\omega_c^{*n}, \Omega - \omega_c^{*n}, 2\omega_7^{*n})$$

для любого  $n$ . Кроме того, даже гармоника с большим порядковым номером может возбудить колебание шарика в том случае, если обусловленная ею частота является резонансной. Поэтому для выполнения четвертого условия необходимо также, чтобы частоты  $\sqrt{K_n^n/m_b}$ ,  $\sqrt{K_l^n/m_b}$  не были кратны ни одной из частот  $\omega_c^{*n}$ ,  $\Omega - \omega_c^{*n}$ ,  $2\omega_7^{*n}$ .

Вследствие сделанных предположений действующие на ротор силы сводятся к упругим силам, действующим со стороны шариков. Последние же обладают потенциальной энергией, причем шарики между кольцами подшипников находятся в равновесии под действием упругих сил. Поэтому можно пользоваться выражениями для потенциальной энергии узла, полученными в подразд. 2.2.

Указанные выше предположения лежат в основе теории вибрации ротора на шарикоподшипниках, разработанной В.Ф. Журавлевым. Изложим основные результаты этой теории, относящиеся к ротору на двух одинаковых шариковых подшипниках (см. рис. 1.13) как наиболее распространенному узлу.

Обозначим  $A$ ,  $C$ ,  $M_r$  соответственно продольный, поперечный моменты инерции и массу ротора;  $\Omega_\xi$ ,  $\Omega_\eta$ ,  $\Omega_\zeta$  — проекции угловой скорости на оси, связанные с ротором [см. формулу (3.23)];  $x$ ,  $y$ ,  $z$  — координаты центра масс ротора в неподвижной системе;  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  — углы поворота ротора;  $F_x$ ,  $F_y$ ,  $F_z$  — внешние силы, приложенные к ротору, а  $Q_\alpha$ ,  $Q_\beta$ ,  $Q_\gamma$  — обобщен-

ные силы, выраженные через моменты внешних сил  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $M_z$ , действующих на ротор. Для  $Q_\alpha$ ,  $Q_\beta$ ,  $Q_\gamma$  были получены выражения (3.25).

Кинетическая энергия ротора

$$T = 0,5A\Omega_\xi^2 + 0,5C(\Omega_\eta^2 + \Omega_\zeta^2) + 0,5M_r(x^2 + y^2 + z^2) = \\ = 0,5A(\dot{\alpha}\sin\beta + \dot{\gamma})^2 + 0,5C(\dot{\alpha}^2\cos^2\beta + \dot{\beta}^2) + 0,5M(x^2 + y^2 + z^2). \quad (3.165)$$

Уравнения движения ротора (уравнения Лагранжа второго рода) записьем в виде

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} = Q_i, \quad (3.166)$$

где  $i = 1 \dots 6$ , а  $(q_i, Q_i)$  принимают последовательно значения  $(x, F_x)$ ,  $(y, F_y)$ ,  $(z, F_z)$ ,  $(\alpha, Q_\alpha)$ ,  $(\beta, Q_\beta)$ ,  $(\gamma, Q_\gamma)$ . В дальнейшем будем считать, что моменты сил, обусловленных отклонениями формы и размеров дорожек качения [см. (3.50)], и  $M_z$  настолько малы и (или) продольный момент инерции ротора настолько велик, что угловая скорость ротора постоянна ( $\gamma = \Omega$ ). В этом случае достаточно рассмотреть пять первых уравнений системы (3.166). Без учета слагаемых  $d/dt(\partial T/\partial \dot{q}_i) - \partial T/\partial q_i$  уравнения (3.166) совпадают с уравнениями статики ротора на двух подшипниках. Вычислим указанные слагаемые в четвертом и пятом уравнениях:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \alpha} &= \frac{d}{dt}[A\sin\beta(\dot{\alpha}\sin\beta + \Omega) + C\dot{\alpha}\cos^2\beta] \approx \\ &\approx A\dot{\beta}\Omega + C\ddot{\alpha}, \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\beta}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \beta} &= \frac{d}{dt}(C\dot{\beta}) - A\dot{\alpha}\cos\beta(\dot{\alpha}\sin\beta + \Omega) \approx -A\dot{\alpha}\Omega + C\ddot{\beta}. \end{aligned}$$

Здесь мы считали, как и ранее, что  $\alpha, \beta \ll 1$ , и пренебрегли вследствие малости членами квадратичными и более высокого порядка, обусловленными перекосами. Для описания движения ротора воспользуемся уравнениями статики (3.85), добавив к ним инерционные слагаемые

$$\begin{aligned} M_r\ddot{x} + K_r x &= -(-1)^{\bar{m}} \frac{K_r}{Z \cos\alpha^*} (\bar{D}_x^1 + \bar{D}_x^2) + F_x; \\ M_r\ddot{y} + K_r y &= -(-1)^{\bar{m}} \frac{K_r}{Z \cos\alpha^*} (\bar{D}_y^1 + \bar{D}_y^2) + F_y; \\ M_r\ddot{z} + K_z z &= (-1)^{\bar{m}} \frac{K_z}{2Z \sin\alpha^*} (\bar{D}_z^2 - \bar{D}_z^1) + F_z; \end{aligned} \quad (3.167)$$

$$C\ddot{\alpha} + H\dot{\beta} + K_\alpha \alpha = -(-1)^{\bar{m}} \frac{K_\alpha}{Zl} (\bar{D}_y^2 - \bar{D}_y^1) + M_x;$$

$$C\ddot{\beta} - H\dot{\alpha} + K_\alpha \beta = -(-1)^{\bar{m}} \frac{K_\alpha}{Zl} (\bar{D}_x^2 - \bar{D}_x^1) + M_y,$$

где  $H = A\Omega$  – кинетический момент ротора;  $\bar{D}_x^n, \bar{D}_y^n, \bar{D}_z^n$  ( $n = 1, 2$ ) – функции времени.

Действительно, в выражения (3.60) – (3.62) входят углы  $\gamma_m^n$  поворота колец и углы  $\varphi_0^n$  поворота комплектов. Но  $\gamma_m^n = \Omega t$ ,  $\gamma_{\bar{m}}^n = 0$ , а  $\varphi_0^n = \omega_c^* n t$ , следовательно, правые части (3.167) являются функциями времени в виде суммы кратных гармоник. Рассмотрим вибрацию ротора при отсутствии внешних возбуждающих сил и моментов. Введем обозначения:

$$\omega_r = \sqrt{\frac{K_r}{M_r}}, \quad \omega_z = \sqrt{\frac{K_z}{M_r}}, \quad \omega_\alpha = \sqrt{\frac{K_\alpha}{C}}, \quad \Omega_\alpha = \frac{H}{C},$$

где  $\omega_r, \omega_z, \omega_\alpha$  – собственные частоты радиальных, осевых и угловых колебаний ротора (при  $\Omega = 0$ ).

Таким образом, вибрация ротора на двух одинаковых опорах описывается системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \omega_r^2 x &= \omega_r^2 \frac{(-1)^{\bar{m}+1}}{Z \cos \alpha^*} (\bar{D}_x^1 + \bar{D}_x^2); \\ \ddot{y} + \omega_r^2 y &= \omega_r^2 \frac{(-1)^{\bar{m}+1}}{Z \cos \alpha^*} (\bar{D}_y^1 + \bar{D}_y^2); \\ \ddot{z} + \omega_z^2 z &= \omega_z^2 \frac{(-1)^{\bar{m}}}{2Z \sin \alpha^*} (\bar{D}_z^2 - \bar{D}_z^1); \\ \ddot{\alpha} + \Omega_\alpha \dot{\beta} + \omega_\alpha^2 \alpha &= \omega_\alpha^2 \frac{(-1)^{\bar{m}}}{Zl} (\bar{D}_y^2 - \bar{D}_y^1); \\ \ddot{\beta} - \Omega_\alpha \dot{\alpha} + \omega_\alpha^2 \beta &= \omega_\alpha^2 \frac{(-1)^{\bar{m}+1}}{Zl} (\bar{D}_x^2 - \bar{D}_x^1). \end{aligned} \quad (3.168)$$

Для определения вида функций, входящих в правые части этих уравнений, воспользуемся формулами (3.64) – (3.66), в которые подставим следующие выражения для углов поворота колец и комплектов:

$$\gamma_m^n = \Omega_m t, \quad \varphi_0^n = \omega_c^* t + \varphi_{00}^n, \quad \Omega_m = \begin{cases} \Omega, & m = \bar{m}, \\ 0, & m = \tilde{m}, \end{cases}$$

где  $\varphi_{00}^n$  – угол поворота  $n$ -го комплекта в начальный момент времени.

Введем плоскость, проходящую через ось подшипника и линию контактов. Вследствие качения шарика по окружности наибольшего радиуса угол  $\psi_j$  его поворота вокруг линии, лежащей в этой плоскости и перпендикулярной линии контактов в системе отсчета, вращающейся относительно оси подшипника с угловой скоростью  $\omega_c^*$ , зависит от времени:  $\psi_j = \omega_c^* t + \psi_{j0}$ . Запишем выражение для вычисления отклонений от сферической формы шарика, используя комплексную форму представления ряда Фурье и формулы (3.4):

$$p'_{\gamma j}(\varphi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_{kj} \exp \left\{ i(2k\psi_j + \alpha_{k\gamma j}) \right\}.$$

Здесь  $d_{0j} = A_{0\gamma j} - p_7^0$ ;  $d_{kj} = d_{-kj}$ ;  $\alpha_{k\gamma j} = -\alpha_{-k\gamma j}$ ;  $d_{kj} = A_{k\gamma j}/2$  – половина амплитуды  $k$ -й ( $k \geq 1$ ) гармоники. Вследствие вращения шарика  $p'_{\gamma j}$  является функцией времени:

$$p'_{\gamma j}^n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_{kj}^n \exp \left\{ i(2k\omega_c^* t + \tilde{\alpha}_{kj}^n) \right\}, \quad \tilde{\alpha}_{kj}^n = \alpha_{k\gamma j}^n + 2k\psi_{j0}^n.$$

Используя действительную форму разложения отклонений формы и размеров колец, для функций времени, входящих в правые части (3.168), получаем явные выражения:

$$\begin{aligned} \bar{D}_x^n(t) &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^Z \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_{kj}^n \left\langle \exp \left\{ i(2k\omega_c^* + \omega_c^*) t + i[\tilde{\alpha}_{kj}^n + \varphi_{00}^n + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{2\pi}{Z}(j-1)] \right\} + \exp \left\{ i(2k\omega_c^* - \omega_c^*) t + i[\tilde{\alpha}_{kj}^n - \varphi_{00}^n - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{2\pi}{Z}(j-1)] \right\} \right\rangle + \frac{Z}{2} \sum_{k=sZ-1} \sum_{m=1,2} \left\{ \tilde{A}_{km}^n \cos [(k\Omega_m - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - (k+1)\omega_c^*) t - (k+1)\varphi_{00}^n] - \tilde{B}_{km}^n \sin [(k\Omega_m - (k+1)\omega_c^*) t - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - (k+1)\varphi_{00}^n] \right\}; \end{aligned} \quad (3.169)$$

$$\begin{aligned} \bar{D}_y^n(t) &= \frac{1}{2i} \sum_{j=1}^Z \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_{kj}^n \left\langle \exp \left\{ i(2k\omega_c^* + \omega_c^*) t + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + i[\tilde{\alpha}_{kj}^n + \varphi_{00}^n + \frac{2\pi}{Z}(j-1)] \right\} - \exp \left\{ i(2k\omega_c^* - \omega_c^*) t + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + i[\tilde{\alpha}_{kj}^n - \varphi_{00}^n - \frac{2\pi}{Z}(j-1)] \right\} + \frac{Z}{2} \times \right. \\ &\quad \left. \times \sum_{k=sZ-1} \sum_{m=1,2} \left\{ -\tilde{B}_{km}^n \cos [(k\Omega_m - (k+1)\omega_c^*) t - (k+1)\varphi_{00}^n] - \right. \right. \end{aligned}$$

$$-\tilde{A}_{km}^n \sin [(k\Omega_m - (k+1)\omega_c^*)t - (k+1)\varphi_{00}^n] \Big\}; \quad (3.170)$$

$$\begin{aligned} \bar{D}_z^n(t) = & \sum_{j=1}^Z \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_{kj}^n \exp \left\{ i(2k\omega_7^* t + \tilde{\alpha}_{kj}^n) \right\} + \\ & + \frac{Z}{2} \sum_{k=sZ} \sum_{m=1,2} \left\langle \tilde{A}_{km}^n \cos \left\{ k[(\Omega_m - \omega_c^*)t - k\varphi_{00}^n] \right\} - \right. \\ & \left. - \tilde{B}_{km}^n \sin \left\{ k[(\Omega_m - \omega_c^*)t - \varphi_{00}^n] \right\} \right\rangle. \end{aligned} \quad (3.171)$$

При получении этих выражений были использованы известные формулы Эйлера:

$$\cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}; \quad \sin \varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}. \quad (3.172)$$

Отсюда можно получить выражение для правых частей системы уравнений вибрации. Однако уже сейчас видно, что спектр вибрации правых частей является дискретным. Видно также, что спектры правых частей в уравнениях радиальной и угловой вибрации одинаковы. Согласно свойствам систем дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, спектр вибрации совпадает со спектром правых частей в нерезонансном случае. Как следует из системы уравнений (3.168), осевые, радиальные и угловые колебания ротора независимы. Это свойство присуще только узлам с одинаковыми опорами, поскольку именно в этом случае перекрестная жесткость  $K_{x\beta}$ , связывающая радиальные перемещения с угловыми, равна нулю. Однако в любом узле осевые перемещения не зависят от перемещений по другим направлениям.

Собственные частоты угловых колебаний находим из двух последних уравнений системы (3.168) с нулевыми правыми частями. Представим решение соответствующей однородной системы в виде

$$\begin{bmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \beta_0 \end{bmatrix} e^{i\omega_t}$$

и, подставляя в уравнения, получим

$$\begin{bmatrix} \omega_\alpha^2 - \omega^2 & i\omega\Omega_\alpha \\ -i\omega\Omega_\alpha & \omega_\alpha^2 - \omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \beta_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Отсюда, приравнивая к нулю определитель (поскольку нас интересуют нетривиальные решения), получаем уравнение

$$(\omega_\alpha^2 - \omega^2)^2 = \omega^2 \Omega_\alpha^2,$$

из которого находим собственные частоты

$$\omega_{1,2,3,4} = \pm 0.5(\Omega_\alpha \pm \sqrt{\Omega_\alpha^2 + 4\omega_\alpha^2}). \quad (3.173)$$

Используя выражения (3.169) – (3.171) для  $\bar{D}_x^n, \bar{D}_y^n, \bar{D}_z^n$ , можно описать спектр собственной вибрации. Из табл. 3.2 следует, что не все гармоники отклонений формы и размеров колец дают вклад в спектр вибрации. В спектре радиальной и угловой вибрации присутствует угловая частота  $\omega_c^*$ , обусловленная разноразмерностью шариков в комплекте ( $k = 0$ ). В этом спектре имеется также угловая частота  $\Omega$ , обусловленная первой гармоникой отклонений формы и размеров колец, закрепленных на роторе. Поскольку смещения при посадке колец на ротор также дают первую гармонику отклонений [см. формулы (3.81)], то они непосредственно влияют на спектр и уровень радиальной и угловой вибрации. В то же время смещения при посадке колец в статор, как следует из табл. 3.2, приводят к колебаниям с нулевой частотой ( $s = 0$ ), т. е. к постоянным слагаемым в радиальных и угловых перемещениях.

При совпадении собственной частоты  $\omega_z$  с одной из частот осевой вибрации (см. табл. 3.2) наступает резонанс в осевых колебаниях. При совпадении же собственной частоты  $\omega_r$  или собственных частот угловых колебаний [см. (3.173)] с частотами радиальной и угловой вибрации, приведенными в табл. 3.2, возникает резонанс в радиальных и угловых колебаниях.

Уравнения движения позволяют рассчитать уровень собственной вибрации ротора. Ограничимся рассмотрением осевых и радиальных колебаний, обозначив  $V_z$  и  $V_r$ , соответственно уровни осевой и радиальной вибрации (средние квадратические значения ускорений). По определению,

$$V_z^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T (\ddot{z})^2 dt; \quad (3.174)$$

$$V_r^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T [(\ddot{x})^2 + (\ddot{y})^2] dt.$$

Правую часть третьего уравнения (3.168) представляем в виде суммы гармоник

$$\frac{(-1)^{\bar{m}} \omega_z^2}{2Z \sin \alpha^*} (\bar{D}_z^2 - \bar{D}_z^1) = \sum_p a_p \cos(\omega_p t + \alpha'_p) + b_p \sin(\omega_p t + \beta'_p),$$

где  $a_p, b_p$  – амплитуды;  $\alpha'_p, \beta'_p$  – фазы;  $p$  – целое число;  $\omega_p$  – частоты, указанные в табл. 3.2.

Таблица 3.2

Угловая частота вибрации		Отклонения формы
осевой	радиальной и угловой	
$2k\omega_7^*$ ( $k$ – целое число)	$2k\omega_7^* \pm \omega_c^*$ ( $k$ – целое число)	От сферической (для шариков)
$sZ\omega_c^*$ ( $sZ = k$ , $s$ – целое число)	$sZ\omega_c^*$ ( $s$ – целое число)	От торOIDальной (для колец, закрепленных в статоре)
$sZ(\Omega - \omega_c^*)$ ( $sZ = k$ , $s$ – целое число)	$(sZ - 1)\Omega - sZ\omega_c^* = sZ(\Omega - \omega_c^*) - \Omega$ ( $s$ – целое число)	От торOIDальной (для колец, закрепленных на роторе)

Уравнение осевых колебаний ротора

$$\ddot{z} + \omega_z^2 z = \sum_p a_p \cos(\omega_p t + \alpha_p') + b_p \sin(\omega_p t + \beta_p'). \quad (3.175)$$

Частное решение этого уравнения дает известная формула

$$z = \sum_p \frac{a_p}{\omega_z^2 - \omega_p^2} \cos(\omega_p t + \alpha_p') + \frac{b_p}{\omega_z^2 - \omega_p^2} \sin(\omega_p t + \beta_p').$$

Сюда следовало бы добавить общее решение однородного уравнения (3.175) (с нулевой правой частью). Однако в реальных узлах, например, из-за трения в контактах шарик – кольцо, имеется небольшое демпфирование, приводящее к появлению в левой части уравнения члена  $h_z z$ , где  $h_z$  – логарифмический декремент колебаний. Вследствие этого общее решение однородного уравнения является затухающей функцией и, следовательно, не влияет на вибрацию. Подставив найденное решение в первую формулу (3.174), получим

$$\begin{aligned} V_z^2 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \left\{ \sum_p \left\{ \frac{a_p^2 \omega_p^4}{(\omega_z^2 - \omega_p^2)^2} \cos^2(\omega_p t + \alpha_p') + \right. \right. \\ &+ \frac{2a_p b_p \omega_p^4}{(\omega_z^2 - \omega_p^2)^2} \cos(\omega_p t + \alpha_p') \sin(\omega_p t + \beta_p') + \\ &\left. \left. + \frac{b_p^2 \omega_p^4}{(\omega_z^2 - \omega_p^2)^2} \sin^2(\omega_p t + \beta_p') \right\} + 2 \sum_{\substack{p, q \\ p \neq q}} \frac{\omega_p^2 \omega_q^2}{(\omega_z^2 - \omega_p^2)(\omega_z^2 - \omega_q^2)} \times \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\times [a_p b_q \cos(\omega_p t + \alpha_p') \sin(\omega_q t + \beta_q') + a_p a_q \cos(\omega_p t + \alpha_p') \times \\ &\times \cos(\omega_q t + \alpha_q') + b_p b_q \sin(\omega_p t + \beta_p') \sin(\omega_q t + \beta_q')] \Big\} dt = \\ &= \sum_p \left\{ \frac{(a_p^2 + b_p^2) \omega_p^4}{2(\omega_z^2 - \omega_p^2)^2} + \frac{a_p b_p \omega_p^4}{(\omega_z^2 - \omega_p^2)^2} \sin(\beta_p' - \alpha_p') \right\} \end{aligned}$$

При получении этой формулы учитывали, что средние по времени значения  $\cos^2(\omega_p t + \alpha_p')$ ,  $\sin^2(\omega_p t + \beta_p')$  равны  $1/2$ , а средние значения сомножителей, стоящих в квадратных скобках, равны нулю.

Оценим среднестатистический уровень осевой вибрации, считая, что

случайные величины  $d_{kj}^n$ ,  $\alpha_{kj}^n$ ,  $\psi_{j0}^n$ ,  $\varphi_{00}^n$ ,  $a_{km}^n$ ,  $b_{km}^n$ ,  $a_{k(m+2)}^n$ ,  $b_{k(m+2)}^n$ ,  $a_{k(m+4)}^n$ ,  $b_{k(m+4)}^n$ , ( $m = 1, 2$ ) являются независимыми,  $\alpha_{kj}^n$ ,  $\psi_{j0}^n$ ,  $\varphi_{00}^n$  – равномерно распределенные на отрезке  $[0, 2\pi]$  случайные величины,

величины  $d_{kj}^n$ ,  $a_{km}^n$ ,  $b_{km}^n$ ,  $a_{k(m+2)}^n$ ,  $b_{k(m+2)}^n$ ,  $a_{k(m+4)}^n$ ,  $b_{k(m+4)}^n$  ( $m = 1, 2$ ) имеют нулевые средние значения, моменты перечисленных случайных величин не зависят от  $n$  и  $j$ .

Обозначив  $\langle \xi \rangle$  среднестатистическое значение  $\xi$ , получим

$$\begin{aligned} \langle V_z^2 \rangle &= \frac{\omega_z^4}{2Z \sin^2 \alpha^*} \left\{ \sum_k \frac{\langle d_k^2 \rangle (2k\omega_7^*)^4}{(\omega_z^2 - 4k^2 \omega_7^{*2})^2} + \right. \\ &+ \frac{Z}{8} \sum_{k=sZ} \sum_{m=1, 2} \frac{\langle \tilde{A}_{km}^2 \rangle + \langle \tilde{B}_{km}^2 \rangle}{[\omega_z^2 - k^2 (\Omega_m - \omega_c^*)^2]^2} \times \\ &\left. \times k^4 (\Omega_m - \omega_c^*)^4 \right\}. \quad (3.176) \end{aligned}$$

Используя формулы (3.63), получим выражения для  $\langle \tilde{A}_{km}^2 \rangle$ ,  $\langle \tilde{B}_{km}^2 \rangle$ :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \langle \tilde{A}_{km}^2 \rangle \\ \langle \tilde{B}_{km}^2 \rangle \end{bmatrix} &= (\cos \alpha^* - 1)^2 \begin{bmatrix} \langle a_{km}^2 \rangle \\ \langle b_{km}^2 \rangle \end{bmatrix} + \cos^2 \alpha^* \begin{bmatrix} \langle a_{k(2+m)}^2 \rangle \\ \langle b_{k(2+m)}^2 \rangle \end{bmatrix} + \\ &+ \sin^2 \alpha^* \begin{bmatrix} \langle a_{k(4+m)}^2 \rangle \\ \langle b_{k(4+m)}^2 \rangle \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Аналогично можно получить выражение для среднего уровня радиальной вибрации

$$\begin{aligned} \langle V_r^2 \rangle &= \frac{2\omega_r^4}{Z \cos^2 \alpha^*} \left\{ \sum_k \frac{\langle d_k^2 \rangle (2k\omega_r^* + \omega_c^*)^4}{[\omega_r^2 - (2k\omega_r^* + \omega_c^*)^2]^2} + \right. \\ &+ \frac{Z}{4} \sum_{k=sZ-1} \sum_{m=1,2} \left[ \frac{\langle \tilde{A} k^2 m \rangle + \langle \tilde{B} k^2 m \rangle}{\omega_r^2 - [k(\Omega_m - \omega_c^*) - \omega_c^*]^2} \right]^2 \times \\ &\times [k(\Omega_m - \omega_c^*) - \omega_c^*]^4 \left. \right\}. \end{aligned} \quad (3.177)$$

Как видим, общий уровень вибрации зависит от близости собственной частоты к спектру вибрации.

Одна из важных практических задач — снижение общего уровня вибрации узла. Как следует из формул (3.176), (3.177), этого можно достигнуть, либо уменьшая погрешность изготовления колец и шариков, либо рациональным выбором конструктивных параметров и усилия осевого натяга. Для узла, имеющего неоптимальную конструкцию, спектр вибрации может оказаться настолько плотным, что не будет свободного диапазона для помещения в него собственных частот  $\omega_z$ ,  $\omega_r$ . Поэтому задача конструктора — по возможности разредить спектр собственных колебаний.

Рассмотрим осевую вибрацию. Исследуем возможность разрежения спектра осевых колебаний в соответствии с теорией В.Ф. Журавлева.

Кинематическая угловая скорость сепаратора

$$\omega_c^* = q_1 \Omega, \quad q_1 = \frac{R^* \bar{m}}{R_1^* + R_2^*}. \quad (3.178)$$

Аналогично

$$\begin{aligned} \Omega - \omega_c^* &= q_2 \Omega \equiv (1 - q_1) \Omega, \quad q_2 = \frac{R^* \bar{m}}{R_1^* + R_2^*}; \\ \omega_7^* &= q_3 \Omega, \quad q_3 = \frac{2R_1^* R_2^*}{(R_1^* + R_2^*) p_7^0}. \end{aligned} \quad (3.179)$$

Для разрежения спектра осевой вибрации, состоящего из частот вида  $sZq_1\Omega$ ,  $sZq_2\Omega$ ,  $2sq_3\Omega$ , необходимо, чтобы три указанных множества пересекались. Это достигается, если  $q_2/q_1$ ,  $q_3/q_1$  — рациональные числа. Подставляя формулы

$$R_1^* = R^* + 0,5p_7^0 \cos \alpha^*, \quad R_2^* = R^* - 0,5p_7^0 \cos \alpha^*$$

( $R^*$  — радиус окружности, проходящей через центры шариков) в выражения для  $q_1$ ,  $q_2$ ,  $q_3$ , получаем требование рациональности чисел

$$\frac{R^* + 0,5p_7^0 \cos \alpha^*}{R^* - 0,5p_7^0 \cos \alpha^*}; \quad \frac{R^* + 0,5p_7^0 \cos \alpha^*}{p_7^0}$$

или чисел  $\frac{p_7^0}{R^*} \cos \alpha^*$  и  $\frac{R^*}{p_7^0} + 0,5 \cos \alpha^*$ , или чисел  $p_7^0/R^*$ ,  $\cos \alpha^*$ . Заметим, что максимальное число шариков в подшипнике (без сепаратора, когда соседние шарики касаются друг друга)

$$Z_{\max} = \frac{\pi}{\arcsin[p_7^0/(2R^*)]} \approx \frac{2\pi R^*}{p_7^0}.$$

Таким образом, для разрежения осевого спектра можно рекомендовать такой выбор параметров, чтобы  $p_7^0/R^*$ ,  $\cos \alpha^*$  были рациональными и, кроме того, значение  $Z_{\max}$  допускало размещение в комплекте заданного числа шариков  $Z$  ( $Z < Z_{\max}$ ). Поскольку  $\alpha^*$  не является исходным конструктивным параметром, а зависит от осевого натяга, то для приблизительной оценки при небольших начальных углах  $\alpha_0$  контакта достаточно, чтобы число  $\cos \alpha_0$  было рациональным.

Задача разрежения спектра радиальной вибрации более сложная, однако для ее решения необходимо удовлетворить условию разреженности осевого спектра. Предположим, что мы добились совпадения отдельных частот радиальных колебаний. Пусть эти колебания возбуждаются кольцами на роторе и статоре (см. табл. 3.2). Тогда существуют целые числа  $r_1, r_2, \dots$  и  $r'_1, r'_2, \dots$  и т.д., такие, что

$$\begin{aligned} r_1 Z \omega_c^* &= r'_1 Z (\Omega - \omega_c^*) - \Omega; \\ r_2 Z \omega_c^* &= r'_2 Z (\Omega - \omega_c^*) - \Omega. \end{aligned}$$

Вычтя второе равенство из первого, получим

$$(r_1 - r_2) \omega_c^* = (r'_1 - r'_2) (\Omega - \omega_c^*).$$

Отношение  $(\Omega - \omega_c^*)/\omega_c^* = q_2/q_1$  равно рациональному числу  $(r_1 - r_2)/(r'_1 - r'_2)$ . Пусть частоты колебаний, вызванных отклонениями формы и размеров шарика и колец статора, совпадают. Тогда при некоторых целых  $k$  и  $s$  (см. табл. 3.2) должно выполняться равенство

$$2k\omega_7^* \pm \omega_c^* = sZ\omega_c^*,$$

откуда следует, что  $\omega_7^*/\omega_c^* = q_3/q_1 = (sZ \mp 1)/(2k)$ .

Приведенные рассуждения не дают однозначного ответа на вопрос, какими должны быть рациональные числа  $\cos \alpha^*$  и  $p_7^0/R^*$ , чтобы конструкция была оптимальной. Однако учет того, что указанные величины рациональны, уже позволяет обеспечивать частичную оптимизацию. Рассмотрим один из способов выбора параметров, позволяющий достичь значительной степени разрежения, во всяком случае для спектра осевой вибрации. Примем для частот, приведенных в табл. 3.2, условия

Таблица 3.3

$$2\omega_7^* = Z\omega_2^* ; \omega_1^*/\omega_2^* = j , \quad (3.180)$$

где  $j$  – рациональное число;  $\omega_m^*$  – абсолютное значение угловой скорости движения сепаратора относительно  $m$ -го кольца.

Очевидно, при соблюдении условий (3.180) три набора частот из табл. 3.2 сводятся к двум, обусловленным отклонениями геометрических параметров внутреннего и наружного колец. Используя формулы (3.178), (3.179) и условия (3.180), можно записать при  $m = 2$ :

$$Zp_7^0 = 4R_2^* = 4(R^* - 0,5p_7^0 \cos\alpha^*) ;$$

$$\frac{R_1^*}{R_2^*} = \frac{R^* + 0,5p_7^0 \cos\alpha^*}{R^* - 0,5p_7^0 \cos\alpha^*} = j ,$$

откуда в свою очередь получаем

$$\frac{2R^*}{p_7^0} = \frac{Z}{2} + \cos\alpha^* ; \quad \frac{2R^*}{p_7^0} = \frac{j+1}{j-1} \cos\alpha^* . \quad (3.181)$$

При любом  $j > 1$ , как легко проверить, выполнено необходимое условие

$$Z_{\max} \approx \frac{2\pi R^*}{p_7^0} > 2\left(\frac{2R^*}{p_7^0} - \cos\alpha^*\right) .$$

Из соотношений (3.181) найдем

$$\cos\alpha^* = \frac{Z}{4}(j-1) . \quad (3.182)$$

Поскольку обычно  $Z \geq 4$ , то  $j$  должно удовлетворять неравенству  $1 < j < 2$ .

Пусть  $j = p/q$  – несократимая дробь. Тогда в диапазоне первых  $p$  частот колебаний, возбуждаемых отклонениями геометрических параметров внутреннего кольца, имеется  $(q-1)$ -я частота, обусловленная отклонениями параметров наружного кольца. Следовательно, относительная плотность (на  $p$  частот внутреннего кольца) результирующего спектра равна

$$\frac{p+q-1}{p} = 1 + \frac{q-1}{p} .$$

При фиксированном  $q$  параметр  $p$  принимает значения  $q+1, \dots, 2q-1$ , поэтому минимальная плотность спектра, достигаемая при  $p=2q-1$ , равна  $1 + (q-1)/(2q-1)$ . Последняя величина монотонно изменяется в зависимости от  $q$  и достигает минимального ненулевого значения  $4/3$  при  $q=2$ . Тогда  $p=3, j=3/2$  и необходимо, чтобы  $\cos\alpha^* = Z/8$ .

При этих параметрах достигается наивысшая степень разрежения спект-

$q$	$p$	$Z$	$\alpha^*, ^\circ$	$2R^*/p_7^0$	$Z_{\max}$	$(p+q-1)/p$
2	3	4	60,00	2,500	7	1,333
2	3	5	51,32	3,125	9	1,333
2	3	6	41,41	3,750	11	1,333
2	3	7	28,96	4,375	13	1,333
3	4	4	70,53	2,333	7	1,500
3	4	5	65,38	2,917	9	1,500
3	4	6	60,00	3,500	10	1,500
3	4	7	54,31	4,083	12	1,500
3	4	8	48,19	4,667	14	1,500
3	4	9	41,41	5,250	16	1,500
3	4	10	33,56	5,833	18	1,500
3	4	11	23,56	6,417	20	1,500
3	5	4	48,19	2,667	8	1,400
3	5	5	33,56	3,333	10	1,400

ра осевой вибрации. В табл. 3.3 приведены характеристики некоторых подшипников, рассчитанные по данной методике.

При получении уравнений (3.167) были учтены квадратичные члены в разложении потенциальной энергии. Переходим к рассмотрению спектра вибрации в кубическом приближении. Учет кубических слагаемых приводит к обнаружению некоторых новых эффектов. Кубические слагаемые распадаются на четыре группы:

первая группа – квадратичные по отклонениям геометрических параметров и линейные по координатам;

вторая группа – квадратичные по координатам и линейные по отклонениям геометрических параметров;

третья группа – кубические по координатам;

четвертая группа – кубические по отклонениям геометрических параметров.

Слагаемые четвертой группы не войдут в уравнения движения, поскольку их производные по координатам равны нулю. Учет слагаемых второй группы приводит к тому, что в системе оказывается возможным параметрический резонанс.

**Спектр собственной вибрации в кубическом приближении.** Потенциальную энергию ротора на двух одинаковых подшипниках вычисляем по формулам (см. подразд. 2.2):

$$\Pi = \frac{2}{5} K_0 \sum_{n=1,2} \sum_{j=1}^Z \left\{ \delta^{*+} (-1)^{\bar{m}} [(x \cos\alpha^* + (-1)^n l \beta) \cos\phi_j^n + (y \cos\alpha^* - (-1)^n l \alpha) \sin\phi_j^n - (-1)^n z \sin\alpha^*] + \right.$$

$$+ P' [(-1)^n \alpha^*, \varphi_j^n, \gamma_1^n, \gamma_2^n] \Big\}^{5/2}, \quad (3.183)$$

где

$$\begin{aligned} P'(\alpha^*, \varphi, \gamma_1, \gamma_2) = & p'_7 + \sum_{m=1,2} [(\cos \alpha^* - 1) p'_m (\varphi - \gamma_m) + (-1)^m \times \\ & \times \cos \alpha^* p'_{2+m} (\varphi - \gamma_m) - (-1)^m \sin \alpha^* p'_{4+m} (\varphi - \gamma_m)] = P'_n. \end{aligned}$$

Слагаемые третьего порядка малости из (3.183) определяются выражением

$$\begin{aligned} \Pi_3 = & \frac{P^*}{8\delta^{*2}} \sum_{n=1,2} \sum_{j=1}^Z (-1)^{\bar{m}} \left\{ (x \cos \alpha^* + (-1)^n l \beta) \cos \varphi_j^n + \right. \\ & \left. + [y \cos \alpha^* - (-1)^n l \alpha] \sin \varphi_j^n - (-1)^n z \sin \alpha^* \right\} + P'_n, \quad (3.184) \end{aligned}$$

где  $P^*$  — нагрузка в контакте в состоянии предварительного натяга.

Определим слагаемые, квадратичные по отклонениям геометрических параметров и линейные по координатам:

$$\begin{aligned} \Pi_{31} = & \frac{3P^*}{8\delta^{*2}} (-1)^{\bar{m}} \sum_{n=1,2} \sum_{j=1}^Z [(x \cos \alpha^* + (-1)^n l \beta) \cos \varphi_j^n + \\ & + (y \cos \alpha^* - (-1)^n l \alpha) \sin \varphi_j^n - (-1)^n z \sin \alpha^*] (P'_n)^2. \end{aligned}$$

При учете этих слагаемых в правой части системы (3.167) появится слагающее

$$\frac{3P^*}{8\delta^{*2}} (-1)^{\bar{m}} \sum_{n=1,2} \sum_{j=1}^Z \begin{bmatrix} -\cos \alpha^* \cos \varphi_j^n \\ -\cos \alpha^* \sin \varphi_j^n \\ (-1)^n \sin \alpha^* \\ (-1)^n l \sin \varphi_j^n \\ -(-1)^n l \cos \varphi_j^n \end{bmatrix} (P'_n)^2. \quad (3.185)$$

Определим его спектральный состав.

Воспользуемся комплексной формой (3.1) разложения отклонений геометрических параметров колец в ряд Фурье и введем комплексные амплитуды

$$\begin{aligned} \tilde{C}_k^n = & (\cos \alpha^* - 1) c_{k,m}^n + (-1)^m \cos \alpha^* c_{k(2+m)}^n - (-1)^{m+n} \times \\ & \times \sin \alpha^* c_{k(4+m)}^n. \end{aligned}$$

Обозначим  $\omega_m = \omega_c^* - \Omega_m$ . Тогда

$$\begin{aligned} (P'_n)^2 = & \left\langle \sum_{s=-\infty}^{\infty} d_{sj}^n \exp \left\{ i(2s\omega_7^* t + \tilde{\alpha}_{sj}^n) \right\} \right\rangle^2 + \\ & + \sum_{m=1,2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{C}_{km}^n \exp \left\{ ik[\omega_m t + \varphi_{00}^n + \frac{2\pi}{Z}(j-1)] \right\}^2 = \\ = & \sum_{s=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_{sj}^n d_{kj}^n \exp \left\{ i[2(s+k)\omega_7^* t + \tilde{\alpha}_{sj}^n + \tilde{\alpha}_{kj}^n] \right\} + \\ & + 2 \sum_{m=1,2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{s=-\infty}^{\infty} d_{sj}^n \tilde{C}_{km}^n \exp \left\{ i[(2s\omega_7^* + k\omega_m) t + \right. \\ & \left. + k\varphi_{00}^n + \tilde{\alpha}_{sj}^n + k\frac{2\pi}{Z}(j-1)] \right\} + 2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \tilde{C}_{k1}^n \tilde{C}_{s2}^n \times \\ & \times \exp \left\{ i[(k\omega_1 + s\omega_2) t + (k+s)\varphi_{00}^n + (k+s)\frac{2\pi}{Z}(j-1)] \right\} + \\ & + \sum_{m=1,2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \tilde{C}_{km}^n \tilde{C}_{sm}^n \exp \left\{ i(k+s) \times \right. \\ & \left. \times [\omega_m t + \varphi_{00}^n + \frac{2\pi}{Z}(j-1)] \right\}. \quad (3.186) \end{aligned}$$

В этой формуле слагаемые (колебания) обусловлены взаимодействием различных деталей подшипника с отклонениями геометрических параметров: первое слагаемое — взаимодействием шариков с указанными отклонениями; второе — взаимодействием шарика и колец; третье — взаимодействием наружного и внутреннего колец; четвертое — взаимодействием одноименных колец с отклонениями геометрических параметров.

Определим дополнительный спектр радиальных и угловых колебаний, обусловленный первой, второй, четвертой и пятой строками выражения (3.185). Если воспользоваться формулами Эйлера (3.172), то слагаемые первых двух групп в (3.186) приводят к появлению частот вида

$$2(s+k)\omega_7^* \pm \omega_c^*; 2s\omega_7^* + k\omega_m \pm \omega_c^*.$$

Умножение на  $\cos \varphi_j^n$ ,  $\sin \varphi_j^n$ , эквивалентное умножению на  $e^{\pm i\varphi_j^n} = \exp \pm i \left\{ [\omega_c^* t + \varphi_{00}^n + \frac{2\pi}{Z}(j-1)] \right\}$ , приведет к появлению в третьем и четвертом слагаемых в (3.186) сомножителя  $\exp \left\{ i(s+k \pm 1) 2\pi(j-1)/Z \right\}$ . Но поскольку в (3.185) ведем суммирование по  $j$ , то ненулевыми будут лишь те слагаемые, для которых  $s+k \pm 1 = rZ$ . Поэтому третье слагаемое в (3.186) дает спектр вида  $k\omega_1 + s\omega_2 \pm \omega_c^*$ , где  $k+s \pm 1 = rZ$ ,  $r$  — целое

Таблица 3.4

Угловая частота вибрации		Взаимодействующие детали
осевой	радиальной и угловой	
$2k\omega_7^* + s(\omega_c^* - \Omega)$	$2s\omega_7^* + k(\omega_c - \Omega) \pm \omega_c^*$	Шарик – кольцо ротора
$2k\omega_7^* + s\omega_c^*$	$2s\omega_7^* + k\omega_c^*$	Шарик – кольцо статора
$p\Omega + s_1 Z\omega_c^* + s_2 Z(\omega_c^* - \Omega)$	$sZ\omega_c^* - k\Omega$	Наружное кольцо – внутреннее кольцо

Причина.  $k, s, p, s_1, s_2$  – целые числа.

число, при этом либо  $\omega_1$ , либо  $\omega_2$  равно  $\omega_c^*$ . Пусть для определенности (выводы от этого не изменятся)  $\omega_1 = \omega_c^*$ ,  $\omega_2 = \omega_c^* - \Omega$ . Тогда

$$\begin{aligned} k\omega_1 + s\omega_2 \pm \omega_c^* &= (rZ \mp 1 - s)\omega_1 + s\omega_2 \pm \omega_c^* = rZ\omega_c^* + s(\omega_2 - \omega_1) = \\ &= rZ\omega_c^* - s\Omega. \end{aligned}$$

Четвертое слагаемое в (3.186) имеет спектр, состоящий из частот вида

$$(k+s)\omega_m \pm \omega_c^* = (rZ \mp 1)\omega_m \pm \omega_c^* = rZ\omega_m \mp (\omega_m - \omega_c^*),$$

или, в более полной записи,

$$(k+s)\omega_m \pm \omega_c^* = \begin{cases} rZ(\omega_c^* - \Omega) \pm \Omega, m = \bar{m}, \\ rZ\omega_c^*, m = \tilde{m}. \end{cases}$$

Найдем дополнительный спектр осевой вибрации, обусловленный параметрами в третьей строке выражения (3.185). Первое и второе слагаемые в (3.186) обуславливают частоты вида

$$2(s+k)\omega_7^*; 2s\omega_7^* + k\omega_m.$$

Третье и четвертое слагаемые не равны нулю при  $k+s=rZ$ , а их спектр состоит из частот  $k\omega_1 + s\omega_2$ ,  $(k+s)\omega_m = rZ\omega_m$ . Представив  $k$  и  $s$  в виде

$$k = p + r_1 Z; s = -p + r_2 Z,$$

получим

$$\begin{aligned} k\omega_1 + s\omega_2 &= p(\omega_1 - \omega_2) + r_1 Z\omega_1 + r_2 Z\omega_2 = p\Omega + r_1 Z\omega_c^* + \\ &+ r_2 Z(\omega_c^* - \Omega). \end{aligned}$$

В табл. 3.4 приведены собственные частоты вибрации в кубическом приближении, которые отличны от частот, содержащихся в табл. 3.2.

Применение изложенного выше метода разрежения осевого спектра ведет также к разрежению спектра в квадратичном по отклонениям геометрических параметров приближении.

**Параметрические колебания ротора.** Слагаемые, квадратичные по координатам и линейные по отклонениям геометрических параметров в выражении (3.184) для  $\Pi$ , имеют вид

$$\Pi_{32} = \frac{3P^*}{8\delta^{*2}} \sum_{n=1,2} \sum_{j=1}^Z \left\{ [x \cos \alpha^* + (-1)^n \beta] \cos \varphi_j^n + \right.$$

$$+ [y \cos \alpha^* - (-1)^n l \alpha] \sin \varphi_j^n - (-1)^n z \sin \alpha^* \left. \right\} {}^2 P'_n.$$

Наличие полученной составляющей потенциальной энергии приводит к появлению в уравнениях движения произведений отклонений геометрических параметров и координат. Это значит, что матрица коэффициентов системы дифференциальных уравнений движения ротора (интерпретируемая как матрица жесткости) зависит от отклонений геометрических параметров  $\bar{D}_x^n, \bar{D}_y^n, \bar{D}_z^n$ , которые вследствие переменности углов  $\varphi_j^n, \gamma_1^n, \gamma_2^n$  зависят от времени. Это приводит к тому, что в системе при определенных условиях могут возникнуть либо параметрический резонанс, либо биения низкой частоты.

Для простоты ограничимся рассмотрением только осевых колебаний, т. е. положим  $x = y = \alpha = \beta = 0$ . Тогда справедлива формула

$$\frac{\partial \Pi_{32}}{\partial z} = \frac{3P^*}{4\delta^{*2}} z \sin^2 \alpha^* \sum_{n=1,2} \sum_{j=1}^Z P' ((-1)^n \alpha^*;$$

$$\varphi_j^n, \gamma_1^n, \gamma_2^n) = \frac{3P^*}{4\delta^{*2}} z \sin^2 \alpha^* (\bar{D}_z^2 + \bar{D}_z^1).$$

Уравнение собственных осевых колебаний при  $F_z = 0$  имеет вид

$$M_r \ddot{z} + [K_z + \frac{3P^*}{4\delta^{*2}} (\bar{D}_z^2 + \bar{D}_z^1) \sin^2 \alpha^*] z = \frac{(-1)^m K_z}{2Z \sin \alpha^*} (\bar{D}_z^2 - \bar{D}_z^1).$$

Разделим обе части этого уравнения на  $M_r$ :

$$\ddot{z} + h_z \dot{z} + \omega_z^2 [1 + P_z(t)] z = \frac{(-1)^m \omega_z^2}{2Z \sin \alpha^*} (\bar{D}_z^2 - \bar{D}_z^1). \quad (3.187)$$

Здесь введено обозначение  $P_z(t) = (\bar{D}_z^2 + \bar{D}_z^1)/(4Z\delta^*)$  и учтено наличие демпфирования (слагаемое  $h_z \dot{z}$ , определяемое экспериментально).

Общее решение линейного уравнения (3.187) складывается из частного решения неоднородного уравнения и общего решения однородного (с нулевой правой частью). Рассмотрим лишь однородное уравнение

$$\ddot{z} + h_z \dot{z} + \omega_z^2 [1 + P_z(t)] z = 0 \quad (3.188)$$

и определим условия, при которых его решение описывает параметрический резонанс.

Функция  $P_z(t)$  задается тригонометрическим рядом, коэффициенты которого зависят от отклонений формы и размеров колец и шариков. Спектр этой функции совпадает со спектром правой части уравнения (3.187) и, следовательно, со спектром собственной осевой вибрации (см. табл. 3.2). Последний же состоит в общем случае из трех серий угловых частот, кратных  $\omega_c^*$ ,  $\Omega - \omega_c^*$ ,  $2\omega_l^*$ . Решение уравнения (3.188) при  $h_z = 0$ ,  $P_z(t) = f \cos \omega t$  (уравнение Матье) описывает параметрический резонанс при близости угловой частоты  $\omega$  к частотам вида  $2\omega_z/n$ ,  $n$  – натуральное число. Аналогично уравнению Матье, решение (3.188) может также описывать параметрический резонанс.

Исследуем основной параметрический резонанс ( $n = 1$ ). Предположим, что в функцию  $P_z(t)$  в качестве слагаемых входят гармоники с частотами  $2\omega_z + 2\epsilon$ , близкими к удвоенной собственной частоте осевых колебаний ( $|\epsilon| \ll |\omega_z|$ ). Вследствие того, что функция  $P_z(t)$  содержит серии кратных частот, в ней могут содержаться также гармоники с частотой  $\omega_z + \epsilon$ :

$$P_z(t) = \gamma_{02} \cos(2\omega_z + 2\epsilon)t + \delta_{02} \sin(2\omega_z + 2\epsilon)t + \gamma_{01} \cos(\omega_z + \epsilon)t + \delta_{01} \sin(\omega_z + \epsilon)t + P'_0(t),$$

где коэффициенты  $\gamma_{01}$ ,  $\gamma_{02}$ ,  $\delta_{01}$ ,  $\delta_{02}$  вычисляем из формулы (3.171) для  $D_z$ , причем  $P'_0(t)$  – функция времени, в разложение которой не входят слагаемые с частотами  $\omega_z + \epsilon$ ,  $2\omega_z + 2\epsilon$ . Будем искать решение уравнения (3.188) в виде

$$z = a(t) \cos(\omega_z + \epsilon)t + b(t) \sin(\omega_z + \epsilon)t + c(t),$$

где  $a(t)$ ,  $b(t)$ ,  $c(t)$  – медленно меняющиеся функции времени.

Подставим  $z(t)$  в уравнение (3.188) и пренебрежем вторыми производными по времени от функций  $a$ ,  $b$ ,  $c$  вследствие их малости:

$$\begin{aligned} & -2\dot{a}(\omega_z + \epsilon) \sin(\omega_z + \epsilon)t - a(\omega_z + \epsilon)^2 \cos(\omega_z + \epsilon)t + \\ & + 2\dot{b}(\omega_z + \epsilon) \cos(\omega_z + \epsilon)t - b(\omega_z + \epsilon)^2 \sin(\omega_z + \epsilon)t + \\ & + h_z [\dot{a} \cos(\omega_z + \epsilon)t - a(\omega_z + \epsilon) \sin(\omega_z + \epsilon)t + b \sin(\omega_z + \epsilon)t + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & + b(\omega_z + \epsilon) \cos(\omega_z + \epsilon)t + c] + \omega_z^2 [1 + \gamma_{02} \cos(2\omega_z + 2\epsilon)t + \\ & + \delta_{02} \sin(2\omega_z + 2\epsilon)t + \gamma_{01} \cos(\omega_z + \epsilon)t + \delta_{01} \sin(\omega_z + \epsilon)t + \\ & + P'_0(t)] [a \cos(\omega_z + \epsilon)t + b \sin(\omega_z + \epsilon)t + c] = 0. \end{aligned}$$

Пренебрежем вследствие малости членами порядка  $\epsilon/\omega_z$  и после преобразований получим систему с постоянными коэффициентами, линейную относительно медленно меняющихся функций  $a$ ,  $b$ ,  $c$

$$\begin{aligned} -2\omega_z \dot{a} + h_z \dot{b} &= (\omega_z h_z - \frac{\omega_z^2 \delta_{02}}{2}) a + (2\omega_z \epsilon + \frac{\omega_z^2 \gamma_{02}}{2}) b - \\ & - \omega_z^2 \delta_{01} c; \\ h_z \dot{a} + 2\omega_z \dot{b} &= (2\omega_z \epsilon - \frac{\omega_z^2 \gamma_{02}}{2}) a - (\omega_z h_z + \frac{\omega_z^2 \delta_{02}}{2}) b - \\ & - \omega_z^2 \gamma_{01} c; \\ h_z \dot{c} &= -\frac{\omega_z^2 \gamma_{01}}{2} a - \frac{\omega_z^2 \delta_{01}}{2} b - \omega_z^2 c. \end{aligned} \quad (3.189)$$

Согласно теории систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, решение (3.189) представим в виде линейной комбинации экспоненциальных функций от произведения времени на характеристические числа матрицы, соответствующей данной системе. Характеристические числа связаны с амплитудами отклонений геометрических параметров посредством  $\gamma_{02}$ ,  $\delta_{02}$ ,  $\gamma_{01}$ ,  $\delta_{01}$ , коэффициента  $h_z$  демпфирования и  $\epsilon$  – разности возмущающей и собственной частот. Предположим, что  $h_z = 0$ . Тогда последнее уравнение (3.189) становится алгебраическим. Выразив из него  $c$  и подставив в первые два уравнения, получим систему двух дифференциальных уравнений относительно  $a$  и  $b$ . Его характеристические числа

$$\lambda = \pm \frac{\omega_z}{2} \left\{ \frac{\delta_{02}^2 + \gamma_{02}^2}{4} - 4 \frac{\epsilon^2}{\omega_z^2} - \frac{\epsilon}{\omega_z} (\gamma_{01}^2 + \delta_{01}^2) + \right. \\ \left. + \frac{1}{4} (\delta_{01}^2 \gamma_{02} - 2\gamma_{01} \delta_{01} \delta_{02} - \gamma_{01}^2 \gamma_{02}) \right\}^{1/2}. \quad (3.190)$$

Если выражение в фигурных скобках положительно, то одно из чисел  $\lambda$  также положительно, и, следовательно, амплитуды  $a$ ,  $b$  являются экспоненциальными функциями. Это, в частности, достигается при больших значениях коэффициентов  $\delta_{02}$  и  $\gamma_{02}$ , непосредственно связанных с амплитудами гармоник отклонений геометрических параметров, которые порождают частоту, близкую к  $2\omega_z$ , и при точной настройке на резонанс (т. е. при  $\epsilon/\omega_z \ll 1$ ). Когда подкоренное выражение отрицательно, характеристические числа чисто мнимые, что соответствует медленному гармоническому

изменению амплитуды  $a$  и  $b$  с частотами  $|\lambda|$ , т. е. биениям в осевых колебаниях. Наличие демпфирования, которым мы пренебрегли при получении формулы (3.190), помогает избежать резонанса системы.

### 3.7. ДИНАМИКА СЕПАРАТОРОВ В КОМПЛЕКТЕ С ШАРИКАМИ

**Низкочастотные осевые биения, связанные с переменностью углов контакта.** При экспериментальном исследовании осевой вибрации маховиков гидродвигателей на радиально-упорных шариковых подшипниках можно заметить биения с частотой около 1 Гц. При этом все характеристики подшипникового узла (собственная частота осевых колебаний, амплитуда вибрации на данной частоте, мощность, расходуемая при вращении маховика, положение центра масс маховика) претерпевают медленные изменения колебательного, иногда нерегулярного характера. На некотором промежутке времени биения могут и отсутствовать. Тогда говорят о режиме самосинхронизации, но он наблюдается довольно редко. В этом подразделе изложена расчетная модель осевых биений, развитая Б.В. Федосовым, и приведены формулы для вычисления медленных изменений характеристик подшипникового узла.

Дадим качественное объяснение механизма биений. Рассмотрим только осевые колебания ротора. Пусть угол контакта для всех шариков левого подшипника одинаков и равен  $\alpha^1$ , а для всех шариков правого подшипника —  $\alpha^2$ , причем подшипники одинаковы [см. формулы (3.70)], и  $\bar{m} = 2$ . Вес маховика считаем малым по сравнению с усилием предварительного натяга. Вследствие упругой контактной деформации шарика на внутреннее кольцо и, следовательно, на вал вдоль линии контакта, соединяющей точки контакта шарика с кольцами, действует сила (по формуле Герца)  $P = K_0 \delta_0^{3/2}$ , где  $K_0$  — постоянная [см. (3.7), (3.8)];  $\delta_0$  — упругое сближение. Величина  $\delta_0$  состоит из трех слагаемых: начального контактного сближения  $\delta^*$ , которое создается предварительным осевым натягом; контактного сближения  $-(-1)^n z \sin \alpha^*$ , вызванного смещением  $z$  ротора; контактных сближений  $\delta_1$  и  $\delta_2$  для левого и правого подшипников соответственно, связанных с отклонениями формы дорожек качения и шариков. Предположим, что для всех шариков левого или правого подшипников деформация вследствие взаимодействия шариков и дорожек качения с отклонениями формы и размеров одинакова. Будем считать отклонение ( $p_3'$ ) радиуса дорожки наружного кольца периодической функцией полярного угла  $\varphi$ , отсчитываемого в плоскости наружного кольца, с периодом  $2\pi/Z$ , другими словами, на наружном кольце отлична от нуля только амплитуда  $Z$ -й гармоники в разложении  $p_3'$ . Кроме того, будем считать, что отклонения от сферической формы шариков равны нулю. Используя выражение (3.35) для упругой деформации и разложение в ряд Фурье для  $p_3'$ , получим упругое сближение в  $n$ -м подшипнике

$$\begin{aligned}\delta^* - (-1)^n z \sin \alpha^* - p_3'(\varphi_j^n) \cos \alpha^* &= \delta^* - (-1)^n z \sin \alpha^* - \\ &- \cos \alpha^* (c_{Z3} e^{iZ\varphi_j^n} + \bar{c}_{Z3} e^{-iZ\varphi_j^n})\end{aligned}$$

(черта означает комплексное сопряжение). Пусть  $\varphi_j^n = \varphi_n + 2\pi(j-1)/Z$ , тогда упругое сближение равно  $\delta^* - (-1)^n z \sin \alpha^* + \delta_n$ , где

$$\delta_n = -\cos \alpha^* (c_{Z3} e^{iZ\varphi_n} + \bar{c}_{Z3} e^{-iZ\varphi_n}).$$

Уравнение осевых колебаний маховика имеет вид

$$M_r \ddot{z} = K_0 Z \sin \alpha^* [(\delta^* - z \sin \alpha^* + \delta_2)^{3/2} - (\delta^* + z \sin \alpha^* + \delta_1)^{3/2}]. \quad (3.191)$$

Рассматривая вибрацию в подразд. 3.6, мы предполагали, что  $z, \delta_1, \delta_2$  много меньше  $\delta^*$ , и после линеаризации правой части (3.191).

$$(\delta^* - (-1)^n z \sin \alpha^* + \delta_n)^{3/2} \approx \delta^{3/2} \left(1 + \frac{3}{2} \frac{(-1)^{n+1} z \sin \alpha^* + \delta_n}{\delta^*}\right)$$

пришли к уравнению осевой вибрации

$$\ddot{z} + \omega_z^2 z = f(t), \quad (3.192)$$

где  $\omega_z$  — собственная частота осевых колебаний маховика;  $f(t)$  — вынуждающая сила, пропорциональная  $\delta_1 - \delta_2$ .

При вращении вала шарики вместе с сепаратором вращаются вокруг оси узла с некоторыми угловыми скоростями  $\omega_{c1}$  и  $\omega_{c2}$  для левого и правого подшипников соответственно, причем в первом приближении  $\omega_{c1} = \omega_{c2} = \omega_c^*$ . Следовательно, именно  $\delta_1$  и  $\delta_2$ , являясь периодическими функциями времени, вызывают высокочастотную вибрацию маховика. При таком подходе полностью игнорируется нелинейность роторной системы, в частности нелинейность закона Герца, и, естественно, модель (3.192) биений не описывает.

Теория биений, излагаемая в данном подразделе, основана на двух положениях: нелинейности закона Герца, а также различии углов контакта  $\alpha^1$  и  $\alpha^2$  и их изменении во времени, вследствие чего различны и переменны угловые скорости  $\omega_{c1}$  и  $\omega_{c2}$ . Опишем качественно причины низкочастотных автоколебаний роторной системы, наблюдавшихся экспериментально и интерпретируемых как биения. Отклонения формы колец обуславливают смещение маховика от положения равновесия на  $(\delta_1 - \delta_2)/(2 \sin \alpha^*)$ . При этом среднее значение  $z_0$  смещения вследствие нелинейности закона Герца не равно нулю. Следует также отметить, что значение  $z_0$  зависит от разности угловых скоростей  $\omega_{c2} - \omega_{c1}$ .

Смещение среднего значения положения равновесия изменяет средние

значения углов контакта  $\alpha^1$  и  $\alpha^2$ , что влечет за собой изменение разности  $\omega_{c2} - \omega_{c1}$ .

Таким образом, либо все изменения со временем устанавливаются, тогда наступает самосинхронизация, либо процесс не устанавливается, тогда он имеет автоколебательный характер, т. е. в системе наблюдаются биения.

Перейдем к расчету параметров движения маховика. Введем переменную  $u$  по формуле

$$z = \frac{\delta^*}{\sin\alpha^*} (u + f_2 - f_1), \quad (3.193)$$

где  $f_1 = \delta_1/(2\delta^*)$ ;  $f_2 = \delta_2/(2\delta^*)$ .

Уравнение (3.191) можно записать в виде

$$\ddot{u} + \ddot{f}_2 - \ddot{f}_1 = \frac{\omega_z^2}{3} [(1 + f_1 + f_2 - u)^{3/2} - (1 + f_1 + f_2 + u)^{3/2}].$$

После линеаризации в окрестности  $u = 0$

$$\ddot{u} + \omega_z^2 (1 + \frac{f_1 + f_2}{2}) u = \ddot{f}_1 - \ddot{f}_2. \quad (3.194)$$

В этом уравнении, в отличие от (3.192), имеется множитель  $1 + (f_1 + f_2)/2$ , характеризующий переменную жесткость узла и подтверждающий нелинейность закона Герца. Заметим, что уравнение, аналогичное (3.194), но более общее, было получено при рассмотрении параметрического резонанса в подразд. 3.6.

Поскольку смещения шариков в окнах сепаратора не учитываем, угловая скорость центра шарика одинакова для всех шариков и совпадает с угловой скоростью сепаратора

$$\omega_c = R_2 \Omega / (2R^*), \quad (3.195)$$

где  $\Omega$  — угловая скорость маховика;  $R_2$  и  $R^*$  — расстояния от оси вращения маховика до точки контакта шарика с внутренним кольцом и до центра шарика соответственно.

Значение  $R_2 = p_4^0 + p_2^0 (1 - \cos\alpha)$  зависит от угла контакта. Изменение угла контакта  $\alpha^n$  в  $n$ -м подшипнике при осевом относительном смещении  $z$  колец

$$\Delta\alpha = -z \cos\alpha^*/v^*,$$

где  $v^*$  — расстояние (в состоянии предварительного натяга) между центрами кривизны сечений наружного и внутреннего колец плоскостью, проходящей через центр шарика и ось узла.

Значение  $R_2 = p_4^0 + p_2^0 - p_2^0 \cos [(-1)^n \alpha^* + \Delta\alpha] \approx R_2^* + (-1)^n \times \sin\alpha^* p_2^0 \Delta\alpha$ . Из этого выражения и формулы (3.195) следуют формулы для угловых скоростей  $\omega_{c1}$ ,  $\omega_{c2}$  сепараторов левого и правого подшипников:

$$\omega_{cn} = \dot{\varphi}_n = \omega_c^* \left\{ 1 - (-1)^n \frac{p_2^0 \sin 2\alpha^* z}{2v^* [p_4^0 + p_2^0 (1 - \cos\alpha^*)]} \right\},$$

где  $\omega_c^*$  — номинальная угловая скорость сепаратора, равная  $R_2^* \Omega / (2R^*)$ .

Орбитальное движение шариков и вращение сепараторов описываются уравнениями

$$\dot{\varphi} = \omega_c^*; \quad \dot{\theta} = -K_\theta (u - f_1 + f_2),$$

где

$$\varphi = (\varphi_1 + \varphi_2)/2;$$

$$\theta = (\varphi_2 - \varphi_1)/2;$$

$$K_\theta = \omega_c^* \frac{p_2^0 \delta^* \cos\alpha^*}{[p_4^0 + p_2^0 (1 - \cos\alpha^*)] v^*}.$$

Вследствие учета лишь отклонений формы дорожки наружного кольца  $f_1$  и  $f_2$  являются известными функциями углов  $\varphi_1 = \varphi - \theta$  и  $\varphi_2 = \varphi + \theta$ . Итак, приведенное осевое смещение  $u$  маховика, полусумма  $\varphi$  и полуразность  $\theta$  углов поворота сепараторов удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} \ddot{u} + \omega_z^2 [1 + 0,5f_1(\varphi - \theta) + 0,5f_2(\varphi + \theta)] u &= \ddot{f}_1(\varphi - \theta) - \ddot{f}_2(\varphi + \theta); \\ \dot{\varphi} &= \omega_c^*; \\ \dot{\theta} &= -K_\theta [u - f_1(\varphi - \theta) + f_2(\varphi + \theta)]. \end{aligned} \quad (3.196)$$

Для дальнейшего анализа используем наиболее простой вид функций  $f_1$  и  $f_2$  (чертка сверху означает комплексное сопряжение):

$$f_n = a_n e^{iZ\varphi_n} + \bar{a}_n^{-iZ\varphi_n}; \quad n = 1, 2; \quad a_n = -cz_3 \cos\alpha^* / (2\delta^*). \quad (3.197)$$

Этот вид соответствует наличию только  $Z$ -й гармоники отклонений формы наружного кольца. При  $s = Z\varphi$  и  $v = Z\theta$  система (3.196) принимает вид

$$u'' + \eta^2 [1 + \xi_2(v) e^{is} + \bar{\xi}_2(v) e^{-is}] u = -[\xi_1(v) e^{is} + \bar{\xi}_1(v) e^{-is}]''; \quad (3.198)$$

$$v' = -\epsilon [u + \xi_1(v) e^{is} + \bar{\xi}_1(v) e^{-is}],$$

где

$$\eta = \omega_z / (Z\omega_c^*); \quad \epsilon = K_\theta / \omega_c^*; \quad \xi_1(v) = a_2 e^{iv} - a_1 e^{-iv};$$

$$\xi_2(v) = 0.5(a_2 e^{iv} + a_1 e^{-iv}),$$

а штрихом обозначено дифференцирование по безразмерному времени  $s$ .

Значение  $\epsilon$  для приборного шарикового подшипника имеет порядок  $10^{-3}$ , поэтому при решении первого уравнения системы (3.198)  $v$  можно считать практически постоянным параметром. Решение ищем в виде

$$u = u_0 + \bar{u}_1 e^{is} + u_1 e^{-is}, \quad (3.199)$$

где  $u_0$  и  $u_1$  — медленно меняющиеся функции, причем  $u_0$  — вещественно-значная, а  $u_1$  — комплекснозначная.

Смысл этих функций следующий:  $u_0$  определяет медленное смещение среднего значения положения равновесия,  $2|u_1|$  — амплитуда высокочастотных колебаний,  $\arg u_1$  — фаза этих колебаний. Подстановка (3.199) в первое уравнение (3.198) с учетом малости  $u'_0, u''_0, u'_1, u''_1$  и приравнивание постоянных составляющих и коэффициентов при  $e^{is}$  дают

$$u_0 = 2 \operatorname{Re}(\bar{\xi}_1 \xi_2) / \eta';$$

$$u_1 = (\xi_1 - \xi_2 \eta^2 u_0) / (\eta^2 - 1);$$

$$u_1 + \xi_1 = \frac{\eta^2}{\eta^2 - 1} \frac{\xi_1 \eta + 2\xi_2 \operatorname{Re}(\bar{\xi}_1 \xi_2)}{\eta'},$$

$$\eta' = \eta^2 - 1 - 2|\xi_2|^2 \eta^2. \quad (3.200)$$

Формулы (3.199), (3.200) описывают вынужденные колебания. Слагаемые, обусловливающие собственные колебания (решения однородного уравнения), не приняты во внимание вследствие наличия демпфирования в подшипниковом узле, которое мы для упрощения уравнений не учитываем. Формулы (3.199), (3.200) являются приближенными, поскольку коэффициенты при старших гармониках в разложении и не учтены, хотя они не равны нулю. При параметрическом резонансе собственные колебания могут и не быть погашены демпфированием, однако в подшипниковых узлах, как правило, условия параметрического резонанса не выполняются. После подстановки выражений  $\xi_1(v)$  и  $\xi_2(v)$  в формулу (3.200) для  $u_0$  приводим ее к виду

$$u_0 = \frac{|\alpha_1|^2 - |\alpha_2|^2}{q_1 - q_2 \cos 2(v - \gamma')}, \quad (3.201)$$

где  $q_1 = \eta^2 - 1 - 0.5\eta^2(|\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2)$ ;  $q_2 = \eta^2 |\alpha_1 \alpha_2|$ ;

$$\gamma' = 0.5(\arg \alpha_1 - \arg \alpha_2).$$

Выражение в знаменателе (3.201) может обращаться в нуль, что соответствует резонансу (не параметрическому), мы же рассматриваем режим, при котором резонанса нет.

Подстановка выражения (3.199) во второе уравнение системы (3.198) приводит к уравнению

$$v' = -\epsilon \left\{ u_0(v) + [u_1(v) + \xi_1(v)] e^{is} + [\bar{u}_1(v) + \bar{\xi}_1(v)] e^{-is} \right\}. \quad (3.202)$$

Для приближенного решения (3.202) проведем усреднение по "быстроходному" времени  $s$ . В результате получим сумму медленно меняющейся функции и быстрых осцилляций малой амплитуды:

$$v = v_0(\sigma) + \epsilon v_1(\sigma) e^{is} + \epsilon \bar{v}_1(\sigma) e^{-is}, \quad (3.203)$$

где  $\sigma = \epsilon s$  — "медленное" время. Подстановка (3.203) в (3.202) с учетом только членов нулевого порядка по  $\epsilon$  дает уравнение для определения  $v_0$ :

$$\frac{dv_0}{d\sigma} = \frac{|\alpha_2|^2 - |\alpha_1|^2}{q_1 - q_2 \cos 2(v_0 - \gamma')} \quad (3.204)$$

и выражение для  $v_1$ :

$$v_1 = +i[u_1(v_0) + \xi_1(v_0)].$$

Итак, задача о биениях свелась к уравнению (3.204), решение которого удовлетворяет следующему алгебраическому соотношению:

$$q_1(v_0 - \gamma') - 0.5q_2 \sin 2(v_0 - \gamma') = C(\sigma - \sigma_0), \quad (3.205)$$

где  $C = |\alpha_2|^2 - |\alpha_1|^2$ ;  $\sigma_0$  — константа интегрирования.

При отсутствии резонанса левая часть этого уравнения является возрастающей функцией, поэтому (3.205) однозначно решается относительно  $v_0$ . На рис. 3.21 приведены характерные графики функций  $v_0(\sigma)$  (штриховая линия) и  $v(\sigma)$  (сплошная линия), причем  $v$  отличается от  $v_0$  лишь высокочастотными колебаниями малой амплитуды порядка  $\epsilon$ .

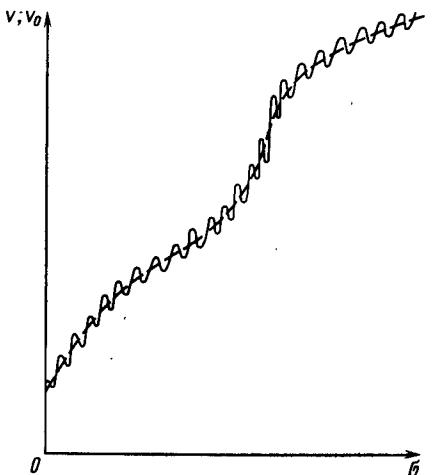


Рис. 3.21

**Пример 3.4.** Определим основные характеристики биений. К основным характеристикам относятся период биений, среднее значение смещения центра масс маховика, изменение амплитуды огибающей высокочастотных колебаний маховика (амплитуда биений), медленное изменение собственной частоты осевых колебаний, суммарная мощность, расходуемая при работе подшипников, и разность мощностей, расходуемых при работе левого и правого подшипников. Рассмотрим узел с подшипниками 106074 при следующих числовых данных:  $p_1^0 = 2$  мм,  $p_2^0 = p_4^0 = 1,08$  мм,  $p_3^0 = 5,42$  мм,  $p_5^0 = 3,3985$  мм;  $Z = 7$ ; материал шариков и колец – сталь ШХ15, модуль упругости  $E = 2,1 \cdot 10^{11}$  Па, коэффициент Пуассона  $\nu = 0,3$ ; угловая скорость ротора  $\Omega = 3142$  рад/с; усилие предварительного осевого натяга  $|F_z^*| = 18$  Н; масса маховика  $M_r = 230$  г; амплитуда седьмой гармоники отклонений формы наружного кольца соответственно левого и правого подшипников такова, что  $4a_1\delta^* = 0,1\delta^*$  и  $4a_2\delta^* = 0,2\delta^*$  ( $\delta^*$  – контактное сближение в условиях предварительного натяга).

**Решение.** Проведем статический силовой расчет, используя метод последовательных приближений.

В первом приближении принимаем  $\delta_0 = 0$  и определяем последовательно

$$v = p_1^0 + p_2^0 - p_5^0 + \delta_0 = 1,08 + 1,08 - 2,00 = 0,16 \text{ мм};$$

$$\alpha = \arccos\left(\frac{p_1^0 + p_2^0 + p_4^0 - p_3^0}{v}\right) = \arccos\left(\frac{3,3985 + 2,16 - 5,42}{0,16}\right) =$$

$$= \arccos 0,8625 = 30^\circ 40' ; |\sin \alpha| = 0,506; \quad \alpha < 0;$$

$$P = F_z^*/(Z \sin \alpha) = 18/(7 \cdot 0,506) = 5,08 \text{ Н}; R_{11} = R_{12} = \left(\frac{2}{2} - \frac{1}{1,08}\right)^{-1} =$$

$$= 13,5 \text{ мм}; R_{21} = \left(\frac{2}{2} - \frac{\cos \alpha}{5,42 - 1,08(1 - \cos \alpha)}\right)^{-1} =$$

$$= \left(1 - \frac{0,8625}{5,42 - 1,08 \cdot 0,14}\right)^{-1} = 1,19 \text{ мм}; R_{22} = \left(1 + \frac{0,8625}{3,398 + 1,08 \cdot 0,14}\right)^{-1} =$$

$$= 0,805 \text{ мм}; R_{21}/R_{11} \approx 0,088; R_{22}/R_{12} \approx 0,44.$$

По табл. 2.1 находим  $k_\delta^7 \approx 0,79$ ,  $k_\delta^2 \approx 0,68$ . По формулам (3.7), (3.8) вычисляем

$$K_1 = \frac{2,1 \cdot 10^{11}}{0,91} \left(\frac{1}{13,5 \cdot 10^{-3}} + \frac{1}{1,19 \cdot 10^{-3}}\right)^{-1/2} \left(\frac{1}{0,79}\right)^{3/2} =$$

$$= 1,09 \cdot 10^{10} \text{ Па} \cdot \text{м}^{1/2};$$

$$K_2 = \frac{2,1 \cdot 10^{11}}{0,91} \left(\frac{1}{13,5 \cdot 10^{-3}} + \frac{1}{0,805 \cdot 10^{-3}}\right)^{-1/2} \left(\frac{1}{0,68}\right)^{3/2} =$$

$$= 1,13 \cdot 10^{10} \text{ Па} \cdot \text{м}^{1/2};$$

$$K_0 = 3,92 \cdot 10^9 \text{ Па} \cdot \text{м}^{1/2}.$$

$$\text{По формуле (3.8)} \quad \delta^* = \left(\frac{5,08}{3,92 \cdot 10^9}\right)^{2/3} = 1,19 \text{ мкм}.$$

Второе приближение дает малую поправку значения угла контакта, поэтому ограничимся первым и примем  $\alpha^* = \alpha$ ,  $v^* = v$ . Вычислим  $R_m^*$ ,  $R^*$ :

$$R_1^* = 5,42 - 1,08(1 - 0,8625) = 5,27 \text{ мм}; R_2^* = 3,3985 + 1,08(1 - 0,8625) = 3,55 \text{ мм}; R^* = (R_1^* + R_2^*)/2 = 4,41 \text{ мм}.$$

По формуле (3.195) определим

$$\omega_c^* = \frac{3,55}{2 \cdot 4,41} \cdot 3142 = 1264 \text{ рад/с};$$

$$f_c = \omega_c^* / (2\pi) = 201 \text{ Гц}$$

По формуле (3.70) вычислим осевую жесткость:

$$K_z = \frac{3 \cdot 5,08 \cdot 7}{1,19 \cdot 10^{-6}} (0,506)^2 = 2,295 \cdot 10^7 \text{ Н/м}.$$

Собственная угловая частота осевых колебаний

$$\omega_z = \sqrt{K_z/M_r} = \sqrt{2,295 \cdot 10^7 / 0,23} = 9989 \text{ рад/с};$$

$$f_z = \omega_z / (2\pi) = 1584 \text{ Гц}.$$

Перейдем к динамическому расчету. Определим частоту биений. Период биений – наименьший интервал времени, через который  $v_0$  изменяется на  $\pi$ . Из (3.205) получаем, что в единицах безразмерного времени  $\sigma$  период равен  $\pi q_1 / |C|$ . Пересчет в исходное время  $t$  дает для частоты биений выражение

$$f_6 = \frac{C}{2Zf_c \epsilon} = \frac{C}{2Zf_c} \frac{p_2^0 \delta^* \cos \alpha^*}{(p_4^0 + p_2^0 - p_2^0 \cos \alpha^*) v^*} \times \\ \times \frac{||a_2||^2 - ||a_1||^2}{\eta^2 - 1 - 0,5\eta^2 (||a_1||^2 + ||a_2||^2)}, \quad (3.206)$$

где  $\eta = f_z / (Zf_c)$ .

Из исходных данных получаем, что  $a_1 = 0,025$ ,  $a_2 = 0,05$ . Тогда

$$f_6 = \frac{2 \cdot 7 \cdot 201}{1,08 \cdot 1,2 \cdot 10^{-6} \cdot 0,8625} \times \\ \times \frac{1,08 \cdot 1,2 \cdot 10^{-6} \cdot 0,8625}{(4,48 - 1,08 \cdot 0,8625) 0,16 \cdot 10^{-6}} \times \\ \times \frac{0,05^2 - 0,025^2}{[1584 / (7 \cdot 201)]^2 - 1 - [1584 / (7 \cdot 201)]^2 (0,05^2 + 0,025^2)/2} = 0,04 \text{ Гц},$$

Определим среднее значение смещения центра масс. Выражение для  $z(t)$ , согласно (3.193), (3.197), (3.199), имеет вид

$$z = \frac{\delta^*}{\sin \alpha^*} [u_0 + (u_1 + \xi_1) e^{i\omega_c^* t} + (\bar{u}_1 + \bar{\xi}_1) e^{-i\omega_c^* t}]. \quad (3.207)$$

Отсюда среднее значение смещения центра масс

$$|z_0| = \frac{\delta^*}{\sin\alpha^*} \quad u_0 = \frac{\delta^*}{\sin\alpha^*} \frac{||a_2|^2 - |a_1|^2|}{q_1 - q_2 \cos 2(v_0 - \gamma')} , \quad (3.208)$$

при этом минимальное значение

$$|z_0|_{\min} = \frac{\delta^*}{\sin\alpha^*} \frac{||a_2|^2 - |a_1|^2|}{\eta^2 - 1 - 0,5\eta^2 (|a_2| - |a_1|)^2} , \quad (3.209)$$

максимальное значение

$$|z_0|_{\max} = \frac{\delta^*}{\sin\alpha^*} \frac{||a_2|^2 - |a_1|^2|}{\eta^2 - 1 - 0,5\eta^2 (|a_2| + |a_1|)^2} . \quad (3.210)$$

Для рассматриваемого узла

$$|z_0|_{\min} = \frac{1,2}{0,506} \frac{0,05^2 - 0,025^2}{1,275 - 1 - 0,637 \cdot 6,25 \cdot 10^{-4}} = 0,0162 \text{ мкм};$$

$$|z_0|_{\max} = \frac{1,2}{0,506} \frac{0,0019}{0,271} = 0,164 \text{ мкм}.$$

На рис. 3.22 приведен характерный график зависимости  $u$  от  $\omega_C^* t$ .

Найдем амплитуды биений. Из (3.207) следует, что амплитуда  $A(t)$  огибающей высокочастотных колебаний равна  $2\delta^*|u_1 + \xi_1|/\sin\alpha^*$ . Из формулы (3.200) без отброшенных кубических по  $\xi_1$  и  $\xi_2$  членов получаем

$$A(t) = \frac{2\delta^*}{\sin\alpha^*} \frac{\eta^2 |\xi_1|}{\eta'} = \frac{2\delta^* \eta^2}{\sin\alpha^*} \times \\ \times \frac{\sqrt{|a_1|^2 + |a_2|^2 - 2|a_1 a_2| \cos 2(v_0 - \gamma')}}{\eta^2 - 1 - 0,5\eta^2 (|a_1|^2 + |a_2|^2) - \eta^2 |a_1 a_2| \cos 2(v_0 - \gamma')} .$$

При условии

$$\eta^2 - 1 - \eta^2 (|a_1|^2 + |a_2|^2) - 0,5\eta^2 (|a_1| + |a_2|)^2 \geq 0,$$

которое при указанных числовых значениях выполнено,  $A$  является убывающей функцией от  $\cos 2(v_0 - \gamma')$ . Поэтому при  $\cos 2(v_0 - \gamma') = \pm 1$

$$A_{\max} = \frac{2\delta^* \eta^2}{\sin\alpha^*} \frac{|a_1| + |a_2|}{\eta^2 - 1 - 0,5\eta^2 (|a_2| - |a_1|)^2} ;$$

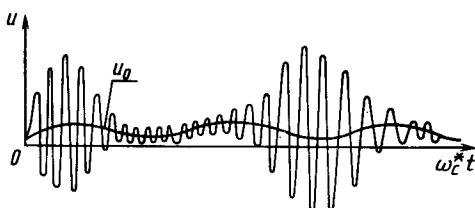


Рис. 3.22

$$A_{\min} = \frac{2\delta^* \eta^2}{\sin\alpha^*} \frac{||a_1| - |a_2||}{\eta^2 - 1 - 0,5\eta^2 (|a_1| + |a_2|)^2} .$$

Для амплитуды биений, равной полуразности экстремальных значений, верна формула

$$A_B = \frac{\delta^* \eta^2}{\sin\alpha^*} \left[ \frac{||a_1| - |a_2||}{\eta^2 - 1 - 0,5\eta^2 (|a_2| - |a_1|)^2} - \right. \\ \left. - \frac{||a_1| - |a_2||}{\eta^2 - 1 - 0,5\eta^2 (|a_1| + |a_2|)^2} \right]. \quad (3.211)$$

Для рассматриваемого узла

$$A_{\max} = \frac{2 \cdot 1,2 \cdot 1,275 (0,025 + 0,05)}{0,506 (1,275 - 1 - 0,637 \cdot 0,0006)} = 1,98 \text{ мкм};$$

$$A_{\min} = \frac{2 \cdot 1,2 \cdot 1,275 \cdot 0,025}{0,506 (1,275 - 1 - 0,637 \cdot 0,075^2)} = 0,67 \text{ мкм};$$

$$A_B = 0,66 \text{ мкм}.$$

Определим сдвиг собственной частоты. Амплитуда колебаний  $z_0$  [см. формулу (3.208)] становится бесконечной, если  $\eta^2 - 1 - 2|\xi_2|/\eta^2 = 0$ . При отсутствии отклонений геометрических параметров ( $\xi_2 = 0$ ) резонанс наступает при  $\eta = 1$ , т. е. при  $\omega = Z\omega_C^* = \omega_Z$ ; при наличии же указанных отклонений знаменатель обращается в нуль при

$$\omega = \omega_Z \sqrt{1 - 2|\xi_2|^2} = \omega_Z \sqrt{1 - (|a_1|^2 + |a_2|^2)/2 - |a_1 a_2| \cos 2(v_0 - \gamma')} .$$

Это можно интерпретировать как сдвиг частоты собственных колебаний, который не постоянен, а зависит от времени через функцию  $v_0$ . Резонансная угловая частота медленно колеблется между

$$\omega_{\max} = \omega_Z \sqrt{1 - 0,5(|a_2| - |a_1|)^2}$$

и

$$\omega_{\min} = \omega_Z \sqrt{1 - 0,5(|a_1| + |a_2|)^2},$$

все время оставаясь меньше  $\omega_Z$ . Относительное изменение частоты

$$\frac{\omega_{\max} - \omega_{\min}}{\omega_Z} = \sqrt{1 - 0,5(|a_2| - |a_1|)^2} - \sqrt{1 - 0,5(|a_1| + |a_2|)^2} .$$

Для рассматриваемого узла

$$\frac{\omega_{\max} - \omega_{\min}}{\omega_Z} = \sqrt{1 - 0,5 \cdot 0,025^2} - \sqrt{1 - 0,5 \cdot 0,075^2} = 1,25 \cdot 10^{-3} \approx 0,12 \text{ \%}.$$

Потери мощности в подшипниках обусловлены тремя основными причинами:

трением сепаратора о базу, сопротивлением качению шариков, угловой скоростью  $\omega_n$  и дифференциальным проскальзыванием шариков. Первые две причины приводят к тому, что в точках контакта шариков с внутренним кольцом к последнему приложена некоторая сила, тормозящая вращение маховика. В рассмотренной модели биений эта сила не учтена. Если считать указанную силу постоянной, то ее момент относительно оси вращения маховика пропорционален плечу, т. е.  $R_2^*$ . Таким образом, это слагаемое момента сопротивления вращению

$$M_{\text{rot}}^n = M_0 [1 + (-1)^{n+1} \frac{p_2^0 \sin \alpha^* \cos \alpha^*}{(p_4^0 + p_2^0 - p_2^0 \cos \alpha^*) v^*} z],$$

где  $M_0$  – момент (без учета динамических эффектов), обусловленный только скольжением в центрах контактов и моментами качения, действующими на шарики.

Для определения низкочастотных изменений мощности надо момент умножить на угловую скорость маховика и усреднить по "быстрому" времени. Тогда мощность

$$N_{\text{rot}}^n = M_0 \Omega [1 + (-1)^{n+1} \frac{p_2^0 \delta^* \cos \alpha^*}{(p_4^0 + p_2^0 - p_2^0 \cos \alpha^*) v^*} u_0].$$

Отсюда следует, что сумма мощностей постоянна, а разность пропорциональна медленному осевому смещению центра масс маховика.

Слагаемое, связанное с  $\omega_n \neq 0$  и дифференциальным проскальзыванием шариков, зависит от нагрузки в контактах и меняется в соответствии с медленным изменением  $z$  и фактического осевого усилия.

В изложенном методе расчета не учтены радиальные и угловые колебания маховика, а из всех отклонений формы и размеров рабочих поверхностей рассмотрена только  $Z$ -я гармоника отклонений формы желобов наружных колец. Наличие аналогичных отклонений формы внутренних колец приводит к тому, что спектр колебаний функций  $f_1$  и  $f_2$  содержит много несоизмеримых частот. Более полный учет спектра отклонений приведет к обнаружению нестабильности характеристик биений типа почти периодических колебаний. В эксперименте обнаружены колебания маховика, близкие к релаксационным (разрывным). Это, вероятно, связано с попаданием колебаний подшипникового узла, возмущенного всеми видами отклонений геометрических параметров, в резонансную область.

Помимо отклонений формы, функции  $f_1$  и  $f_2$  зависят от случайных факторов, например, от распределения смазочного материала по поверхности дорожки качения, которое постоянно меняется вследствие миграции масла и срыва капель с сепаратора. Поэтому при изучении нестабильностей имеет смысл считать  $f_1$  и  $f_2$  стационарными случайными функциями с более или менее известными спектральными и корреляционными свойствами. При таком подходе можно ожидать не только почти периодических нестабильностей. Полученное числовое значение  $A_{\max}$  составляет около 70 % осевого сближения  $\delta^*/\sin \alpha^*$  колец, обусловленного предварительным натягом. Отсюда следует, что линеаризация не всегда правомерна. На это указывает и возможность резонанса. В частности, шарики могут периодически разгружаться. В данной теории режиму самосинхронизации соответствует случай, когда  $|a_1| = |a_2|$ , что маловероятно.

Изложенные расчетные формулы описывают такие экспериментально наблюдавшиеся А.С. Райковым и Э.В. Строгановой эффекты, как "плавание" собственной частоты и среднего положения центра масс. В эксперименте замечены биения с частотами примерно 1 Гц и ниже. Наблюдалась также убывающая зависимость амплитуды биений от частоты. Пусть  $|a_2| = 0,05$ , а  $|a_1|$  принимает значения 0; 0,025; 0,05. Тогда по формулам (3.206) и (3.211)

$$f_{6;0} = 5,52 \frac{0,05^2}{1,275 - 1 - 0,637 \cdot 0,05^2} = 0,051 \text{ Гц};$$

$$f_{6;0,025} = 5,52 \frac{0,05^2 - 0,025^2}{0,265 - 0,637 (0,05^2 + 0,025^2)} = 0,042 \text{ Гц};$$

$$f_{6;0,05} = 0; A_{6;0} = 0;$$

$$A_{6;0,025} = \frac{1,2 \cdot 1,275}{0,506} \left( \frac{0,075}{0,275 - 0,637 \cdot 0,025^2} - \frac{0,025}{0,275 - 0,637 \cdot 0,075^2} \right) = 0,28 \text{ мкм};$$

$$A_{6;0,05} = 2,98 \frac{0,1}{0,275} = 1,12 \text{ мкм}.$$

**Низкочастотные радиальные биения, связанные с отклонениями от сферической формы шариков.** Для гиродвигателей некоторых типов частота собственных радиальных колебаний маховика отличается от частоты вынужденных колебаний, вызванных отклонениями размеров шариков, всего на несколько герц (шариковый резонанс). Ниже на простой расчетной схеме, разработанной Б.В. Федосовым, показано, что резонанс может быть одной из причин возникновения нерегулярных низкочастотных биений.

Рассмотрим маховик, вращающийся на двух радиально-упорных шариковых подшипниках, при следующих предположениях.

1. Учитываем только радиальные смещения  $x$  и  $y$  центра масс маховика.
2. Массой шариков и сепараторов пренебрегаем.

3. Каждый подшипник рассматриваем как систему с  $Z + 1$  степенями свободы. Одна степень соответствует вращению комплекта шариков вместе с сепаратором. Пространственные движения центра сепаратора, а также смещения шариков в окнах сепаратора не учитываем. Таким образом, положение центров шариков задается углами  $\varphi + 2\pi(j-1)/Z$ ;  $j = 1, \dots, Z$  (индекс  $n$ , обозначающий номер подшипника, временно опустим). Остальные степени свободы соответствуют качению шариков и задаются углами  $\psi_j$ . Ось  $l_j$  вращения  $j$ -го шарика (рис. 3.23) лежит в плоскости, проходящей через

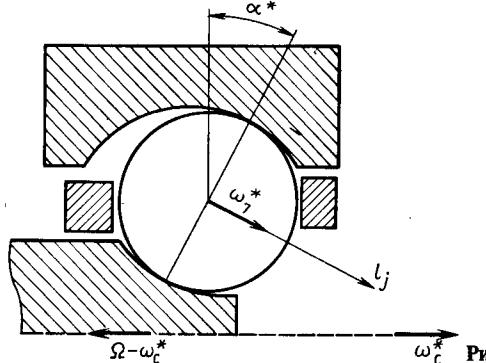


Рис. 3.23

ось подшипника и центр шарика, и перпендикулярна линии, соединяющей точки контакта с кольцами;  $\psi_j$  — угол поворота шарика вокруг этой оси в системе координат, связанной с сепаратором.

Кроме вращения вокруг оси  $l_j$ , шарик участвует во вращении вместе с сепаратором вокруг оси подшипника. Проекция вектора полной (в неподвижной системе координат) угловой скорости шарика на ось  $l_j$  равна  $\psi_j - \alpha^*$ , где  $\alpha^*$  — угол контакта в условиях предварительного осевого натяга. Действительно, если при неподвижном сепараторе поверхности наружного кольца и вала движутся так, как показано на рис. 3.23, то вектор относительной угловой скорости  $\omega_7^*$  шарика направлен по стрелке вдоль оси  $l_j$ . В то же время вектор переносной угловой скорости шарика, центр которого неподвижен относительно сепаратора, направлен на рис. 3.23 влево. Сложение двух векторов дает приведенную выше формулу, первое слагаемое в которой определяет момент сил трения, действующих на шарик.

4. Из всех отклонений размеров и формы учтем только отклонение от сферической формы шариков. При этом отклонение среднего диаметра шарика есть функция угла  $\psi_j$ :

$$p'_{7j}(\psi_j) = \sum_k d_{kj} \exp \left\{ i(2k\psi_j + \alpha_{kj}) \right\}.$$

где  $d_{kj} = d_{-kj} = 0,5A_{kj}$  ( $k \neq 0$ ) — половина амплитуды  $k$ -й гармоники;  $d_{0j} = A_{0j} - p'_7$  — разность между средним и номинальным диаметрами шарика;  $\alpha_{kj} = -\alpha_{-kj}$  — постоянная фаза.

Отметим, что разложение в ряд Фурье  $p'_{7j}$  содержит только четные гармоники. Суммирование по  $k$  проводится от  $-\infty$  до  $\infty$ , хотя на практике учитывают только несколько первых гармоник.

5. Рассматриваются только два вида сил: упругое взаимодействие шариков с кольцами по линеаризованному закону Герца и силы вязкого трения в контактах шариков с кольцами. Потенциальная энергия ротора, как следует из формулы (3.82),

$$\begin{aligned} \Pi = & K_r \left\langle \frac{x^2 + y^2}{2} + \operatorname{Re} \left[ (x - iy) \sum_k \sum_{j=1}^Z c_{kj}^1 \times \right. \right. \\ & \times \exp \left\{ i(2k\psi_j^1 + \varphi_1) \right\} + c_{kj}^2 \exp \left\{ i(2k\psi_j^2 + \varphi_2) \right\} \left. \right] + \\ & + \frac{2\delta^*}{3Z \cos^2 \alpha^*} \sum_{n=1,2} \sum_{j=1}^Z \sum_k d_{kj}^n \exp \left\{ i(2k\psi_j^n + \alpha_{kj}^n) \right\} + \\ & + \frac{1}{2Z \cos^2 \alpha^*} \sum_{n=1,2} \sum_{j=1}^Z \sum_{k,l} d_{kj}^n d_{lj}^n \times \\ & \times \exp \left\{ i(2k\psi_j^n + 2l\psi_j^n + \alpha_{kj}^n + \alpha_{lj}^n) \right\} \rangle, \end{aligned} \quad (3.212)$$

где

$$c_{kj}^n = \frac{(-1)^m d_{kj}^n}{Z \cos \alpha^*} \exp \left\{ i \left[ \frac{2\pi}{Z} (j-1) + \alpha_{kj}^n \right] \right\}.$$

Считаем, что сила и момент, действующие на шарик, линейно связаны с отклонениями  $\omega_c$ ,  $\omega_l$  от кинематических значений [см. формулы (3.163)]. Кроме того, положим в (3.163)  $\tilde{K}_1 \alpha_{s1} = \tilde{K}_2 \alpha_{s2}$ , тогда

$$F_{ct} = (\tilde{K}_1 \alpha_{s1} + \tilde{K}_2 \alpha_{s2}) R^* (\omega_c - \omega_c^*) = 2\tilde{K}_1 \alpha_{s1} R^* (\omega_c - \omega_c^*);$$

$$M_l = 0,5 \tilde{K}_1 \alpha_{s1} p_7^{02} (\omega_l - \omega_l^*) = 0,5 \tilde{K}_1 \alpha_{s1} p_7^{02} (\dot{\psi}_j - \omega_7^*),$$

где  $\omega_7^*$  — номинальное значение  $\dot{\psi}_j$  для шарика, который катится без проскальзывания.

Силы, действующие на сепаратор со стороны каждого шарика, равны  $-F_{ct}$ , а момент относительно оси симметрии подшипника, действующий на сепаратор,

$$M = -\tilde{\mu} (\dot{\varphi} - \omega_c^*); \quad \tilde{\mu} = 2Z\tilde{K}_1 \alpha_{s1} R^{*2}.$$

Обозначим  $\tilde{\nu} = 0,5 \tilde{K}_1 \alpha_{s1} p_7^{02}$ . Используя выражение (3.135) для  $\tilde{K}_m$ , получим

$$\begin{aligned} \tilde{\mu} &= 2\pi Z R^{*2} \frac{\mu(0, T_1) \alpha_{s1}}{h_1} k_{11} a_1 b_1; \\ \tilde{\nu} &= 0,5 \pi (p_7^0)^2 \frac{\mu(0, T_1) \alpha_{s1}}{h_1} k_{11} a_1 b_1, \end{aligned} \quad (3.213)$$

где  $a_1, b_1$  — большая и малая полуоси эллипса контакта.

Поскольку момент  $M$  обусловлен силами, действующими на сепаратор со стороны шариков и возникающими вследствие трения в контактах шариков с кольцами, можно считать, что  $M$  — момент, действующий на систему *сепаратор + комплект шариков* со стороны колец. Заметим, что  $\tilde{\nu}/\tilde{\mu} = p_7^{02}/(4ZR^*{}^2) \ll 1$ .

При указанных предположениях уравнения движения маховика, сепараторов и шариков имеют вид

$$\begin{aligned}\ddot{x} + h_r \dot{x} &= -\frac{1}{M_r} \frac{\partial \Pi}{\partial x}; \quad \ddot{y} + h_r \dot{y} = -\frac{1}{M_r} \frac{\partial \Pi}{\partial y}; \\ M_1 &= \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_1}; \quad M_2 = \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_2}; \quad M_j^1 = -\frac{\partial \Pi}{\partial \psi_j^1}; \quad M_j^2 = -\frac{\partial \Pi}{\partial \psi_j^2},\end{aligned}\quad (3.214)$$

где  $\varphi_n$  — угол поворота сепаратора в  $n$ -м подшипнике;  $M_j^n$  — момент сил трения, действующих на шарик со стороны колец;  $\partial \Pi / \partial \psi_j$  — момент упругих сил, препятствующих качению некруглого шарика.

Координаты центра масс ротора  $x$  и  $y$  меняются гораздо быстрее, чем угловые скорости сепараторов  $\varphi_1, \varphi_2$  и шариков  $\psi_1^1, \psi_2^1$ . Поэтому при определении  $x$  и  $y$  из первых двух уравнений (3.214) можно считать, что  $\dot{\varphi}_1 \approx \dot{\varphi}_2 \approx \omega_c^*, \dot{\psi}_j^1 \approx \dot{\psi}_j^2 \approx \omega_7^*, \varphi_1 \approx \varphi_2 \approx \psi_1^1 \approx \psi_2^2 \approx 0$ . Тогда

$$\begin{aligned}M_r(\ddot{x} + h_r \dot{x}) &= -K_r[x + \operatorname{Re} \sum_{k=1}^Z \sum_{j=1}^Z (c_{kj}^1 \exp \left\{ i(2k\psi_j^1 + \varphi_1) \right\} + \\ &+ c_{kj}^2 \exp \left\{ i(2k\psi_j^2 + \varphi_2) \right\})]; \\ M_r(\ddot{y} + h_r \dot{y}) &= -K_r[y + \operatorname{Im} \sum_{k=1}^Z \sum_{j=1}^Z (c_{kj}^1 \exp \left\{ i(2k\psi_j^1 + \varphi_1) \right\} + \\ &+ c_{kj}^2 \exp \left\{ i(2k\psi_j^2 + \varphi_2) \right\})],\end{aligned}$$

или в комплексной форме

$$\begin{aligned}M_r \left[ \frac{d^2}{dt^2} (x + iy) + h_r \frac{d}{dt} (x + iy) \right] + K_r(x + iy) = \\ = -K_r \sum_{k=1}^Z \sum_{j=1}^Z [c_{kj}^1 \exp \left\{ i(2k\psi_j^1 + \varphi_1) \right\} + \\ + c_{kj}^2 \exp \left\{ i(2k\psi_j^2 + \varphi_2) \right\}],\end{aligned}\quad (3.215)$$

Решение этого уравнения строится в виде

$$x + iy = \sum_k \sum_{j=1}^Z [A_{kj} \exp \left\{ i(2k\psi_j^1 + \varphi_1) \right\} + B_{kj} \exp \left\{ i(2k\psi_j^2 + \varphi_2) \right\}],$$

где  $A_{kj}, B_{kj}$  — медленно меняющиеся функции.

Подставив это выражение в (3.215), учитывая малость значений  $A_{kj}$ ,  $\dot{A}_{kj}$ ,  $B_{kj}$ ,  $\dot{B}_{kj}$ ,  $\dot{\varphi}_n$ ,  $\dot{\psi}_j^n$  и при  $\dot{\varphi}_n \approx \omega_c^*$ ,  $\dot{\psi}_j^n \approx \omega_7^*$ , получим выражения

$$\begin{bmatrix} A_{kj} \\ B_{kj} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} c_{kj}^1 \\ c_{kj}^2 \end{bmatrix} \frac{\omega_r^2}{\omega_r^2 - (2k\omega_7^* + \omega_c^*)^2 + i(2k\omega_7^* + \omega_c^*)h_r}, \quad (3.216)$$

где  $\omega_r = \sqrt{K_r/M_r}$ . Решение уравнения (3.215) принимает вид

$$x + iy = - \sum_k \sum_{j=1}^Z \frac{\omega_r^2 [c_{kj}^1 \exp \left\{ i(2k\psi_j^1 + \varphi_1) \right\} + c_{kj}^2 \exp \left\{ i(2k\psi_j^2 + \varphi_2) \right\}]}{\omega_r^2 - (2k\omega_7^* + \omega_c^*)^2 + i(2k\omega_7^* + \omega_c^*)h_r} \quad (3.217)$$

Третье и четвертое уравнения системы (3.214) можно записать так:

$$\begin{aligned}\tilde{\mu}(\dot{\varphi}_1 - \omega_c^*) &= K_r \operatorname{Im} [(x - iy) \sum_{k=1}^Z c_{kj}^1 \exp \left\{ i(2k\psi_j^1 + \varphi_1) \right\}], \\ \tilde{\mu}(\dot{\varphi}_2 - \omega_c^*) &= K_r \operatorname{Im} [(x - iy) \sum_{k=1}^Z c_{kj}^2 \exp \left\{ i(2k\psi_j^2 + \varphi_2) \right\}].\end{aligned}$$

Подставив (3.217) в эти уравнения, усреднив по интервалу времени, много большему периодов обращения шарика и сепаратора, и учитя, что все произведения  $\exp \left\{ i(2k\psi_j^n + \varphi_n) \right\} \exp \left\{ -i(2l\psi_s^m + \varphi_m) \right\}$  равны нулю при  $k \neq l$ , получим дифференциальные уравнения

$$\begin{aligned}\tilde{\mu}(\dot{\varphi}_1 - \omega_c^*) &= K_r \operatorname{Im} \left[ \sum_{k=1}^Z \sum_{j,l=1}^Z c_{kj}^1 (\bar{c}_{kl}^2 \exp \left\{ i[2k(\psi_j^1 - \psi_l^2) + \right. \right. \\ &\left. \left. + \varphi_1 - \varphi_2] \right\} + \bar{c}_{kl}^1 \exp \left\{ 2ik[\psi_j^1 - \psi_l^1] \right\}) (A_k + iB_k) \right];\end{aligned}\quad (3.218)$$

$$\begin{aligned}\tilde{\mu}(\dot{\varphi}_2 - \omega_c^*) &= K_r \operatorname{Im} \left[ \sum_{k=1}^Z \sum_{j,l=1}^Z c_{kj}^2 (\bar{c}_{kl}^1 \exp \left\{ i[2k(\psi_j^2 - \psi_l^1) + \varphi_2 - \varphi_1] \right\} + \right. \\ &\left. + \bar{c}_{kl}^2 \exp \left\{ 2ik[\psi_j^2 - \psi_l^2] \right\}) (A_k + iB_k) \right],\end{aligned}$$

где

$$A_k + iB_k = \frac{-\omega_r^2}{\omega_r^2 - (2k\omega_7^* + \omega_c^*)^2 - i(2k\omega_7^* + \omega_c^*)h_r}.$$

Теперь последние два уравнения системы (3.214) имеют вид

$$\begin{aligned} \tilde{\nu} (\dot{\psi}_j^1 - \omega_7^*) &= K_r \operatorname{Im} \left[ \sum_k \sum_{l=1}^Z 2k c_{kl}^1 (\bar{c}_{kl}^2 \exp \left\{ i[2k(\psi_j^1 - \psi_l^2) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \varphi_1 - \varphi_2] \right\} + \bar{c}_{kl}^1 \exp \left\{ 2ik[\psi_j^1 - \psi_l^1] \right\}) (A_k + iB_k) \right]; \\ \tilde{\nu} (\dot{\psi}_j^2 - \omega_7^*) &= K_r \operatorname{Im} \left[ \sum_k \sum_{l=1}^Z 2k c_{kl}^2 (\bar{c}_{kl}^1 \exp \left\{ i(2k(\psi_j^2 - \psi_l^1) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \varphi_2 - \varphi_1) \right\} + \bar{c}_{kl}^2 \exp \left\{ 2ik[\psi_j^2 - \psi_l^2] \right\}) (A_k + iB_k) \right]. \end{aligned} \quad (3.219)$$

Третье слагаемое в (3.212) при  $k = 0$  обращается в нуль после дифференцирования, а при  $k \neq 0$  – после усреднения. То же относится и к последнему слагаемому в (3.212) соответственно при  $k + l = 0$  и  $k + l \neq 0$ .

Решение системы из  $2(Z+1)$  уравнений (3.218), (3.219) затруднительно. Рассмотрим два простых частных случая.

1. Правый подшипник идеален, в левом имеются два шарика с отклонениями формы – 1-й и  $l$ -й. Тогда в системе (3.218), (3.219) правые части обращаются в нуль во всех уравнениях, кроме уравнений для  $\varphi_1$ ,  $\psi_1^1$  и  $\psi_l^1$ , в которых правые части зависят только от  $\eta = \psi_l^1 - \psi_1^1$ . Почленное вычитание уравнений для  $\psi_1^1$  и  $\psi_l^1$  приводит к одному уравнению для  $\eta = \psi_l^1 - \psi_1^1$ :

$$\begin{aligned} \tilde{\nu} \dot{\eta} &= \frac{2K_r}{Z^2 \cos^2 \alpha^*} \sum_k k \left\{ B_k (d_{kl}^{12} - d_{k1}^{12}) + \right. \\ &\quad \left. + 2A_k d_{kl}^1 d_{k1}^1 \sin [2k\eta + \alpha_{kl}^1 - \alpha_{k1}^1 + \frac{2\pi}{Z}(l-1)] \right\}. \end{aligned} \quad (3.220)$$

Пусть отлична от нуля только первая гармоника отклонений от сферической формы шарика (шарик овальный), т. е.  $k$  может принимать значения  $\pm 1$ . Введем обозначения:

$$d_l = d_{1l}^1 = d_{-1l}^1, \quad d_1 = d_{11}^1 = d_{-11}^1, \quad \alpha_l = \alpha_{1l}^1 = -\alpha_{-1l}^1;$$

$$\alpha_1 = \alpha_{11}^1 = -\alpha_{-11}^1, \quad \xi = \eta + 0,5(\alpha_l - \alpha_1);$$

$$q_0 = \frac{2K_r}{Z^2 \tilde{\nu} \cos^2 \alpha^*} (d_l^2 - d_1^2) (B_1 - B_{-1});$$

$$q_1 = \frac{4K_r}{Z^2 \tilde{\nu} \cos^2 \alpha^*} d_l d_1 (A_1 - A_{-1}) \sin \left[ \frac{2\pi}{Z} (l-1) \right];$$

$$q_2 = \frac{4K_r}{Z^2 \tilde{\nu} \cos^2 \alpha^*} d_l d_1 (A_1 + A_{-1}) \cos \left[ \frac{2\pi}{Z} (l-1) \right].$$

Уравнение (3.220) примет вид

$$\dot{\xi} = q_0 + q_1 \cos 2\xi + q_2 \sin 2\xi = q_0 + \sqrt{q_1^2 + q_2^2} \sin 2(\xi - \xi_0). \quad (3.221)$$

Его решение не устанавливается со временем при условии

$$|q_0| > \sqrt{q_1^2 + q_2^2}. \quad (3.222)$$

Период колебаний скорости  $\xi$  вычисляем по формуле

$$T = \left| \int_0^\pi \frac{d\xi}{q_0 + \sqrt{q_1^2 + q_2^2} \sin 2(\xi + \xi_0)} \right| \equiv \frac{\pi}{\sqrt{q_0^2 - q_1^2 - q_2^2}}.$$

График характерной зависимости  $\xi$  от  $t$  представлен на рис. 3.24.

**Пример 3.5.** Рассмотрим совмещенную опору с подшипниками 106082 (внутренние кольца выполнены на роторе). Параметры подшипника:  $p_1^0 = p_2^0 = 0,75$  мм;  $p_3^0 = 3,1$  мм;  $p_4^0 = 1,7765$  мм;  $p_5^0 = 1,3$  мм;  $Z = 6$ ; материал шариков и колец – сталь ШХ15; частота вращения ротора  $3 \cdot 10^4$  мин $^{-1}$  ( $\Omega = 3141$  рад/с); усилие предварительного осевого натяга  $|F_z^*| = 6$  Н; масса маховика  $M_r = 162$  г; амплитуды первой гармоники отклонений формы 1-го и  $l$ -го шариков соответственно  $2d_1 = 0,05$  мкм,  $2d_l = 0,1$  мкм. Подшипники смазаны перед началом работы на ресурс смазочным материалом Униол (ГУ 201150 – 73) с базовым маслом МС-20 (ГОСТ 21.743 – 76), загущенным комплексным кальциевым мылом синтетических жирных кислот. Температура дорожек качения равна 323 К. Вязкость  $\mu$  (0,293 К) равна 0,114 Па·с, пьезоэффициент  $a_p$  масла МС-20 при той же температуре равен  $2,25 \cdot 10^{-8}$  Па $^{-1}$ .

**Решение.** Проведем статический расчет, применив метод последовательных приближений.

В первом приближении принимаем  $\delta_0 = 0$  и последовательно вычисляем

$$v = 0,75 + 0,75 - 1,3 = 0,2 \text{ мм}; \quad |\alpha| = \arccos \frac{1,7765 + 0,75 + 0,75 - 3,1}{0,2} = 28,05^\circ;$$

$$\sin \alpha = 0,4703; \quad P = \frac{6}{6 \cdot 0,4703} = 2,126 \text{ Н}; \quad R_{11} = R_{12} = \left( \frac{2}{1,3} - \frac{1}{0,75} \right)^{-1} = 4,87 \text{ мм};$$

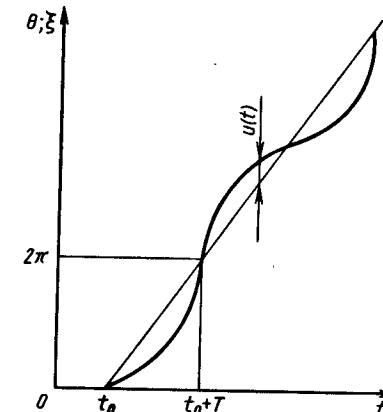


Рис. 3.24

$$R_{21} = \left( \frac{2}{1,3} - \frac{0,8825}{3,1 - 0,75 \cdot 0,1175} \right)^{-1} = 0,803 \text{ мм};$$

$$R_{22} = \left( \frac{2}{1,3} - \frac{0,8825}{1,7765 + 0,75 \cdot 0,1175} \right)^{-1} = 0,497 \text{ мм};$$

$$R_{21}/R_{11} \approx 0,16; R_{22}/R_{12} \approx 0,102.$$

По табл. 2.1 находим  $k_{\delta_1} = 0,874, k_{\delta_2} = 0,809$ . Затем

$$K_1 = \frac{2,1 \cdot 10^{11}}{0,91} \left( \frac{1}{4,87 \cdot 10^{-3}} + \frac{1}{0,803 \cdot 10^{-3}} \right)^{-1/2} \frac{1}{(0,874)^{3/2}} = \\ = 7,42 \cdot 10^9 \text{ Па} \cdot \text{м}^{1/2};$$

$$K_2 = \frac{2,1 \cdot 10^{11}}{0,91} \left( \frac{1}{4,87 \cdot 10^{-3}} + \frac{1}{0,497 \cdot 10^{-3}} \right)^{-1/2} \frac{1}{(0,809)^{3/2}} = \\ = 6,74 \cdot 10^9 \text{ Па} \cdot \text{м}^{1/2};$$

$$K_0 = [(7,42 \cdot 10^9)^{-2/3} + (6,74 \cdot 10^9)^{2/3}]^{3/2} = 2,5 \cdot 10^9 \text{ Па} \cdot \text{м}^{1/2};$$

$$\delta_0 = \left( \frac{2,126}{2,5 \cdot 10^9} \right)^{2/3} = 0,89 \text{ мкм.}$$

Во втором приближении вычисляем

$$v = 0,2 + 8,9 \cdot 10^{-4} = 0,20089 \text{ мм}; |\alpha| = \arccos \frac{0,1765}{0,20089} = 28,1^\circ.$$

Отличие значения  $\alpha$ , полученного во втором приближении, от начального значения угла контакта мало, поэтому считаем  $\alpha^* = -28,1^\circ$ . Далее определяем

$$R_1^* = 3,1 - 0,75 \cdot 0,1175 = 3,01 \text{ мм}; R_2^* = 1,7765 + 0,75 \cdot 0,1175 = 1,86 \text{ мм};$$

$$R^* = 0,5(3,01 + 1,86) = 2,43 \text{ мм.}$$

По формуле (3.14)

$$\omega_c^* = \frac{1,86 \cdot 3141}{2 \cdot 2,43} = 1202 \text{ рад/с.}$$

По формуле (3.179)

$$\omega_r^* = 3141 \frac{3,01 \cdot 1,86}{1,3 \cdot 2,43} = 5566 \text{ рад/с.}$$

По формуле (3.71) находим радиальную жесткость опоры

$$K_r = \frac{3}{2} Z \frac{P^*}{\delta^*} \cos^2 \alpha^* = 1,5 \cdot 6 \frac{2,126}{0,89 \cdot 10^{-6}} (0,8825)^2 = 1,625 \cdot 10^7 \text{ Н/м.}$$

Постоянную демпфирования  $h_r$  можно определить из уравнений (3.214) по результатам измерений собственной частоты радиальных колебаний. Для опоры без отклонений геометрических параметров при наличии внешней гармонической силы первое уравнение (3.214) записываем в виде

$$\ddot{x} + h_r \dot{x} + \omega_r^2 x = A e^{i\omega t} \quad (3.223)$$

Установившееся решение этого уравнения имеет вид

$$x = B e^{i\omega t}; \quad B = \frac{A}{\omega_r^2 - \omega^2 + i\omega h_r}.$$

Резонанс соответствует минимуму

$$|\omega_r^2 - \omega^2 + i\omega h_r| = \sqrt{(\omega_r^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 h_r^2}$$

при

$$\omega = \omega_* = \sqrt{\omega_r^2 - 0,5 h_r^2}.$$

Таким образом, измерив на вибrostенде резонансную частоту  $\omega_*$ , можно определить

$$h_r = \sqrt{2(\omega_r^2 - \omega_*^2)}$$

или

$$\frac{h_r}{\omega_r} = \sqrt{2[1 - (\frac{\omega_*}{\omega_r})^2]} \quad (3.224)$$

Пусть относительное уменьшение резонансной частоты  $(\omega_r - \omega_*)/\omega_r$  составляет 0,1 %. Отсюда  $\omega_*/\omega_r = 0,999$  и по формуле (3.224)  $h_r/\omega_r = 0,06$ .

Для определения  $q_0, q_1, q_2$  находим

$$2\omega_r^* - \omega_c^* = 9908 \text{ рад/с}; \quad 2\omega_r^* + \omega_c^* = 12334 \text{ рад/с};$$

$$\omega_r = \sqrt{K_r/M_r} = 10015 \text{ рад/с};$$

$$(2\omega_r^* - \omega_c^*)/\omega_r = 0,99; \quad (2\omega_r^* + \omega_c^*)/\omega_r = 1,23;$$

$$A_1 + iB_1 = \frac{-1}{1 - 1,23^2 - i \cdot 1,23 \cdot 0,06} = 1,92 - 0,28i;$$

$$A_{-1} + iB_{-1} = \frac{-1}{1 - 0,99^2 + i \cdot 0,99 \cdot 0,06} = -5,12 + 15,12i.$$

Значения частот  $2\omega_r^* - \omega_c^*$  и  $\omega_r$  очень близки (шариковый резонанс).

Для дальнейшего расчета необходимо определить  $\tilde{\nu}$  [см. формулу (3.213)]. Использовав найденное значение отношения радиусов кривизны  $R_{21}/R_{11} = 0,16$ , по табл. 2.1 находим:  $k_{a1} = 2,85$ ;  $k_{b1} = 0,856$ . По формулам (3.11) находим

$$a_1 = 2,85 \left[ \frac{2,126}{2,1 \cdot 10^{11}} 0,91 \left( \frac{1}{4,87 \cdot 10^{-3}} + \frac{1}{0,803 \cdot 10^{-3}} \right)^{-\frac{1}{3}} \right] = 52,8 \text{ мкм};$$

$$b_1 = \frac{k_{b1}}{k_{a1}} a_1 = 15,86 \text{ мкм.}$$

Максимальное контактное давление, действующее на наружное кольцо,

$$p_{01}^* = \frac{p^*}{2\pi a_1 b_1 / 3} = \frac{2,126 \cdot 3}{2 \cdot 3,142 \cdot 5,28 \cdot 10^{-5} \cdot 1,586 \cdot 10^{-5}} = 1,21 \cdot 10^9 \text{ Па.}$$

Толщину слоя смазочного материала рассчитаем по формуле (3.18). По формуле (3.16) найдем скорость качения в контакте

$$u = \frac{3,01 \cdot 1,86}{2 \cdot 2,43} 3141 \cdot 10^{-3} = 3,62 \text{ м/с.}$$

Тогда при обильном смазывании

$$h_1 = 0,803 \cdot 10^{-3} (1,82 - 0,68 \cdot 0,16) \left( \frac{0,114 \cdot 3,62 \cdot 2,25 \cdot 10^{-3}}{0,803 \cdot 10^{-3}} \right)^{3/4} \times \\ \times \left( \frac{2,1 \cdot 10^{11}}{1,21 \cdot 10^9 \cdot 0,91} \right)^{1/4} = 0,98 \text{ мкм.}$$

Как правило, при ресурсном методе смазывания режим обильного смазывания не обеспечивается. Вследствие растекания масла после прохода шарика и последующего частичного возвращения масла на дорожку устанавливается режим недостаточного смазывания. При этом толщина смазочного слоя уменьшается в  $\varphi_s$  раз по сравнению с толщиной при обильном смазывании. При коэффициенте  $\varphi_s$ , равном 3,

$$h_1 = 0,33 \cdot 0,98 = 0,32 \text{ мкм.}$$

Воспользуемся формулами (3.213) и определим коэффициенты  $\tilde{\nu}, \tilde{\mu}$ .

Коэффициент  $\kappa$ , входящий в формулу (3.119), для масла МС-20 равен  $1,6 \times 10^{-10} \text{ К}^{-1} \text{ Па}^{-1}$ , теплопроводность масла  $k_t = 0,13 \text{ Вт/(м} \cdot \text{К)}$ ,  $\delta = 0,0298 \text{ К}^{-1}$ . Вязкость при нулевом давлении и температуре дорожки 323 К

$$\mu(0, 323 \text{ К}) = 0,114 e^{-\delta'(T-T_0)} = 0,114 e^{-0,0298 \cdot 30} = 0,047 \text{ Па} \cdot \text{с; } \tilde{\alpha} = \alpha_p - \\ - \kappa(T-T_0) = 2,25 \cdot 10^{-3} - 1,6 \cdot 10^{-10} \cdot 30 = 1,77 \cdot 10^{-3} \text{ Па}^{-1};$$

$$Q_1 = \tilde{\alpha}_{p_0} = 1,77 \cdot 10^{-3} \cdot 1,21 \cdot 10^9 = 21,4.$$

Вычислим  $\alpha_{s1}$  по формуле (3.125):

$$\alpha_{s1} = \alpha_s(Q_1) = 2 \frac{e^{2,14} (21,4 - 1) + 1}{21,4^2} = 1,75 \cdot 10^8.$$

Перейдем к вычислению коэффициента  $k_{11}$ , учитывающего тепловыделение в смазочном слое по формуле (3.129). Считаем, что составляющая  $\omega_{1n}$  угловой скорости на наружном кольце равна  $0,5 \Omega \sin \alpha^*$  (см. подразд. 3.5), т. е.

$$\omega_{1n} = 0,5 \cdot 3141 \cdot 0,4703 = 739 \text{ рад/с.}$$

По формуле (3.125)  $\alpha_s(0,5Q_1) = 7516$ ;

$$\bar{\Lambda}_{01} = 0,25 \cdot 739 \cdot 7516 \sqrt{(5,28 \cdot 10^{-5})^2 + (1,58 \cdot 10^{-5})^2} \left[ \frac{0,0466}{0,13} (0,0298 + \frac{2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-10} \cdot 1,2 \cdot 10^9}{3}) \right]^{1/2} = 18,3;$$

$$k_{11} = \frac{\operatorname{arsh} \bar{\Lambda}_{01}}{\bar{\Lambda}_{01} \sqrt{1 + \bar{\Lambda}_{01}^2}} = \frac{\ln(18,3 + \sqrt{1 + (18,3)^2})}{18,3 \sqrt{1 + 18,3^2}} = 1,08 \cdot 10^{-2}.$$

По формуле (3.213) находим

$$\tilde{\mu} = 2 \cdot 6 (2,43 \cdot 10^{-3})^2 \frac{0,047 \cdot 1,75 \cdot 10^8}{0,32 \cdot 10^{-6}} 1,08 \cdot 10^{-2} \cdot 3,14 \times$$

$$\times 5,28 \cdot 10^{-5} \cdot 1,586 \cdot 10^{-5} = 5,13 \cdot 10^{-2} \text{ Н} \cdot \text{с} \cdot \text{м}; \quad \tilde{\nu} = \tilde{\mu} \frac{(p_0^*)^2}{2} \frac{1}{2ZR^{*2}} = \\ = 5,13 \cdot 10^{-2} \frac{(1,3 \cdot 10^{-3})^2}{2} \frac{1}{2 \cdot 6 (2,43 \cdot 10^{-3})^2} = 6,08 \cdot 10^{-4} \text{ Н} \cdot \text{с} \cdot \text{м}.$$

Как видно, тепловые эффекты в смазочной пленке, характеризующиеся коэффициентом  $k_{11}$ , приводят к снижению эффективной вязкости на два порядка по сравнению со значением вязкости в изотермических условиях. Однако полученные значения  $\tilde{\nu}, \tilde{\mu}$  дают все же довольно приблизительную оценку реальной эффективной вязкости в контакте, поскольку не учтены эффекты релаксации напряжений. Как показывают более глубокие теоретические исследования, учет сложной реологии смазочного материала в контакте приводит к нелинейной зависимости касательного напряжения от скорости сдвига, причем зависимость такова, что напряжения не могут превысить значения  $G_\infty$  – высокочастотного модуля сдвига, характерное значение которого  $10^7 \dots 10^8$  Па. При этом коэффициент трения скольжения  $f = \tau/p$  не превышает значения 0,08, характерного для максимального коэффициента трения при эластогидродинамической смазке.

На наружном кольце составляющая угловой скорости принята  $\omega_{1n} = 739 \text{ рад/с.}$  Скорость проскальзывания на большой оси контактного эллипса равна  $\omega_{1n} \xi$ . Среднее контактное давление, равное  $0,75 p_{01}$ , достигается в точке с абсциссой  $\xi = a_1 \sqrt{1 - 0,75^2} = 34,5 \text{ мкм}$ . Скорость проскальзывания в этой точке  $\Delta u = 739 \times 3,45 \cdot 10^{-3} = 25,5 \text{ мм/с.}$  Расчетное значение эффективной вязкости  $\mu_{\text{эфф}}^1 = \mu(0, T_1) \alpha_{s1} k_{11} = 0,047 \cdot 1,75 \cdot 10^8 \cdot 1,08 \cdot 10^{-2} = 8,69 \cdot 10^4 \text{ Па} \cdot \text{с.}$  Тогда касательное напряжение в указанной точке

$$\tau = \frac{\mu_{\text{эфф}}^1 \Delta u}{h} = \frac{8,69 \cdot 10^4 \cdot 2,5 \cdot 10^{-2}}{0,32 \cdot 10^{-6}} = 6,9 \cdot 10^9 \text{ Па.}$$

Полученное неприемлемое значение коэффициента трения  $f = 6,9 \cdot 10^9 / (0,75 \times 1,21 \cdot 10^9) = 7,6$  указывает на то, что при расчете эффективного значения вязкости  $\mu_{\text{эфф}}$  необходимо учитывать запаздывание возрастания напряжений. Для получения реального значения коэффициента трения  $f = 0,076$  умножим  $\mu_{\text{эфф}}^1$  на коэффициент  $10^{-2}$ . С учетом этого поправочного коэффициента получим следующие значения  $\tilde{\mu}, \tilde{\nu}$ :

$$\tilde{\mu} = 5,13 \cdot 10^{-4} \text{ Н} \cdot \text{с} \cdot \text{м}; \quad \tilde{\nu} = 6,08 \cdot 10^{-4} \text{ Н} \cdot \text{с} \cdot \text{м.}$$

Приведенные рассуждения, имеющие оценочный характер, основаны на знании характеристического коэффициента трения, который, как оказалось, на два порядка ниже полученного упрощенным расчетом. Причина значительного расхождения теории и эксперимента связана с запаздыванием роста напряжений в контакте. Но поскольку оцененное выше характеристическое касательное напряжение  $\tau = 6,9 \cdot 10^9$  Па, в данном случае учет сложной реологии привел бы к тому, что фактическое касательное напряжение упало бы до  $G_\infty \approx 10^7 \dots 10^8$  Па, т. е. примерно на два порядка. Именно так в конце концов и оказалось.

Далее необходимо вычислить значения  $q_0, q_1, q_2$  [см. неравенство (3.222)]. В выражение для этих величин входит общий множитель

$$\frac{K_r}{Z^2 \tilde{\nu} \cos^2 \alpha^*} = \frac{1,625 \cdot 10^7}{36 \cdot 6,08 \cdot 10^{-6} \cos^2 28,1^\circ} = 9,64 \cdot 10^{10} \text{ с}^{-1} \cdot \text{м}^{-2}.$$

Далее определяем

$$q_0 = (-2) 9,64 \cdot 10^{10} (0,28 + 15,12) (d_l^2 - d_i^2) = (-2,96) 10^{12} (d_l^2 - d_i^2);$$

$$q_1 = (-4) 9,64 \cdot 10^{10} d_l d_i (-1,92 + 5,12) \sin \frac{2\pi}{Z} (l-1) =$$

$$= 2,71 \cdot 10^{12} d_l d_i \sin \left[ \frac{2\pi}{Z} (l-1) \right];$$

$$q_2 = (-4) 9,64 \cdot 10^{10} d_l d_i (-1,92 - 5,12) \cos \frac{2\pi}{Z} (l-1) =$$

$$= (-1,23) 10^{12} d_l d_i \cos \frac{2\pi}{Z} (l-1).$$

Неравенство (3.222) приводим к виду

$$2,96 d_l^2 - d_i^2 > d_l d_i [2,71^2 \sin^2 \left\{ \frac{\pi}{3} (l-1) + 1,23^2 \cos^2 \right\} \frac{\pi}{3} (l-1)]^{1/2}$$

или

$$\left| \frac{d_l}{d_i} - \frac{d_i}{d_l} \right| > \sqrt{0,504 - 0,332 \cos \frac{2\pi}{3} (l-1)}. \quad (3.225)$$

Функция  $\cos \left[ \frac{2\pi}{3} (l-1) \right]$  принимает два значения: 1 при  $l=1, 4$ ; -0,5 при  $l=2, 3, 5, 6$ . В первом случае из неравенства (3.225)

$$\left| \frac{d_l}{d_i} - \frac{d_i}{d_l} \right| > 0,414$$

следует, что существование неустанавливающихся со временем решений возможно, если значение  $a_0 = \max \{d_l/d_i, d_i/d_l\}$  превышает 1,22. Во втором случае при  $|d_l/d_i - d_i/d_l| > 0,82$  соответствующая нижняя граница  $a_0$  равна 1,48. При выбранных  $d_1 = 0,025$  мкм,  $d_l = 0,05$  мкм для частоты биений получаем выражение

$$f_6 = \frac{1}{T} = \frac{1}{\pi} [3080 - 1142 \cos^2 \left[ \frac{\pi}{3} (l-1) \right] - 234 \sin^2 \left[ \frac{\pi}{3} (l-1) \right]]^{1/2} 10^{-4} = \\ = \frac{1}{\pi} [23,92 - 4,54 \cos \frac{2\pi}{3} (l-1)]^{1/2} 10^{-4} \text{ Гц}, \quad (3.226)$$

откуда  $f_6 = 0,0014$  Гц ( $l=4$ ) и  $f_6 = 0,0016$  Гц ( $l=2, 3, 5, 6$ ). Это означает, что при движении ротора будут наблюдаться биения с периодом  $1/f_6 \approx 12$  мин.

2. В каждом подшипнике имеется один шарик с отклонением от сферической формы ( $j$ -й в левом,  $l$ -й в правом). Тогда в системе (3.218) – (3.219) нетривиальными будут четыре уравнения для  $\varphi_1, \varphi_2, \psi^1, \psi^2$  (индексы, указывающие номера шариков, опущены). Для разностей углов поворота  $\theta' = \varphi_1 - \varphi_2$  и  $\eta = \psi^1 - \psi^2$  получаем уравнения

$$\begin{aligned} \tilde{\mu} \dot{\theta}' = & \frac{K_r}{Z^2 \cos^2 \alpha^*} \sum_k \left\{ B_k [(d_k^1)^2 - (d_k^2)^2] + \right. \\ & \left. + 2A_k d_k^1 d_k^2 \sin(2k\eta + \theta' + \tilde{\alpha}_k^1 - \tilde{\alpha}_k^2) \right\}; \end{aligned} \quad (3.227)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\nu} \dot{\eta} = & \frac{2K_r}{Z^2 \cos^2 \alpha^*} \sum_k \left\{ B_k [(d_k^1)^2 - (d_k^2)^2] + \right. \\ & \left. + 2A_k d_k^1 d_k^2 \sin(2k\eta + \theta' + \tilde{\alpha}_k^1 - \tilde{\alpha}_k^2) \right\} k, \end{aligned} \quad (3.228)$$

где  $\tilde{\alpha}_k^1 = \alpha_{kj}^1 + \frac{2\pi}{Z} (j-1)$ ,  $\tilde{\alpha}_k^2 = \alpha_{kl}^2 + \frac{2\pi}{Z} (l-1)$ ,  $d_k^1 = d_{kj}^1$ ,  $d_k^2 = d_{kl}^2$ .

Если ограничиться только первыми гармониками отклонений формы шариков, отбросить индекс  $k = \pm 1$ , написать внизу индексы, обозначающие левый ( $j$ ) и правый ( $l$ ) подшипники, и ввести переменные  $\theta = \theta' + 2\pi (j-l)/Z$ ,  $\xi = \eta + (\alpha_{ij}^1 - \alpha_{il}^2)/2$ , то система (3.227) – (3.228) примет вид

$$\begin{aligned} \tilde{\mu} \dot{\theta}' = & \frac{K_r}{Z^2 \cos^2 \alpha^*} \left\{ [B_1 (d_1^2 - d_2^2) + 2A_1 d_1 d_2 \sin(2\xi + \theta)] + \right. \\ & \left. + [B_{-1} (d_1^2 - d_2^2) - 2A_{-1} d_1 d_2 \sin(2\xi - \theta)] \right\}; \end{aligned} \quad (3.229)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\nu} \dot{\xi} = & \frac{2K_r}{Z^2 \cos^2 \alpha^*} \left\{ [B_1 (d_1^2 - d_2^2) + 2A_1 d_1 d_2 \sin(2\xi + \theta) - \right. \\ & \left. - [B_{-1} (d_1^2 - d_2^2) - 2A_{-1} d_1 d_2 \sin(2\xi - \theta)] \right\}. \end{aligned} \quad (3.330)$$

При одновременном обращении в нуль выражений в квадратных скобках система (3.229) – (3.330) имеет решения, соответствующие положениям равновесия.

Условие существования режима биений

$$\left| \frac{d_1}{d_2} - \frac{d_2}{d_1} \right| > \min \left\{ 2 \left| \frac{A_1}{B_1} \right|, 2 \left| \frac{A_{-1}}{B_{-1}} \right| \right\}.$$

В рассматриваемом примере меньшим является  $|A_{-1}/B_{-1}|$ , что дает критериальные неравенства

$$\left| \frac{d_1}{d_2} - \frac{d_2}{d_1} \right| > 0,68, \max \left\{ \left| \frac{d_1}{d_2} \right|, \left| \frac{d_2}{d_1} \right| \right\} > 1,49.$$

При этом условии система (3.229) – (3.330) – динамическая система на двумерном торе, без положений равновесия. Точного решения (3.229), (3.330), по-видимому, нет, однако из теории таких систем известно, что наиболее типичным случаем является *эргодический*, при котором любая траектория представляет собой плотную обмотку тора, а решение является почти периодической функцией времени. В частности, эргодичность обеспечивает полное равноправие начальных условий.

Можно, однако, получить приближенное решение системы (3.229) – (3.330) при  $\tilde{\mu} \gg \tilde{\nu}$ . Действительно, как следует из (3.213),  $\tilde{\mu}/\tilde{\nu} = 4Z(R^*/p_7^0)^2$ . В рассмотренном числовом примере это отношение приблизительно равно 84. Это означает, что  $\theta$  меняется медленнее  $\xi$  и в правой части уравнения (3.330)  $\theta$  можно считать постоянным параметром. Тогда (3.330) отличается от (3.221) только тем, что угол  $2\pi(l-1)/Z$  можно заменить произвольным углом  $\theta$ . По формуле, аналогичной (3.226), частота биений

$$f_b = \frac{1}{\pi} [23.92 - 4.54 \cos 2\theta]^{1/2} 10^{-3} \text{ Гц.}$$

Отсюда максимальная и минимальная частоты биений  $f_{b\max} = 0.0017 \text{ Гц}$ ,  $f_{b\min} = 0.0014 \text{ Гц}$ . Качественно решение системы (3.229) – (3.330) выглядит так: переменная  $\theta$  монотонно возрастает или убывает в соответствии с (3.229), где  $\xi$  получено из (3.330) при  $\theta = \text{const}$ . В соответствии с формулой (3.217) на колебания с несущей частотой  $2\omega_c^*$  –  $\omega_c^*$  наложены биения, частота которых плавно меняется в пределах от  $f_{b\min}$  до  $f_{b\max}$ . На рис. 3.25 изображено изменение во времени  $x$ -координаты центра ротора;  $T_{b\min}$  и  $T_{b\max}$  – соответственно наименьший и наибольший периоды биений.

Рассмотренная модель радиальных биений маховика, в основе которой лежит шариковый резонанс, дает приемлемые условия существования биений. Частоты биений в примере расчета существенно меньше интересующих конструкторов частот, равных примерно 1 Гц. Однако при учете отклонений геометрических параметров всех шариков возможно увеличение расчетной частоты биений примерно в  $Z$  раз. Модель позволила обнаружить в примере нестабильность частоты биений  $2(f_{b\max} - f_{b\min})/(f_{b\max} + f_{b\min}) \approx 0.19$ . Расчет амплитуды вынужденных колебаний маховика с частотой  $2\omega_c^* - \omega_c^*$  дает большое значение, сравнимое с контактным сближением  $\delta^*$  в условиях предварительного натяга, равным 0,89 мкм. Таким образом, более точный расчет требует учета нелинейности формулы Гер-

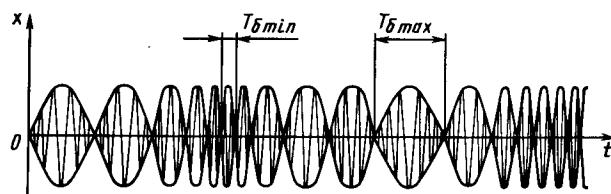


Рис. 3.25

ца для сближения, что может сильно повлиять на результаты. Можно также сделать вывод, что шариковый резонанс – явление весьма нежелательное и от него следует избавляться, меняя усилие предварительного натяга или диаметр шарика.

Для расчета нестабильности мощности и момента сопротивления вращению маховика необходимо знать скорость проскальзывания шарика в контакте с внутренним кольцом

$$u_{nj} = R^* (\dot{\varphi}_n - \omega_c^*) + \frac{p_7^0}{2} [\dot{\psi}_j - \omega_c^* - (\dot{\varphi}_n - \omega_c^*) \cos \alpha^*].$$

В этой формуле  $n = 1$  соответствует левому подшипнику,  $n = 2$  – правому. Сила трения в контакте  $j$ -го шарика  $n$ -го подшипника с валом при  $m = 2$

$$F_{nj} = \frac{\mu_{\text{эфф}} \pi a_2 b_2}{h_2} u_{nj} \approx \frac{2\tilde{\nu}}{(p_7^0)^2} u_{nj},$$

где  $\mu_{\text{эфф}}$  – эффективная вязкость (3.135) смазочного материала в контакте шарика с внутренним кольцом, которая, как считаем, примерно такая же, как и в контакте шарика с наружным кольцом.

Суммарный момент всех сил трения, действующий со стороны шариков,

$$M(t) = R_2^* \cdot \frac{2\tilde{\nu}}{(p_7^0)^2} \left\{ R_2^* (\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2 - 2\omega_c^*) Z + \right. \\ \left. + \frac{p_7^0}{2} \left[ \sum_{j=1}^Z (\dot{\psi}_j^1 - \omega_c^*) + \sum_{j=1}^Z (\dot{\psi}_j^2 - \omega_c^*) \right] \right\} \quad (3.331)$$

Для определенности, аналогично предыдущему, рассмотрим случай 2: пусть в каждом подшипнике имеется по одному шарику с отклонениями формы ( $j$ -й в левом,  $l$ -й в правом). Тогда в системе (3.218) – (3.219) нетривиальными будут уравнения для  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$ ,  $\psi^1$ ,  $\psi^2$  (индексы, указывающие номера шариков, опущены):

$$\tilde{\mu} (\dot{\varphi}_1 - \omega_c^*) = K_r \operatorname{Im} \sum_k (A_k + iB_k) [c_k^1 \bar{c}_k^1 \exp \left\{ i [2k(\psi^1 - \psi^2) + \varphi_1 - \varphi_2] \right\} + |c_k^1|^2];$$

$$\tilde{\mu} (\dot{\varphi}_2 - \omega_c^*) = K_r \operatorname{Im} \sum_k (A_k + iB_k) [c_k^2 \bar{c}_k^2 \exp \left\{ i [2k(\psi^2 - \psi^1) + \varphi_2 - \varphi_1] \right\} + |c_k^2|^2];$$

$$\tilde{\nu} (\dot{\psi}^1 - \omega_c^*) = K_r \operatorname{Im} \sum_k 2k(A_k + iB_k) [c_k^1 \bar{c}_k^2 \exp \left\{ i [2k(\psi^1 - \psi^2) + \varphi_1 - \varphi_2] \right\} + |c_k^1|^2];$$

$$\tilde{\nu} (\dot{\psi}^2 - \omega_c^*) = K_r \operatorname{Im} \sum_k 2k(A_k + iB_k) [c_k^2 \bar{c}_k^1 \exp \left\{ i [2k(\psi^2 - \psi^1) + \varphi_2 - \varphi_1] \right\} + |c_k^2|^2].$$

Обозначив  $\varphi_1 - \varphi_2 - \theta'$ ;  $\psi^1 - \psi^2 = \eta$ ;  $\tilde{\alpha}_k = \arg c_k^1 - \arg c_k^2$ , получим

$$M(t) = K_r \sum_k \left[ \frac{R_2^{*2}}{2R^{*2}} + k \frac{2R_2^*}{p_7^0} \right] [ |c_k^1|^2 + |c_k^2|^2 + 2|c_k^1 c_k^2| \cos(2k\eta + \theta' + \tilde{\alpha}_k) ].$$

Таким образом, переменная составляющая момента, обусловленная проскальзываниями в контактах шариков,

$$M(t) = \frac{R_2^* K_r}{Z^2 \cos^2 \alpha^*} \sum_k B_k d_k^1 d_k^2 \left( \frac{R_2^*}{R^{*2}} + \frac{4k}{p_7^0} \right) \cos(2k\eta + \theta' + \tilde{\alpha}_k). \quad (3.32)$$

Если считать отличной от нуля только первую гармонику отклонений от сферической формы шариков, т. е. положить  $d_1^1 = d_{-1}^1 = d_1$ ,  $d_1^2 = d_{-1}^2 = d_2$ , и использовать введенные выше обозначения  $\xi$  и  $\theta$ , то

$$\begin{aligned} M(t) &= \frac{R_2^* K_r d_1 d_2}{Z^2 \cos^2 \alpha^*} [B_1 \left( \frac{R_2^*}{R^{*2}} + \frac{4}{p_7^0} \right) \cos(2\xi + \theta) + \\ &+ B_{-1} \left( \frac{R_2^*}{R^{*2}} - \frac{4}{p_7^0} \right) \cos(2\xi - \theta)] = a' \cos \theta \cos 2\xi - b' \sin \theta \sin 2\xi; \\ a' &= \frac{R_2^* K_r d_1 d_2}{Z^2 \cos^2 \alpha^*} [B_1 \left( \frac{R_2^*}{R^{*2}} + \frac{4}{p_7^0} \right) + B_{-1} \left( \frac{R_2^*}{R^{*2}} - \frac{4}{p_7^0} \right)]; \\ b' &= \frac{R_2^* K_r d_1 d_2}{Z^2 \cos^2 \alpha^*} [B_1 \left( \frac{R_2^*}{R^{*2}} + \frac{4}{p_7^0} \right) - B_{-1} \left( \frac{R_2^*}{R^{*2}} - \frac{4}{p_7^0} \right)]. \end{aligned}$$

В связи с тем, что  $\tilde{\mu} \ll \tilde{\mu}$  и  $\theta$  меняются гораздо медленнее  $2\xi$ , на периоде колебаний  $2\xi$  можно считать  $\theta$  постоянным параметром. Амплитуда колебаний момента

$$\Delta M = \sqrt{0,5(a'^2 + b'^2) + 0,5(a'^2 - b'^2) \cos 2\theta}$$

медленно меняется с изменением  $\theta$  от  $\min \{ |a'|, |b'| \}$  до  $\max \{ |a'|, |b'| \}$ .

Подстановка числовых значений из рассматриваемого примера дает

$$\Delta M_{\max} = |a'| = \frac{1,625 \cdot 10^7 \cdot 0,025 \cdot 0,05 \cdot 10^{-12} \cdot 1,86}{36 (\cos 28,1^\circ)^2} |0,28 \left( \frac{1,86}{2,43^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{0,65} \right) - 15,12 \left( \frac{1,86}{2,43^2} - \frac{2}{0,65} \right)| = 5,76 \cdot 10^{-8} \text{ Н} \cdot \text{м};$$

$$\Delta M_{\min} = |b'| = 1,35 \cdot 10^{-9} (41,76 - 0,949) = 5,50 \text{ Н} \cdot \text{м}$$

Соответствующие максимальное и минимальное значения амплитуды колебаний мощности

$$(\Delta M_{\max}) \Omega = 5,76 \cdot 10^{-8} \cdot 3141 = 1,81 \text{ мВт};$$

$$(\Delta M_{\min}) \Omega = 5,50 \cdot 10^{-8} \cdot 3141 = 1,73 \text{ мВт}.$$

**Низкочастотные радиальные биения маховика, связанные с разноразмерностью шариков.** Негармонические биения простейшего типа возникают в шарикоподшипниковых опорах маховиков вследствие разноразмерности шариков. Амплитуда этих биений невелика, но может стать заметной, если частоты вращения сепаратора и собственных радиальных колебаний маховика достаточно близки. Рассмотрим радиальные колебания маховика. Пусть единственным отклонением геометрии подшипников является разноразмерность шариков, а угол контакта для подшипников равен  $\alpha^*$ . Считаем, что вес маховика и центробежная сила малы по сравнению с усилием предварительного натяга и слабо влияют на контактные деформации.

В соответствии с (3.82) потенциальную энергию системы (с точностью до несущественных слагаемых, не содержащих координат), при  $m_n = 2$  вычисляем по формуле

$$\begin{aligned} \Pi &= K_r \left\{ \frac{x^2 + y^2}{2} + \frac{1}{Z \cos \alpha^*} [x(\bar{D}_x^1 + \bar{D}_x^2) + y(\bar{D}_y^1 + \bar{D}_y^2)] \right\} = \\ &= K_r \left\langle \frac{x^2 + y^2}{2} + \frac{x}{Z \cos \alpha^*} \sum_{j=1}^Z \left\{ d_{0j}^1 \cos [\varphi_1 + \frac{2\pi}{Z} (j-1)] + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + d_{0j}^2 \cos [\varphi_2 + \frac{2\pi}{Z} (j-1)] \right\} + \frac{y}{Z \cos \alpha^*} \sum_{j=1}^Z \left\{ d_{0j}^1 \sin [\varphi_1 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{2\pi}{Z} (j-1)] + d_{0j}^2 \sin [\varphi_2 + \frac{2\pi}{Z} (j-1)] \right\} \right\rangle, \quad (3.33) \end{aligned}$$

где  $d_{0j}^n$  — амплитуда нулевой гармоники разложения отклонения формы  $j$ -го шарика в  $n$ -м комплекте;  $\varphi_n$  — угол поворота сепаратора.

Уравнение радиальных колебаний можно записать в комплексной форме с учетом демпфирования:

$$(\ddot{x} + i\dot{y}) + h_r(\dot{x} + iy) + \omega_r^2(x + iy) = \omega_r^2(c_1 e^{i\varphi_1} + c_2 e^{i\varphi_2}); \quad (3.334)$$

$$c_n = -\frac{1}{Z \cos \alpha^*} \sum_{j=1}^Z d_{0j}^n \exp \left\{ \frac{2\pi i(j-1)}{Z} \right\}. \quad (3.335)$$

Уравнение вращения сепараторов

$$\tilde{\mu}(\dot{\varphi}_n - \omega_c^*) = -K_r \operatorname{Im}[(x - iy)c_n e^{i\varphi_n}] - M_0, \quad (3.336)$$

$$n = 1, 2,$$

где  $M_0 \ll \tilde{\mu}\omega_c^*$  — момент сил трения сепаратора о направляющий бортик.

При приближенном решении системы (3.334) – (3.336) полагаем, что угловые скорости  $\dot{\varphi}_n$  меняются медленно, так что ускорениями  $\ddot{\varphi}_n$  можно пренебречь. Решение уравнения (3.334) ищем в виде

$$x + iy = Ae^{i\varphi_1} + Be^{i\varphi_2},$$

где  $A$  и  $B$  – медленно меняющиеся функции времени, подставляем в (3.334), пренебрегаем  $\dot{A}$ ,  $\dot{B}$  вследствие их малости, полагаем  $\dot{\varphi}_1 \approx \dot{\varphi}_2 \approx$

$\approx \omega_c^*$  и приравниваем коэффициенты при  $e^{i\varphi_1}$ ,  $e^{i\varphi_2}$ . В результате

$$x + iy = \frac{\omega_r^2(c_1 e^{i\varphi_1} + c_2 e^{i\varphi_2})}{\omega_r^2 - \omega_c^{*2} + ih_r \omega_c^*}. \quad (3.337)$$

Эта формула описывает смещение ротора при заданных угловых положениях сепараторов. При  $\omega_c^* \ll \omega_r$  смещение (3.337) мало отличается от статического, получаемого из (3.334), если пренебречь динамическими эффектами (скоростями и ускорениями). Общее решение уравнения (3.334) отличается от (3.337) только общим решением однородного уравнения (3.334), которое является экспоненциально затухающей функцией и не рассматривается, так как интересен только установившийся режим. После подстановки (3.337) в (3.336) получаем уравнения

$$\dot{\varphi}_1 - \omega_c^* = -\frac{M_0}{\tilde{\mu}} - \frac{K_r \omega_r^2}{\tilde{\mu}} \frac{h_r \omega_c^* |c_1|^2 + \operatorname{Im}[(\omega_r^2 - \omega_c^{*2} + ih_r \omega_c^*) c_1 \bar{c}_2 e^{i\theta}]}{(\omega_r^2 - \omega_c^{*2})^2 + h_r^2 \omega_c^{*2}}, \quad (3.338)$$

$$\dot{\varphi}_2 - \omega_c^* = -\frac{M_0}{\tilde{\mu}} - \frac{K_r \omega_r^2}{\tilde{\mu}} \frac{h_r \omega_c^* |c_2|^2 + \operatorname{Im}[(\omega_r^2 - \omega_c^{*2} + ih_r \omega_c^*) c_2 \bar{c}_1 e^{-i\theta}]}{(\omega_r^2 - \omega_c^{*2})^2 + h_r^2 \omega_c^{*2}}, \quad (3.339)$$

где  $\operatorname{Im}$  – мнимая часть; черта сверху означает комплексное сопряжение;  $\theta = \varphi_1 - \varphi_2$ .

Вычитание (3.339) из (3.338) приводит к одному уравнению для медленно меняющейся величины  $\theta$

$$\dot{\theta} = q_0 - q_1 \sin(\theta - \theta_0), \quad (3.340)$$

где

$$q_0 = \frac{K_r \omega_r^2}{\tilde{\mu}} \frac{h_r \omega_c^* (|c_2|^2 - |c_1|^2)}{(\omega_r^2 - \omega_c^{*2})^2 + h_r^2 \omega_c^{*2}};$$

$$q_1 = \frac{2K_r \omega_r^2}{\tilde{\mu}} \frac{(\omega_r^{*2} - \omega_c^2) |c_1 c_2|}{(\omega_r^2 - \omega_c^{*2})^2 + h_r^2 \omega_c^{*2}};$$

$$\theta_0 = \arg c_2 - \arg c_1.$$

Для полученного уравнения типа

$$\dot{\theta} = f(\theta) \quad (3.341)$$

с тригонометрическим полиномом  $f(\theta)$  следует рассмотреть два существенно различных случая:

1)  $f(\theta) = 0$  при  $\theta = \theta_l$  ( $l = 1, 2, \dots$ ). Тогда  $\theta(t) = \theta_l$  – решение (3.341) и с учетом (3.338), (3.339)  $\dot{\varphi}_1 = \dot{\varphi}_2 = \text{const}$ . Таким образом, получаем стационарный режим, устойчивый при  $f'(\theta_l) < 0$  и неустойчивый при  $f'(\theta_l) > 0$ . Если все нули простые, то обязательно имеется устойчивый стационарный режим (может быть, не один). В этом режиме сепараторы врачаются с одинаковыми угловыми скоростями и со сдвигом фаз  $\theta_l$ . Это и есть режим самосинхронизации сепараторов, впервые рассмотренный В.Ф. Журавлевым и А.А. Лапиным;

2)  $f(\theta) \neq 0$ . Стационарный режим в этом случае невозможен. Решение уравнения (3.341) в неявной форме имеет вид

$$\int_0^\theta \frac{d\theta}{f(\theta)} = t - t_0, \quad (3.342)$$

где  $t_0$  – постоянная интегрирования.

Функция  $\theta(t)$  может быть представлена (см. рис. 3.24) как

$$\theta(t) = \frac{2\pi}{T} (t - t_0) + u(t), \quad (3.343)$$

где  $u(t)$  – функция с нулевым средним значением и периодом

$$T = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{f(\theta)}. \quad (3.344)$$

Действительно, поскольку интеграл в левой части уравнения (3.342) является монотонной и непрерывной функцией верхнего предела и, кроме того, при замене верхнего предела  $\theta$  на  $\theta + 2\pi$  величина  $t$  заменяется на  $t + T$ , то это уравнение можно решить относительно  $\theta$ :  $\theta = \varphi'(t - t_0)$ , причем  $\varphi'(t + T - t_0) = \varphi'(t - t_0) + 2\pi$ . С другой стороны, вычтя из обеих частей (3.344) линейную функцию  $T\theta/(2\pi)$ , получим

$$\varphi''(\theta) \equiv \int_0^\theta \left( \frac{1}{f(\theta)} - \frac{T}{2\pi} \right) d\theta = t - t_0 - \frac{T}{2\pi} \theta. \quad (3.345)$$

Функция  $\varphi''(\theta)$  является  $2\pi$ -периодической, поскольку

$$\int_0^{2\pi} \left( \frac{1}{f(\theta)} - \frac{T}{2\pi} \right) d\theta = 0.$$

Тогда, выражая  $\theta$  из (3.345), получим

$$\theta = \frac{2\pi}{T}(t - t_0) - \frac{2\pi}{T}\varphi''(\theta) = \frac{2\pi}{T}(t - t_0) - \frac{2\pi}{T}\varphi''[\varphi'(t - t_0)] = \frac{2\pi}{T}(t - t_0) + u(t), u(t) = -\frac{2\pi}{T}\varphi''(\varphi'(t - t_0)).$$

Но поскольку  $\varphi''$  –  $2\pi$ -периодическая, а  $\varphi'(t + T - t_0) = \varphi'(t - t_0) + 2\pi$ , то  $u(t)$  –  $T$ -периодическая. Итак, соотношение (3.343) доказано. Проинтегрировав (3.343) по периоду  $T$  изменения  $t$ , получим, что  $u(t)$  имеет нулевое среднее значение.

Таким образом, один из сепараторов обгоняет другой со средней угловой скоростью  $2\pi/T$ , причем скорость обгона не постоянна, а меняется с периодом  $T$ . Как следует из уравнения (3.337), при различных постоянных угловых скоростях сепараторов  $\varphi_1 = \omega_{c1} \neq \omega_{c2} = \varphi_2$  возникают низкочастотные гармонические биения маховика. Если же, как при рассматриваемом режиме, разность угловых скоростей сепараторов непостоянна, то амплитуда не является простой гармоникой.

Для уравнения (3.340) случай 2 соответствует неравенству  $|q_0| > |q_1|$ , откуда получаем условие существования режима биений

$$|\frac{c_2}{c_1}| > \frac{\omega_r^2 - \omega_c^{*2}}{h_r \omega_c^*} + \sqrt{\frac{(\omega_r^2 - \omega_c^{*2})^2}{h_r^2 \omega_c^{*2}} + 1}, \quad (3.346)$$

где  $|c_2| > |c_1|$ ;  $\omega_r > \omega_c^*$ . Период биений находим по формуле

$$T = \frac{2\pi \tilde{\mu} [(\omega_r^2 - \omega_c^{*2})^2 + h_r^2 \omega_c^{*2}]}{K_r \omega_r^2 [(|c_2|^2 - |c_1|^2)^2 h_r^2 \omega_c^{*2} - 4|c_1 c_2|^2 (\omega_r^2 - \omega_c^{*2})^2]^{1/2}}. \quad (3.347)$$

Чтобы найти амплитуду биений, надо подставить  $\varphi_1(t)$  и  $\varphi_2(t)$  в (3.337). Из (3.338), (3.339) следует  $\varphi_n(t) = \omega_c^* t + \psi_n(t)$  при  $n = 1, 2$ , где функция  $\psi_n(t)$  такова, что  $|\psi_n(t)| \ll \omega_c^*$ . Тогда из формулы (3.337)

$$x + iy = \frac{\omega_r^2}{\sqrt{(\omega_r^2 - \omega_c^{*2})^2 + h_r^2 \omega_c^{*2}}} \exp \left\{ i(\omega_c^* t + \gamma') \right\} [c_1 e^{i\psi_1(t)} + c_2 e^{i\psi_2(t)}],$$

где  $\gamma' = \arg(\omega_r^2 - \omega_c^{*2} - ih_r \omega_c^*)$ . Эта функция представляет собой гармонические колебания с угловой частотой  $\omega_c^*$ , модулированные низкочастотными колебаниями, т. е. с огибающей

$$A(t) = |x + iy| = \frac{\omega_r^2}{\sqrt{(\omega_r^2 - \omega_c^{*2})^2 + h_r^2 \omega_c^{*2}}} [|c_1|^2 + |c_2|^2 + 2|c_1 c_2| \cos(\theta - \theta_0)]^{1/2}.$$

При этом

$$A_{\max} = \frac{\omega_r^2}{\sqrt{(\omega_r^2 - \omega_c^{*2})^2 + h_r^2 \omega_c^{*2}}} (|c_1| + |c_2|);$$

$$A_{\min} = \frac{\omega_r^2}{\sqrt{(\omega_r^2 - \omega_c^{*2})^2 + h_r^2 \omega_c^{*2}}} (|c_2| - |c_1|),$$

амплитуда огибающей

$$\Delta A = \frac{A_{\max} - A_{\min}}{2} = \frac{\omega_r^2 |c_1|}{\sqrt{(\omega_r^2 - \omega_c^{*2})^2 + h_r^2 \omega_c^{*2}}}.$$

Конец вектора  $x + iy$  задает на плоскости  $Oxy$  положение оси маховика. На рис. 3.26 изображена характерная траектория оси маховика в течение одной четверти периода биений, на рис. 3.27 – график зависимости смещения  $|x + iy|$  от времени  $t$ .

Для оценки мощности, расходуемой при работе подшипников, полагаем (см. выше), что касательная сила в контакте шарика с кольцом пропорциональна скорости скольжения. Тогда момент сопротивления врашению сепаратора равен  $M_0 + \tilde{\mu}(\dot{\varphi} - \omega_c^*)$ . Из (3.338), (3.339) следует, что суммарная мощность

$$N(t) = N_1(t) + N_2(t) = \Omega \frac{R_2^*}{R^*} \left\{ M_0 + 0,5 K_r \omega_r^2 h_r \omega_c^* \frac{|c_1|^2 + |c_2|^2 + 2|c_1 c_2| \cos(\theta - \theta_0)}{(\omega_r^2 - \omega_c^{*2})^2 + h_r^2 \omega_c^{*2}} \right\}, \quad (3.348)$$

где  $\Omega$  – угловая скорость маховика. При получении этой формулы считали, что силы трения, действующие со стороны колец на шарик, равны между собой. В противном случае возник бы момент относительно центра шарика, который нечего было бы уравновесить. Разность мощностей, теряемых в правом и левом подшипниках, определяем по формуле

$$N_2(t) - N_1(t) = \frac{R_2^* K_r \omega_r^2}{2 R^*} \Omega \times \frac{h_r \omega_c^* (|c_1|^2 - |c_2|^2) + 2(\omega_r^2 - \omega_c^{*2}) |c_1 c_2| \sin(\theta - \theta_0)}{(\omega_r^2 - \omega_c^{*2})^2 + h_r^2 \omega_c^{*2}}.$$

Таким образом,

$$\langle N \rangle = \frac{R_2^* \Omega}{R^*} [M_0 + \frac{K_r \omega_r^2 h_r \omega_c^*}{2} \frac{|c_1|^2 + |c_2|^2}{(\omega_r^2 - \omega_c^{*2})^2 + h_r^2 \omega_c^{*2}}]; \quad (3.349)$$

$$\langle N_2 \rangle - \langle N_1 \rangle = -\frac{\pi R_2^* \Omega \tilde{\mu}}{R^* T}. \quad (3.350)$$

Среднее по периоду значение  $\langle g \rangle$  функции  $g[\theta(t)]$ , где  $\theta(t)$  – решение уравнений (3.341), определяем по формуле

$$\langle g \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T g[\theta(t)] dt = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{2\pi}{f(\theta)} \frac{g(\theta) d\theta}{f(\theta)}.$$

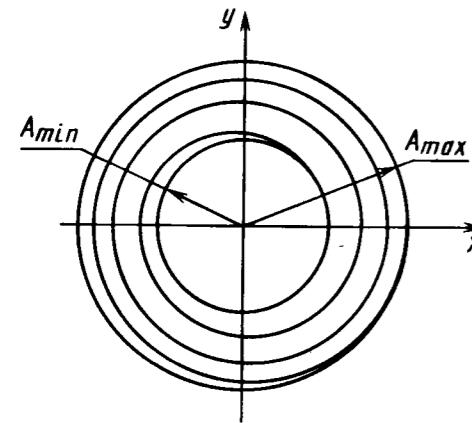


Рис. 3.26

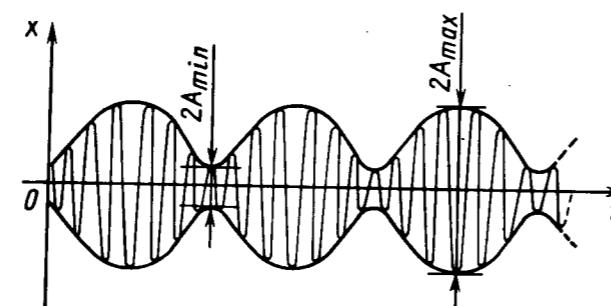


Рис. 3.27

Амплитуды колебаний  $N$  и  $N_2 - N_1$  (полуразности их максимальных и минимальных значений)

$$\Delta N = \frac{R^*}{R} \cdot \frac{K_r \omega_r^2 h_r \omega_c^* |c_1 c_2| \Omega}{(\omega_r^2 - \omega_c^{*2})^2 + h_r^2 \omega_c^{*2}} ; \quad (3.351)$$

$$\Delta(N_2 - N_1) = \frac{R^*}{R} \cdot \frac{K_r \omega_r^2 (\omega_r^2 - \omega_c^{*2}) |c_1 c_2| \Omega}{(\omega_r^2 - \omega_c^{*2})^2 + h_r^2 \omega_c^{*2}}$$

Решив уравнение (3.340), получим выражения для  $\cos(\theta - \theta_0)$ ,  $\sin(\theta - \theta_0)$ , входящих в формулы для амплитуды огибающей мощности и разности мощностей:

$$\cos(\theta - \theta_0) = -\frac{\sqrt{q_0^2 - q_1^2} \sin[2\pi(t - t_0)/T - \beta']}{q_0 + q_1 \cos[2\pi(t - t_0)/T - \beta']} ;$$

$$\sin(\theta - \theta_0) = \frac{q_0 \cos[2\pi(t - t_0)/T - \beta'] + q_1}{q_0 + q_1 \cos[2\pi(t - t_0)/T - \beta']}$$

$$\beta' = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{q_0^2 - q_1^2}}{q_1} .$$

На рис. 3.28, а, б изображены графики функций

$$y = -\frac{\sqrt{1 - k^2} \sin x}{1 + k \cos x} ; \quad z = \frac{\cos x + k}{1 + k \cos x}$$

при различных значениях  $k = q_1/q_0$  ( $k = -0,5\sqrt{3}$  — кривая 1;  $k = 0$  — кривая 2;  $k = 0,5$  — кривая 3;  $k = 0,5\sqrt{3}$  — кривая 4). На рис. 3.29 изображены характерные графики изменения  $A$  (кривая 1),  $N$  (кривая 2),  $N_1 - N_2$  (кривая 3) во времени. Видно, что при  $k \neq 0$  колебания отличаются от гармонических.

Из условия (3.346) следует, что биения возможны, если  $|c_2/c_1| > 1$ .

Это отношение тем ближе к единице, чем ближе  $\omega_c^*$  к  $\omega_r$  (резонанс), а также чем больше постоянная демпфирования  $h_r$ . При увеличении  $|c_1|$  и  $|c_2|$  в  $l$  раз  $T$  уменьшается в  $l^2$  раз,  $\Delta A$  увеличивается в  $l$  раз,  $\Delta N, N_2 - N_1$  увеличиваются в  $l^2$  раз. Пусть теперь  $|c_2| = \text{const}$ , а  $|c_1|$  меняется от нуля до критического значения, определяемого из (3.346). При  $|c_1| \rightarrow 0$

$$T \rightarrow \frac{2\pi \tilde{\mu} [(\omega_r^2 - \omega_c^{*2})^2 + h_r^2 \omega_c^{*2}]}{K_r \omega_r^2 h_r \omega_c^* |c_2|^2} ;$$

$$\Delta A, \Delta N, \Delta(N_2 - N_1) \rightarrow 0,$$

$$\langle N_2 \rangle - \langle N_1 \rangle \rightarrow -\frac{R^* K_r \omega_r^2 h_r \omega_c^* |c_2|^2 \Omega}{2 R^* [(\omega_r^2 - \omega_c^{*2})^2 + h_r^2 \omega_c^{*2}]} .$$

Если  $|c_1|$  стремится к критическому значению, то  $T \rightarrow \infty$ , а значения остальных величин стремятся к конечным пределам. Отметим еще, что период биений пропорционален  $\tilde{\mu}$  [см. формулу (3.347)], а остальные характеристики от  $\mu$  не зависят.

**Пример 3.6.** Маховик массой  $M_r = 2,59$  кг вращается на двух радиально-упорных шариковых подшипниках 100609510 с угловой скоростью  $\Omega = 12391$  рад/с (частота вращения  $1,2 \cdot 10^5$  мин<sup>-1</sup>). Подшипник имеет следующие параметры:  $p_1^0 = 1,16$  мм;  $p_2^0 = 1,05$  мм;  $p_3^0 = 5,37$  мм;  $p_4^0 = 3,3655$  мм;  $p_7^0 = 2$  мм;  $Z = 7$ ; материал шариков и колец — сталь ШХ15, модуль упругости  $E = 2,1 \cdot 10^{11}$  Па, коэффициент Пуассо-

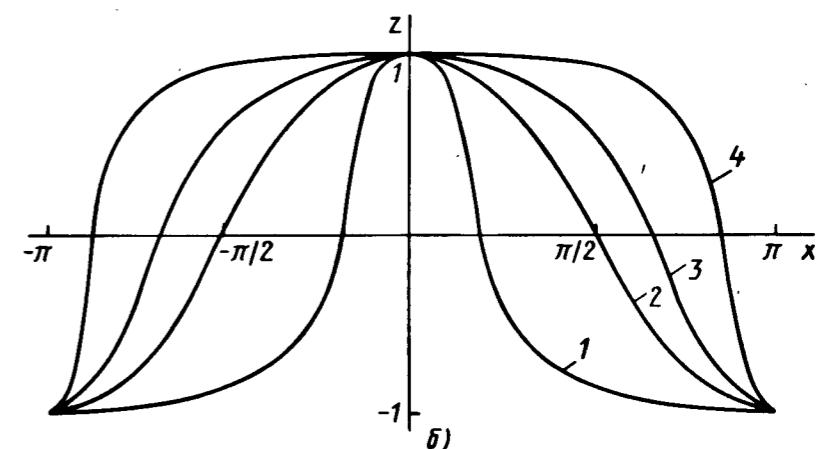
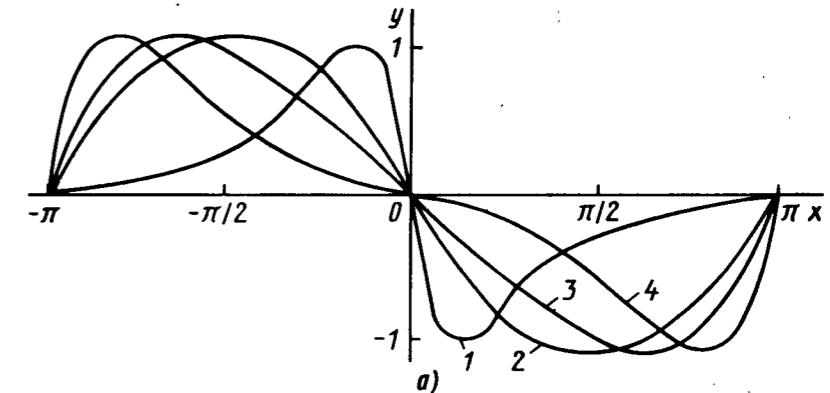


Рис. 3.28

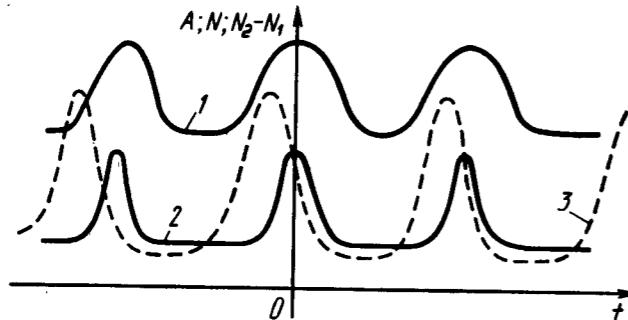


Рис. 3.29

на  $\nu = 0,3$ ; усилие предварительного осевого натяга  $F_z^* = 40$  Н; отклонения средних диаметров шариков:  $d_{0j}^2 = 1$  мкм для  $j = 1, 2, 3$ ,  $d_{0j}^2 = -1$  мкм для  $j = 4, \dots, 7$ ,  $d_{01}^1 = 0,4$  мкм,  $d_{0j}^1 = 0$  для  $j = 2, \dots, 7$ .

**Решение.** Проведем статический расчет.

В первом приближении принимаем  $\delta_0 = 0$ ; затем последовательно вычисляем:

$$v = 1,16 + 1,05 - 2 = 0,21 \text{ мм}; \alpha = -\arccos \frac{1,16 + 1,05 + 3,3655 - 5,37}{0,21} = -11,88^\circ;$$

$$|\sin \alpha| = 0,206; P = 40/(7 \cdot 0,206) = 27,74 \text{ Н}; R_{11} = (2/2 - 1/1,16)^{-1} = 7,25 \text{ мм};$$

$$\begin{aligned} R_{12} &= (2/2 - 1/1,05)^{-1} = 21 \text{ мм}; R_1^* = 5,37 - 1,16(1 - \cos \alpha) = 5,37 - \\ &- 1,16 \cdot 0,0214 = 5,35 \text{ мм}; R_2^* = 3,3655 + 1,05 \cdot 0,024 = 3,39 \text{ мм}; R_{21} = \\ &= (2/2 - 0,9786/3,39)^{-1} = 1,22 \text{ мм}; R_{22} = (2/2 + 0,9786/3,39)^{-1} = 0,776 \text{ мм}; \\ R_{21}/R_{11} &= 0,168; R_{22}/R_{12} = 0,037. \end{aligned}$$

По табл. 2.1 определяем  $k_{\delta_1} = 0,89$ ;  $k_{\delta_2} = 0,65$ . Вычислим коэффициенты

$$K_1 = \frac{2,1 \cdot 10^{11}}{0,91} \left( \frac{1}{7,25 \cdot 10^{-3}} + \frac{1}{1,22 \cdot 10^{-3}} \right)^{-1/2} \frac{1}{(0,89)^{3/2}} =$$

$$= 8,88 \cdot 10^9 \text{ Па} \cdot \text{м}^{1/2};$$

$$K_2 = \frac{2,1 \cdot 10^{11}}{0,91} \left( \frac{1}{21 \cdot 10^{-3}} + \frac{1}{0,776 \cdot 10^{-3}} \right)^{-1/2} \frac{1}{(0,65)^{3/2}} =$$

$$= 1,21 \cdot 10^{10} \text{ Па} \cdot \text{м}^{1/2},$$

$$K_0 = 3,64 \cdot 10^9 \text{ Па} \cdot \text{м}^{1/2}; \delta_0 = \left( \frac{27,74}{3,64 \cdot 10^9} \right)^{2/3} = 3,87 \text{ мкм}.$$

Во втором приближении определяем

$$v = 0,21 + 3,87 \cdot 10^{-6} = 0,2139 \text{ мм}; \alpha^* = -\arccos \frac{0,2055}{0,2139} = -16,05^\circ;$$

$$|\sin \alpha^*| = 0,2765; P^* = 40/(7 \cdot 0,2765) = 20,67 \text{ Н}.$$

Воспользовавшись результатами первого приближения, находим

$$\delta^* = \left( \frac{20,67}{3,64 \cdot 10^9} \right)^{2/3} = 3,18 \text{ мкм}.$$

Ограничимся двумя приближениями. Далее определяем

$$\begin{aligned} R_1^* &= 5,37 - 1,16(1 - 0,961) = 5,32 \text{ мм}; R_2^* = 3,3655 + 1,05(1 - 0,961) = \\ &= 3,46 \text{ мм}; R^* = (5,32 + 3,46)/2 = 4,365 \text{ мм}. \end{aligned}$$

Вычисляем радиальную жесткость опоры

$$K_r = \frac{3P^*}{2\delta^*} Z \cos^2 \alpha^* = \frac{1,5 \cdot 20,67 \cdot 7(0,961)^2}{3,18 \cdot 10^6} = 6,3 \cdot 10^7 \text{ Н/м}.$$

Вычисляем кинематическую угловую скорость сепаратора

$$\omega_c^* = \frac{\Omega R_2^*}{2R^*} = \frac{12391 \cdot 3,46}{2 \cdot 4,365} = 4911 \text{ рад/с.}$$

Постоянную демпфирования определим из формулы (3.224) по найденному в эксперименте на вибростенде относительному уменьшению резонансной частоты. Пусть  $(\omega_r - \omega_*)/\omega_r = 2,4\%$ , где  $\omega_*$  – резонансная частота. Тогда  $\omega_*/\omega_r = 0,95$ , и по формуле (3.224)  $h_r/\omega_r = 0,308$ .

Собственная угловая частота радиальных колебаний

$$\omega_r = \sqrt{K_r/M_r} = \sqrt{6,3 \cdot 10^7 / 2,59} = 4932 \text{ рад/с}$$

Значения  $|c_1|$ ,  $|c_2|$  определяем по формуле (3.335):

$$\begin{aligned} |c_1| &= 0,4 / (7 \cdot 0,961) = 0,06 \text{ мкм}; |c_2| = \frac{1}{7 \cdot 0,961} [(cos 0^\circ + cos 51,4^\circ + \\ &+ cos 102,8^\circ - cos 154^\circ - cos 205^\circ - cos 257^\circ - cos 308^\circ)^2 + (sin 0^\circ + sin 51,4^\circ + \\ &+ sin 102,8^\circ - sin 154^\circ - sin 205^\circ - sin 257^\circ - sin 308^\circ)^2]^{1/2} = 0,15 [(1 + 0,62 - \\ &- 0,22 + 0,81 + 0,9 + 0,22 - 0,78)^2 + (0,78 + 0,97 - 0,58 + 0,42 + 0,97 + 0,78)^2]^{1/2} = \\ &= 0,62 \text{ мкм}. \end{aligned}$$

Отношение  $|c_2|/c_1|$  равно 10,3. Правая часть неравенства (3.346) равна

$$\frac{1 - (4911/4932)^2}{0,308 \cdot 4911/4932} + \sqrt{\frac{[1 - (4911/4932)^2]^2}{0,308^2 (4911/4932)^2} + 1} = 1,029.$$

Таким образом, неравенство (3.346) – условие существования режима биений – соблюдается.

Для определения частоты биений необходимо знать значение  $\tilde{\mu}$ . Подшипник смазывается синтетическим маслом ВНИИ НП-7 так, что обеспечивается режим обильного смазывания, а средняя температура дорожки качения равна 333 К. Масло имеет следующие параметры при температуре 333 К:  $\mu_0 = 0,017 \text{ Па} \cdot \text{с}$ ;  $\alpha_p = 1,2 \cdot 10^{-6} \text{ Па}^{-1}$ ;  $\delta = 0,0152 \text{ К}^{-1}$ ;  $\kappa = 3,3 \cdot 10^{-11} \text{ К}^{-1} \cdot \text{Па}^{-1}$ .

Используя формулу (3.213) и проводя вычисления, аналогичные проведенным ранее, для  $\tilde{\mu}$  получаем значение  $3,73 \cdot 10^{-4} \text{ Н} \cdot \text{с} \cdot \text{м}$ . По формуле (3.347) период биений

$$T = \frac{2 \cdot 3,14 \cdot 3,73 \cdot 10^{-4} [(1 - 0,991)^2 + (0,308 \cdot 0,996)^2]^{1/2} \cdot 10^{13}}{7,3 \cdot 10^7 [(0,62^2 - 0,06^2)^2 (0,308 \cdot 0,996)^2 - 4 \cdot 0,62^2 \cdot 0,06^2 \cdot (1 - \\ - 0,991)^2]^{1/2}} = \frac{6,28 (8 \cdot 10^{-5} + 0,094) 10^5 \cdot 3,73 \cdot 10^{-4}}{6,3 [0,145 \cdot 0,094 - 4,48 \cdot 10^{-7}]^{1/2}} = 25 \text{ с.}$$

Частота биений

$$f_b = 1/T = 0,04 \text{ Гц.}$$

Наибольшая амплитуда радиальных колебаний

$$A_{\max} = \frac{6 \cdot 10^{-3} + 6,2 \cdot 10^{-7}}{\sqrt{(1 - 0,996^2)^2 + (0,308 \cdot 0,996)^2}} = 2,2 \text{ мкм.}$$

Наибольшая амплитуда изменения контактного сближения

$$A_{\max} \cos \alpha^* = 2,2 \cdot 0,961 = 2,1 \text{ мкм},$$

что меньше  $\delta^* = 3,18 \text{ мкм}$ . Наименьшая амплитуда радиальных колебаний

$$A_{\min} = \frac{5,6 \cdot 10^{-7}}{\sqrt{8,1 \cdot 10^{-5} + 0,094}} = 1,8 \text{ мкм}.$$

Амплитуда биений  $\Delta A = 0,2 \text{ мкм}$ . По формуле (3.349) при  $M_0 = 10^{-4} \text{ Н} \cdot \text{м}$  среднее значение мощности

$$\langle N \rangle = \frac{3,46}{4,365} 12391 [10^{-4} + \frac{6,3 \cdot 10^7 \cdot 0,308 \cdot 0,996 (6^2 \cdot 10^{-6} + 6,2^2 \cdot 10^{-4})}{2[(1 - 0,996^2)^2 + (0,308 \cdot 0,996)^2]}] =$$

$$= 1,37 \text{ Вт.}$$

Среднее значение разности мощностей

$$\langle N_1 \rangle - \langle N_2 \rangle = 0,79 \cdot 3,14 \cdot 3,73 \cdot 10^{-4} \cdot 12391 / 25 = 0,46 \text{ Вт.}$$

Амплитуда колебаний мощности

$$\Delta N = 0,79 \cdot 6,3 \cdot 10^7 \cdot 0,308 \cdot 0,996 \cdot 6 \cdot 10^{-6} \cdot 6,2 \cdot 10^{-7} \cdot 12391 / 0,094 = 75 \text{ мВт.}$$

Амплитуда колебаний разности мощностей

$$\Delta(N_2 - N_1) = 0,79 \cdot 6,3 \cdot 10^7 (1 - 0,996^2) 6 \cdot 10^{-6} \cdot 6,2 \cdot 10^{-7} \cdot 12391 / 0,094 = \\ = 2 \text{ мВт.}$$

Целесообразно оценить применимость теории, сравнив нагрузку на шарик от предварительного натяга  $P^* = 20,67 \text{ Н}$  с расчетной нагрузкой  $P_g \approx 0,5M_0g \cdot 5/Z = 0,5 \cdot 2,59 \cdot 9,8 \cdot 5/7 = 9 \text{ Н}$  на наиболее нагруженный шарик от веса маховика при его горизонтальном расположении. Центробежная сила, действующая на шарик,

$$F_{\text{ц}} = m_b \omega_c^{*2} R^* = \frac{1}{6} \pi (p_7^0)^3 \rho (\omega_c^*)^2 R^* = \frac{3,14}{6} 8 \cdot 10^{-9} \cdot 7,8 \cdot 10^3 \cdot 4911^2 \times \\ \times 4,36 \cdot 10^{-3} = 3,43 \text{ Н.}$$

Видно, что  $P_g$  и  $F_{\text{ц}}$  существенно меньше  $P^*$ , так что теорией, в которой за основное состояние роторной системы принято состояние предварительного натяга, пользоваться можно.

Нестабильность момента  $M(t)$  сопротивления вращению маховика можно рассчитать по формулам (3.348), (3.349), (3.351) для мощности. Момент

$$M(t) = \frac{R_2^*}{R^*} \left\{ M_0 + \frac{K_r \omega_r^2 h_r \omega_c^*}{(\omega_r^2 - \omega_c^{*2})^2 + h_r^2 \omega_c^{*2}} \left[ \frac{|c_1|^2 + |c_2|^2}{2} + \right. \right. \\ \left. \left. + |c_1 c_2| \cos(\theta - \theta_0) \right] \right\}$$

имеет среднее значение по периоду

$$\langle M \rangle = \frac{R_2^*}{R^*} \left[ M_0 + \frac{K_r \omega_r^2 h_r \omega_c^*}{(\omega_r^2 - \omega_c^{*2})^2 + h_r^2 \omega_c^{*2}} \left[ \frac{|c_1|^2 + |c_2|^2}{2} \right] \right]$$

и амплитуду колебаний (полуразность наибольшего и наименьшего значений)

$$\Delta M = \frac{R_2^* K_r \omega_r^2 h_r \omega_c^*}{R^* [(\omega_r^2 - \omega_c^{*2})^2 + h_r^2 \omega_c^{*2}]} |c_1 c_2|.$$

Для рассматриваемого узла

$$\langle M \rangle = \frac{\langle N \rangle}{\Omega} = \frac{1,43}{12,391} = 1,1 \cdot 10^{-4} \text{ Н} \cdot \text{м};$$

$$\Delta M = \frac{\Delta N}{\Omega} = \frac{75 \cdot 10^{-9}}{12,391} = 6 \cdot 10^{-6} \text{ Н} \cdot \text{м.}$$

### 3.8. ПЛОСКОЕ ДВИЖЕНИЕ СЕПАРАТОРА

В предшествующих подразделах исследование динамики ротора на подшипниках или одного подшипника основывалось на предположении, что движение сепаратора заранее предписано, а именно сепаратор занимает центральное положение и вращается в общем случае с переменной угловой скоростью. Однако во многих случаях необходимым элементом расчета является определение характера движения самого сепаратора и сил, действующих на него со стороны шариков и базы кольца. Так, ресурс шариковых подшипников газовой турбины летательного аппарата ограничивается износом базы сепаратора. Режим движения сепаратора приборного подшипника определяющим образом влияет на погрешность измерений гирокомпаса.

До недавнего времени отсутствовали сколь-нибудь точные математические модели и надежные теоретические результаты, позволяющие предсказать кинематику и динамику сепаратора. Сложность построения математической модели объясняется несколькими причинами. Во-первых, до сих пор нет полного понимания того, какой режим трения – гидродинамический или граничный (что зависит от количества смазочного материала в подшипнике) – реализуется в конкретном подшипнике в контактах сепаратор – кольцо, шарик – окно сепаратора. Для ответа на этот вопрос необходимо правильное моделирование процессов миграции смазочного материала в объеме всего подшипника, включая явление срыва капель масла с сепаратора (джог-эффект). Однако эта задача сама по себе достаточно сложна и в настоящее время не решена полностью. Во-вторых, вследствие наличия конструктивных зазоров на движение сепаратора не наложено жестких связей, что не позволяет даже в общих чертах предписать режим его движения. В-третьих, сепаратор взаимодействует с комплектом шариков, движение которых также не задано.

Наиболее полная модель, позволяющая рассчитать движение сепаратора, должна рассматривать динамику всего подшипника. Именно в такой постановке, однако с разной степенью сложности и полноты учета различных факторов, задача решалась некоторыми исследователями (Уолтерс, М.И. Курушин, В.М. Петров, П.Г. Рusanov). Ими были составлены программы расчета на ЭВМ динамики шарикового подшипника. Однако вследствие чрезвычайно малого быстродействия указанных программ их авторам удалось просчитать лишь несколько оборотов вращения ротора, что практически не дает никакой информации о движении сепаратора, поскольку характерное число оборотов, необходимое для выхода на установившийся режим, составляет 100 или более.

В настоящее время разработана математическая модель и составлена программа расчета динамики ротора на двух радиально-упорных шариковых подшипниках. В модели учитываются отклонения формы дорожек качения и шариков, перекосы и неравномерное расположение окон сепаратора, зазор базирования, произвольные внешние силы и моменты, приложенные к ротору, толщины пленок в контактах шариков с кольцами.

Для вывода сепаратора на установившийся режим была составлена упрощенная программа расчета динамики плоского движения сепаратора (по радиальным смещениям центра масс). Указанные программы позволили провести детальное исследование динамики сепаратора в приборном подшипнике 106074 (диаметр шарика 2 мм;  $Z = 7$ ; частота вращения внутреннего кольца 30 000  $\text{мин}^{-1}$ ; текстолитовый сепаратор, базирующийся относительно наружного кольца; гнезда имеют цилиндрическую форму). Исследовали контактное взаимодействие сепаратора с базой при обильном смазывании, недостаточном смазывании, кулоновском трении (которое при надлежащем подборе коэффициента трения может аппроксимировать режим граничной смазки).

Введем обозначения:  $\Delta$  – радиальный зазор базирования;  $\lambda$  – радиальный зазор шарика в окне;  $\gamma$  – угол поворота сепаратора относительно собственной оси;  $\psi_c$  – угол положения центра сепаратора относительно неподвижной системы, связанной с подшипником ( $\psi_c$  характеризует орбитальное движение центра масс).

Номинальные значения  $\Delta$  и  $\lambda$  для указанного подшипника составляют соответственно  $50 \cdot 10^{-6}$  м,  $75 \cdot 10^{-6}$  м.

Основные результаты расчета сводятся к следующему.

При обильном смазывании угловая скорость  $\dot{\gamma}$  сепаратора близка к кинематическому значению, а скорость  $\dot{\psi}_c$  орбитального движения центра близка к  $0,5\dot{\gamma}$  (режим "полускоростного вихря"). Данный режим – следствие зависимости силы базирования от скорости качения, которая пропорциональна  $\dot{\psi}_c - 0,5\dot{\gamma}$ . Поэтому движение происходит таким образом, чтобы указанная сила, а следовательно, и  $\dot{\psi}_c - 0,5\dot{\gamma}$  были малы.

При недостаточном смазывании траектория движения центра масс сепаратора близка к окружности радиуса  $\Delta$ , значение  $\nu_s = (\dot{\psi}_c - \dot{\gamma})/(2\pi)$  не превышает 10 ... 20 Гц, отличие  $\dot{\psi}_c$  от значения  $\omega_c^*$  (около 200 Гц) не превышает нескольких процентов. Значение  $\nu_s$  равно частоте движения точки касания сепаратора с кольцом по поверхности сепаратора. При  $\nu_s = 0$  точка касания неподвижна относительно сепаратора. Описанные режимы движения не согласуются с результатами стробоскопических наблюдений за кинематикой сепаратора данного подшипника. Последнее свидетельствует о том, что в контакте с базой, по-видимому, осуществляется режим граничной смазки. По этой причине более подробно была исследована модель с кулоновским трением.

При кулоновском трении, как показали расчеты, возможны три вида движения сепаратора в зависимости от отношения  $\lambda/\Delta$ :

при  $\lambda/\Delta < 3$  рассчитанные параметры движения сепаратора полностью соответствуют определенным экспериментально; при этом центр сепаратора движется по окружности радиуса  $\Delta$ , т. е. все время касается базы кольца, и значение  $\nu_s$  не превышает 1 Гц;

при  $3 \leq \lambda/\Delta \leq 5$  сепаратор совершает нерегулярное движение, причем отношение  $\dot{\psi}_c/\dot{\gamma}$  может принимать как положительные, так и отрицательные значения;

при  $\lambda/\Delta > 5$  сепаратор обкатывает базу (кольцо); силы базирования в этом случае значительно возрастают по сравнению с силами при первом виде движения.

Первый режим наиболее благоприятен для гироскопического подшипника; при этом необходимо, чтобы отношение зазора в окне сепаратора к зазору базирования было не слишком велико (для указанного выше подшипника меньше 3). Если зазор в окне велик, у сепаратора появляется возможность катиться по базе (кольцу) практически без столкновений с шариками.

Можно ожидать, что, хотя расчеты проводили для конкретного приборного подшипника, каждый из указанных режимов может реализоваться в произвольном подшипнике.

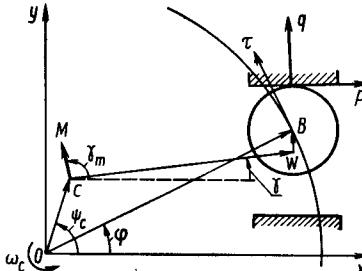
**Аналитический метод расчета параметров движения сепаратора.** Изложим аналитический подход к исследованию движения сепаратора при  $\lambda/\Delta < 3$ , разработанный В.П. Ковалевым.

Пусть сепаратор базируется относительно неподвижного наружного кольца; при этом внутреннее кольцо вращается.

Введем неподвижную правую систему координат  $Oxyz$ , ось  $Oz$  которой является осью симметрии подшипника. Обозначим (рис. 3.30):  $C$  – центр сепаратора;  $M$  – центр масс сепаратора;  $B$  – центр некоторого шарика;  $p$  и  $q$  – единичные векторы, направленные вдоль окна сепаратора и перпендикулярно ему;  $\tau$  – единичный вектор, направленный вдоль окружности центров шариков;  $W$  – точка, определяемая условиями:  $CW$  проходит через центр окна, вектор  $\vec{WB}$  параллелен  $q$ . На рис. 3.30 заштрихованы передняя и задняя стенки окна сепаратора, шарик касается передней стенки. Введен  $\gamma$ ,  $\varphi$ ,  $\psi_c$ ,  $\gamma_m$  – полярные углы векторов  $\vec{CW}$ ,  $\vec{OB}$ ,  $\vec{OC}$ ,  $\vec{CM}$  соответственно. Обозначим  $d_m = \vec{CM}$ ;  $\Delta = \vec{OC}$ ;  $R = \vec{OB}$ ;  $d_m$ ,  $\Delta$ ,  $R^*$  – длины указанных векторов. Пусть  $e_x$ ,  $e_y$ ,  $e_z$  – орты, направленные вдоль осей  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$ . Введем также  $e_\psi = -e_x \sin \psi_c + e_y \cos \psi_c$ ,  $e_\Delta = e_x \cos \psi_c + e_y \sin \psi_c$ ; очевидно, что  $\tau = -e_x \sin \varphi + e_y \cos \varphi$ . Рассмотрим плоское движение сепаратора, при котором  $CW$  лежит в плоскости  $Oxy$ . Тогда  $q = -e_x \sin \gamma + e_y \cos \gamma$ ,  $p = e_x \cos \gamma + e_y \sin \gamma$ ; радиус-вектор точки контакта шарика с окном  $r_k = R + q(p^0/2)$ . Из равенства  $\vec{OC} + \vec{CW} + \vec{WB} = \vec{OB}$  получим

$$\sin(\varphi - \gamma) = e_\Delta \sin(\psi_c - \gamma) + \Lambda, \quad (3.352)$$

где  $e_\Delta = \Delta/R^*$ ;  $\Lambda = \lambda/R^*$ ;  $\lambda = BW$ .



Скорость сепаратора в точке контакта с шариком

$$u_k = \dot{\Delta} + [e_z \dot{\gamma}, (r_k - \Delta)].$$

Скорость центра шарика  $u_p = u_p \tau$ .

Рис. 3.30

При движении шарика окна  $((u_p - u_k), q) = 0$  или вместе со стенкой

$$u_p = (u_k, q) / (\tau, q). \quad (3.353)$$

Пусть  $\omega_c^*$  – кинематическая угловая скорость центра шарика. Преобразуем выражение (3.353):

$$u_0 - u_p = R^* [\omega_c^* - \dot{\gamma} - e_\Delta (\dot{\psi}_c - \dot{\gamma}) \frac{\cos(\psi_c - \gamma)}{\cos(\varphi - \gamma)}],$$

где  $u_0 = R^* \omega_c^*$ .

Составляющая вдоль  $\tau$  силы, действующей со стороны колец на шарик,  $f = f_\tau$ ,  $f \equiv |f|$ . Со стороны шарика на сепаратор действует сила  $F \equiv F' q + k_0 F' p$ , где  $k_0$  – коэффициент трения шарика в окне. Пренебрегая инерцией шарика, сведем уравнение движения его центра к условию равновесия сил, действующих на шарик в проекции на  $\tau$ :  $((f - F), \tau) = 0$  или

$$F' = f / [(q, \tau) + k_0 (p, \tau)]. \quad (3.354)$$

Для определения силы  $f$  воспользуемся формулой (3.163), предположив, что  $\tilde{K}_1 \alpha_{s1} \doteq \tilde{K}_2 \alpha_{s2}$ . Тогда

$$F_{ct} = 2\tilde{K}_1 \alpha_{s1} R^* (\omega_c - \omega_c^*) = k_\tau (u_p - u_0),$$

где  $k_\tau = 2\tilde{K}_1 \alpha_{s1}$ . На шарик же действует сила  $f = -F_{ct} = k_\tau (u_0 - u_p)$ . Используя формулу (3.354), получим

$$F' = \frac{k_\tau (u_0 - u_p)}{\cos(\varphi - \gamma) - k_0 \sin(\varphi - \gamma)}. \quad (3.355)$$

Рассмотрим только такие движения, когда сепаратор касается базы наружного кольца. Тогда  $\Delta$  – радиальный зазор базирования. Назовем состояние шарика активным или пассивным в зависимости от того, касается или нет он окна сепаратора. В активном состоянии шарик может быть либо ведущим, либо ведомым в зависимости от того, касается он передней или задней стенки окна.

Предположим, что на сепаратор не действуют никакие инерционные силы, кроме центробежной. Тогда уравнения движения его сводятся к уравнениям равновесия

$$\sum_{j=1}^Z F_j + P_\omega + P_b = 0; \quad (3.356)$$

$$\sum_{j=1}^Z [(r_{kj} - \Delta), F_j] + [d_m, P_\omega] + e_z M_b = 0. \quad (3.357)$$

Здесь  $P_\omega = (\Delta + d_m) m_s \dot{\psi}_c^2$  – центробежная сила;  $m_s$  – масса сепаратора;  $P_b = -P'_b e_\Delta - k P'_b e_\psi$  – сила, действующая со стороны базы на сепаратор;  $k$  – коэффициент трения в контакте этих поверхностей;  $e_z M_b = -e_z M_0 + R_s [e_\Delta, P_b]$  – момент относительно точки  $C$ ;  $M_0$  – постоянная

составляющая момента базирования, обусловленная, например, аэродинамическим трением;  $R_s$  – наружный радиус сепаратора.

В формулах (3.356), (3.357) и далее предположено, что все шарики ведущие. Векторное уравнение (3.356) можно представить как два скалярных

$$\sum_{j=1}^Z (\mathbf{F}_j, \mathbf{e}_\psi) + (\mathbf{P}_\omega, \mathbf{e}_\psi) + (\mathbf{P}_b, \mathbf{e}_\psi) = 0; \quad (3.358)$$

$$\sum_{j=1}^Z (\mathbf{F}_j, \mathbf{e}_\Delta) + (\mathbf{P}_\omega, \mathbf{e}_\Delta) + (\mathbf{P}_b, \mathbf{e}_\Delta) = 0. \quad (3.359)$$

Анализ соотношения (3.352) показывает, что  $\varphi_j - \gamma_j$  – малая первого порядка по  $\epsilon_\Delta$  и  $\Lambda$ . Учитывая это, преобразуем уравнения (3.355), (3.357) – (3.359) к виду

$$[1 - k_0 p_7^0 / (2R^*)] \sum_{j=1}^Z F'_j - k\kappa' P'_b - M_0 / R^* = 0;$$

$$\sum_{j=1}^Z F'_j [\cos(\psi_c - \gamma_j) - k_0 \sin(\psi_c - \gamma_j)] - m_s \dot{\psi}_c^2 d_m \sin(\psi_c - \gamma_m) - kP'_b = 0;$$

$$\sum_{j=1}^Z F'_j [\sin(\psi_c - \gamma_j) + k_0 \cos(\psi_c - \gamma_j)] + m_s \dot{\psi}_c^2 [\Delta + d_m \cos(\psi_c - \gamma_m)] = P'_b;$$

$$F'_j = k_r R^* [\omega_c^* - \dot{\gamma} - \epsilon_\Delta (\dot{\psi}_c - \dot{\gamma}) \cos(\psi_c - \gamma_j)],$$

где  $\kappa' = (\Delta + R_s) / R^*$ ;  $\gamma_j = \gamma_1 + \frac{2\pi}{Z} (j-1)$ ;  $j = 1, \dots, Z$ .

Решим эту систему при условии отсутствия пассивных шариков. Используя равенства

$$\sum_{j=1}^Z \cos(\psi_c - \gamma_j) = \sum_{j=1}^Z \sin(\psi_c - \gamma_j) = 0, \quad Z \geq 2;$$

$$\sum_{j=1}^Z \cos^2(\psi_c - \gamma_j) = \sum_{j=1}^Z \sin^2(\psi_c - \gamma_j) = 0.5Z, \quad Z \geq 3;$$

$$\sum_{j=1}^Z \sin(\psi_c - \gamma_j) \cos(\psi_c - \gamma_j) = 0, \quad Z \geq 3,$$

получим уравнения

$$[1 - k_0 p_7^0 / (2R^*)] k_r R^* (\omega_c^* - \dot{\gamma}) Z - k\kappa' P'_b - M_0 / R^* = 0;$$

$$k_r \epsilon_\Delta R^* (\dot{\psi}_c - \dot{\gamma}) 0.5Z + m_s \dot{\psi}_c^2 d_m \sin(\psi_c - \gamma_m) + kP'_b = 0,$$

где

$$P'_b = -k_0 k_r \epsilon_\Delta R^* (\dot{\psi}_c - \dot{\gamma}) 0.5Z + m_s \dot{\psi}_c^2 [\Delta + d_m \cos(\psi_c - \gamma_m)]. \quad (3.360)$$

Будем искать решение, в котором  $\dot{\psi}_c \approx \dot{\gamma}$  (при  $\lambda/\Delta < 3$ ). Так как проскальзывание мало ( $\dot{\gamma} \approx \omega_c^*$ ), подставим в выражение для центробежной силы  $\dot{\psi}_c = \omega_c^*$ . Исключив  $P'_b$ , получим

$$(1 - kk_0) k_r \epsilon_\Delta R^* (\dot{\psi}_c - \dot{\gamma}) 0.5Z = -m_s \omega_c^{*2} [k\Delta + d_m \sin(\psi_c - \gamma_m) + kd_m \cos(\psi_c - \gamma_m)];$$

$$[1 - k_0 p_7^0 / (2R^*)] k_r R^* Z (\omega_c^* - \dot{\gamma}) = -kk' k_0 k_r \epsilon_\Delta R^* (\dot{\psi}_c - \dot{\gamma}) 0.5Z + M_0 / R^* + kk' m_s \omega_c^{*2} [\Delta + d_m \cos(\psi_c - \gamma_m)] \equiv M_0 / R^* + kk' [\Delta + k_0 d_m \sin(\psi_c - \gamma_m) + d_m \cos(\psi_c - \gamma_m)] m_s \omega_c^{*2} / (1 - kk_0). \quad (3.361)$$

Первое уравнение (3.361) представляет собой дифференциальное уравнение относительно  $\psi_c - \gamma_m$ . Перепишем его в виде [см. уравнение (3.340)]

$$\dot{\psi}_c - \dot{\gamma}_m = -\frac{2\pi}{T} [1 + A \sin(\psi_c - \gamma_m + \phi')], \quad (3.362)$$

где  $T = \pi(1 - kk_0) k_r Z / (m_s \omega_c^{*2} k)$  – период прохождения точки контакта по сепаратору при  $A = 0$ ;  $A = d_m \sqrt{1 + k^2} / (k\Delta)$ ;  $\phi' = \arctg k$ .

Пусть  $A = 0$  (например, отсутствует дисбаланс). Тогда

$$\dot{\psi}_c - \dot{\gamma}_m = -\frac{2\pi}{T} \equiv -\frac{2m_s \omega_c^{*2} k}{(1 - kk_0) k_r Z}, \quad (3.363)$$

и из (3.361) следует, что

$$\omega_c^* - \dot{\gamma}_m = \frac{M_0 / R^* + m_s \omega_c^{*2} k \kappa' \Delta / (1 - kk_0)}{[1 - k_0 p_7^0 / (2R^*)] k_r R^* Z}, \quad (3.364)$$

т. е. центр сепаратора вращается с постоянной угловой скоростью.

Рассмотрим (3.362) при  $0 < A < 1$ . Интегрированием получим алгебраическое соотношение

$$\operatorname{tg} \frac{\psi_c - \gamma_m}{2} + A = -\sqrt{1 - A^2} \operatorname{tg} \frac{\pi \sqrt{1 - A^2} (t - t_0)}{T},$$

которому удовлетворяет искомое решение. После преобразований получим выражение

$$\dot{\psi}_c - \dot{\gamma}_m = -2\pi \frac{1 - A^2}{T} [1 + A \sin(2\pi \sqrt{1 - A^2} \frac{t - t_0}{T})] \Gamma^1,$$

в котором  $t_0$  и  $t_1$  связаны соотношением

$$(t_0 - t_1) \sqrt{1 - A^2} = \frac{T}{2\pi} \arcsin A.$$

Таким образом,  $\dot{\psi}_c - \dot{\gamma}_m$  — периодическая функция времени с периодом  $T/\sqrt{1 - A^2}$ ; если  $A \rightarrow 1$ , то  $T/\sqrt{1 - A^2} \rightarrow \infty$ , а амплитуда стремится к нулю.

При  $A > 1$  уравнение (3.362) допускает два стационарных решения:

$$\psi_c - \gamma_m + \varphi' + \arcsin \frac{1}{A} = 0,$$

$$\psi_c - \gamma_m + \varphi' + \pi - \arcsin \frac{1}{A} = 0.$$

Второе решение не удовлетворяет условию устойчивости

$$\frac{\partial [1 + A \sin(\psi_c - \gamma_m + \varphi')]}{\partial (\psi_c - \gamma_m)} > 0.$$

Теоретически это означает, что небольшое возмущение выводит систему из положения равновесия. На практике такое решение не может реализоваться. Режим, при котором  $A > 1$ , предпочтительнее режима при  $A < 1$ , так как в первом случае отсутствуют низкочастотные колебания, ведущие вследствие технологических погрешностей изготовления к низкочастотным изменениям момента сопротивления вращению ротора, нестабильность которого в гироскопическом подшипнике приводит к погрешностям измерений всего прибора.

**Пример 3.7.** Рассчитать параметры движения сепаратора в подшипнике 106074 при следующих данных:  $Z = 7$ ;  $p_1^0 = p_2^0 = 1,08 \cdot 10^{-3}$  м;  $p_3^0 = 5,42 \cdot 10^{-3}$  м;  $p_4^0 = 3,399 \cdot 10^{-3}$  м;  $R_s^0 = 2 \cdot 10^{-3}$  м;  $R_s^* = 4,95 \cdot 10^{-3}$  м;  $\alpha_0 = 30^\circ$ ;  $\Delta = 50 \cdot 10^{-6}$  м;  $m_s = 46 \cdot 10^{-6}$  кг;  $\omega_c^* = 1200$  рад/с;  $k_r = 35$  кг/с;  $M_0 = 50 \cdot 10^{-6}$  Н · м; внутреннее кольцо вращается; сепаратор базируется относительно неподвижного наружного кольца; около 25 % момента сопротивления вращению, равного  $2 \cdot 10^{-4}$  Н · м, определяется сепаратором с нулевым дисбалансом. Расчет провести для двух значений дисбаланса  $d_m = 0; 20 \cdot 10^{-6}$  м. Трением шарика о сепаратор пренебречь ( $k_0 = 0$ ).

Решение. Вычислим  $R^* = 0,5(R_1^* + R_2^*)$ :

$$R_1^* = p_3^0 - p_1^0(1 - \cos \alpha_0) = 5,42 \cdot 10^{-3} - 1,08 \cdot 10^{-3} \cdot 0,134 = 5,28 \cdot 10^{-3}$$
 м;

$$R_2^* = p_4^0 + p_1^0(1 - \cos \alpha_0) = 3,399 \cdot 10^{-3} + 1,08 \cdot 10^{-3} \cdot 0,134 = 3,25 \cdot 10^{-3}$$
 м;

$$R^* = 4,27 \cdot 10^{-3}$$
 м.

По формуле (3.360) находим

$$P_b' = m_s \psi_c^2 \{ \Delta + d_m \cos(\psi_c - \gamma_m) \} \approx m_s \omega_c^{*2} [\Delta + d_m \cos(\psi_c - \gamma_m)].$$

Момент, действующий на сепаратор, равен  $M_0 + P_b' R_s k$ . С учетом (3.360) для сепаратора с нулевым дисбалансом

$$R_2^* (M_0 + m_s \omega_c^{*2} \Delta R_s k) / (2R^*) = 0,25 \cdot 2 \cdot 10^{-4}$$
 Н · м.

Из этого соотношения

$$k = \frac{0,25 \cdot 2 \cdot 10^{-4} \cdot 2 \cdot 4,27 \cdot 10^{-3} / (3,25 \cdot 10^{-3}) - 5 \cdot 10^{-6}}{4,6 \cdot 10^{-5} (1200)^2 \cdot 5 \cdot 10^{-6} \cdot 4,95 \cdot 10^{-3}} = 4,96.$$

Найдем амплитуду  $A'$  переменной составляющей момента сопротивления вращению:

$$A' = m_s \omega_c^{*2} d_m R_s k R_s^* / (2R) = 4,6 \cdot 10^{-6} \cdot 1200^2 \cdot 4,95 \cdot 10^{-3} \cdot 4,96 \cdot 3,25 d_m / (2 \times 4,27) = 0,619 d_m.$$

При  $d_m = 0$  амплитуда  $A'$  равна нулю, следовательно, момент сопротивления постоянен. Из формулы (3.363) находим

$$T = \frac{\pi k_r Z}{m_s \omega_c^{*2} k} = \frac{3,14 \cdot 35 \cdot 7}{4,6 \cdot 10^{-6} \cdot 1200^2 \cdot 4,96} = 2,34 \text{ с.}$$

Частота, соответствующая данному периоду, равна 0,43 Гц. По формуле (3.364) находим отклонение  $\gamma_m$  от кинематической скорости сепаратора:

$$\kappa' = \frac{5 \cdot 10^{-6} + 4,95 \cdot 10^{-3}}{4,27 \cdot 10^{-3}} = 1,17; \quad \omega_c^* - \dot{\gamma}_m = \frac{5 \cdot 10^{-6} / (4,27 \cdot 10^{-3}) + 4,6 \cdot 10^{-6} \cdot 1200^2 \cdot 4,96 \cdot 1,17 \cdot 5 \cdot 10^{-6}}{35 \cdot 4,27 \cdot 10^{-3} \cdot 7} = 3 \cdot 10^{-2} \text{ рад/с}$$

(соответствует частоте  $4,8 \cdot 10^{-3}$  Гц).

$$\omega_c^* - \dot{\psi}_c = (\omega_c^* - \dot{\gamma}_m) - (\dot{\psi}_c - \dot{\gamma}_m) = 3 \cdot 10^{-2} + 2 \cdot 3,14 / 2,34 = 2,7 \text{ рад/с} \quad (\text{соответствует частоте } 4,3 \text{ Гц}).$$

При  $d_m = 2 \cdot 10^{-6}$  м амплитуда колебаний момента

$$A' = 0,619 \cdot 2 \cdot 10^{-6} = 1,24 \cdot 10^{-6} \text{ Н · м.}$$

Определим  $A$ :

$$A = \frac{2 \cdot 10^{-6}}{5 \cdot 10^{-6}} \sqrt{1 + (4,96)^2} / 4,96 = 0,4.$$

Период  $T/\sqrt{1 - A^2}$  функции  $\dot{\psi}_c - \dot{\gamma}_m$  равен 2,6 с. Как следует из формулы (3.362), разность  $\dot{\psi}_c - \dot{\gamma}_m$  зависит от времени, а амплитуда ее относительного изменения равна 0,8.

Конструкция сепаратора, базирующегося относительно шариков. Обычно сепаратор приборного шарикового подшипника базируют относительно одного из колец. Такое базирование имеет определенные недостатки, связанные с повышением момента сопротивления вращению и его нестабильностью. В связи с этим представляет интерес создание сепаратора, базирующегося относительно тел качения. Для устранения возможности касания сепаратора и кольца, как правило, специальным способом профилируют окна сепаратора (например, выполнив их коническими). Однако подобные сепараторы трудно изготовить. Кроме того, ограничение движения шарика вдоль оси окна может привести к тепловому заклиниванию.

## ГЛАВА 4

### ДОЛГОВЕЧНОСТЬ ПОДШИПНИКОВЫХ УЗЛОВ

#### 4.1. НАДЕЖНОСТЬ ДЕТАЛЕЙ

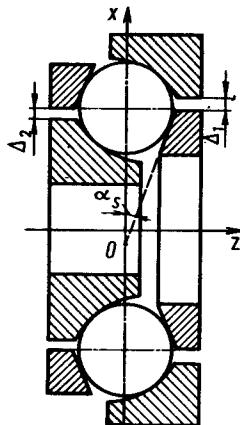


Рис. 3.31

Приведенная на рис. 3.31. конструкция позволяет устранить указанные недостатки. Окно сепаратора имеет цилиндрическую форму, а его ось составляет угол  $\alpha_s$  с плоскостью, перпендикулярной  $Oz$ . Максимальное радиальное перемещение центра сепаратора вычисляем по формуле

$$\rho_m = \lambda / \sin \alpha_s.$$

Для устранения возможности касания сепаратора с кольцами необходимо обеспечить выполнение условия

$$\min(\Delta_1, \Delta_2) > \lambda / \sin \alpha_s. \quad (3.365)$$

Применение указанного сепаратора позволит снизить момент сопротивления вращению прибором подшипнике на 20 ... 30 %.

Расчет долговечности подшипников по критерию контактной усталости проводят на основе теории разрушения Вейбулла, согласно которой вероятность разрушения элемента сплошной среды пропорциональна объему этого элемента. Впервые эта теория была применена к расчету подшипников качения Лундбергом и Пальмгреном, основные идеи которых использованы в излагаемом ниже методе расчета подшипников на долговечность.

Пусть некоторая частица материала (с элементарным объемом  $dV$ ) кольца находится в периодическом во времени напряженном состоянии. Такое состояние возникает в любой точке кольца при периодическом прокатывании шарика или ролика над этой точкой. Во время цикла нагружения, имеющего номер  $n$ , в частице  $dV$  может возникнуть микротрешина. Вероятность  $p(n)dV$  возникновения микротрешины во время  $n$ -го цикла зависит от напряженного состояния, физико-механических характеристик материала в момент времени, предшествующий разрушению, расположения частицы  $dV$  в кольце.

Величины, характеризующие напряженное состояние, а следовательно, и вероятность возникновения микротрешины в частице  $dV$ , имеют два характерных времени изменения.

*Медленные* изменения происходят в течение многих ( $\tilde{L}$ ) оборотов вследствие изменения нагрузки на подшипник, например, при ускорении или криволинейном движении самолета, поезда или автомобиля.

*Быстрые* изменения происходят от цикла к циклу, как, например, для элемента кольца, вращающегося относительно линии действия приложенной к подшипнику силы. Указанные изменения наблюдаются при динамической неуравновешенности маховика, когда за один оборот вала меняется нагрузка на объем  $dV$  неподвижного кольца. Эта нагрузка так же быстро меняется при вибрации ротора на частотах, близких к частоте его вращения. При этом  $0 < k \leq m$ , где  $k$  – номер цикла в обороте;  $m$  – число циклов нагружения за один оборот.

Полное число циклов нагружения частицы  $dV$

$$n = \tilde{L}m + k$$

Вероятность разрушения единичного объема за один цикл является функцией от  $k$  и  $\tilde{L}$ :

$$p(n) = p(k, \tilde{L}).$$

Пусть в частице  $dV$  имеется  $q$  элементов и их усталостное разрушение происходит независимо. Тогда вероятность  $S$  неразрушения частицы  $dV$  равна произведению вероятностей неразрушения элементов:

$$S = S_1 S_2 \dots S_q = (1 - p_1) (1 - p_2) \dots (1 - p_q),$$

где  $p_j$  – вероятность разрушения  $j$ -го элемента ( $j = 1, \dots, q$ ). Поскольку  $p_j \ll 1$ , вероятность разрушения частицы  $dV$

$$p = 1 - S \approx \sum_{j=1}^q p_j.$$

Пусть  $V^*$  – характерный объем структурного элемента, полученный некоторым усреднением. Тогда число  $q$  элементов в объеме  $dV$  равно  $dV/V^*$ . Введя среднюю вероятность  $p_0$  разрушения элемента, получим

$$p = p_0 q = p_0 \frac{dV}{V^*}.$$

Видно, что вероятность разрушения частицы пропорциональна ее объему, а  $p_0/V^*$  есть вероятность разрушения единичного объема.

Выразим вероятность безотказной работы кольца в течение  $\tilde{L}$  оборотов через вероятность разрушения частицы за один цикл. Для этого найдем сначала вероятность неразрушения фиксированной частицы в течение одного оборота. Поскольку число циклов нагружения за один оборот равно  $m$ , причем  $m \gg 1$ , а  $p(k, \tilde{L})m \ll 1$ , то

$$\begin{aligned} [1 - p(1, \tilde{L})dV] [1 - p(2, \tilde{L})dV] \dots [1 - p(m, \tilde{L})dV] &\approx \\ \approx 1 - \sum_{k=1}^m p(k, \tilde{L})dV &\approx 1 - \int_0^m p(k, \tilde{L})dkdV \equiv 1 - g(\tilde{L})dV, \end{aligned}$$

где  $g(\tilde{L}) = \int_0^m p(k, \tilde{L})dk$  – вероятность разрушения частицы в течение  $\tilde{L}$ -го оборота.

Вероятность неразрушения этой частицы в промежутке  $[\tilde{L}, \tilde{L} + d\tilde{L}]$

$$\begin{aligned} [1 - g(\tilde{L} + 1)dV] [1 - g(\tilde{L} + 2)dV] \dots [1 - g(\tilde{L} + d\tilde{L})dV] &\approx \\ \approx 1 - \sum_{k=\tilde{L}+1}^{\tilde{L}+d\tilde{L}} g(k)dV &\approx 1 - g(\tilde{L})d\tilde{L}dV. \end{aligned}$$

Эти выражения получены с учетом того, что в течение  $d\tilde{L}$  оборотов  $g(\tilde{L})$  меняется незначительно и  $g(\tilde{L})d\tilde{L} \ll 1$ .

Пусть вероятность неразрушения данной частицы за  $\tilde{L}$  оборотов есть  $\Delta S(\tilde{L})$ , тогда вероятность неразрушения этой частицы за  $\tilde{L} + d\tilde{L}$  оборотов

$$\Delta S(\tilde{L} + d\tilde{L}) = \Delta S(\tilde{L}) [1 - g(\tilde{L})d\tilde{L}dV],$$

откуда

$$\frac{d\Delta S(\tilde{L})}{\Delta S(\tilde{L})} = -g(\tilde{L})dVd\tilde{L}.$$

Проинтегрировав это выражение от 0 до  $\tilde{L}$ , получаем

$$\ln \frac{1}{\Delta S(\tilde{L})} = \left[ \int_0^{\tilde{L}} g(\tilde{L})d\tilde{L} \right] dV.$$

Для определения вероятности  $S$  неразрушения всего кольца надо знать произведение вероятностей неразрушения всех  $M$  его элементов

$$S = \Delta S_1 \Delta S_2 \dots \Delta S_M.$$

Тогда вероятность безотказной работы кольца в течение  $\tilde{L}$  оборотов определяем из соотношения

$$\ln \frac{1}{S} = \int_V dV \int_0^{\tilde{L}} g(\tilde{L})d\tilde{L} \equiv \int_V dV \int_0^{\tilde{L}} \int_0^m p(k, \tilde{L})dkd\tilde{L}, \quad (4.1)$$

где  $V$  – объем кольца. Таким образом, определение вероятности безотказной работы кольца в течение  $\tilde{L}$  оборотов свелось к вычислению вероятности разрушения частицы в течение одного цикла и интегрированию.

Получим сначала выражение для вероятности разрушения частицы за один цикл. Предположим, что микротрешины зарождаются под действием касательного напряжения  $\tau$ , а предел выносливости материала частицы определяется допускаемым касательным напряжением  $\tau_*$ , причем  $\tau_*$  зависит от свойств материала частицы, предыстории ее нагружения, а также является функционалом  $F(\tau(k, \tilde{L}), m, \tilde{L})$  от распределения амплитуд касательных напряжений по числу циклов на всем интервале времени работы кольца. Рассмотрим самый простой расчетный случай:  $\tau_*$  зависит только от числа  $n$  циклов нагружения данной частицы за время работы. Типичная зависимость  $\tau_*$  от  $n$  имеет вид

$$\tau_*(n) = \tau_*^0 (1 + n)^{\frac{1 - e_*}{c}}, \quad (4.2)$$

где  $\tau_*^0, e_*$  и  $c$  – постоянные, причем  $e_* > 1, c > 0$ .

Эмпирические коэффициенты  $e_*$  и  $c$ , определяемые по результатам испытаний на усталость, характеризуют снижение предела выносливости материала вследствие накопления повреждений. При  $n = 0$  напряжение  $\tau_*(0) = \tau_*^0$ , так что  $\tau_*^0$  характеризует начальный предел выносливости. Поскольку  $\tau_*$  – медленно меняющаяся функция, рассмотрим ее изменение в зависимости от числа оборотов:

$$\tau_*(\tilde{L}) = \tau_*^0 (1 + \tilde{L}m)^{\frac{1 - e_*}{c}}.$$

Полагаем, что вероятность разрушения частицы материала за цикл

$$p(k, \tilde{L})dV = \left[ \frac{\tau(k, \tilde{L})}{\tau_*(\tilde{L})} \right]^c \frac{dV}{V_*}, \quad (4.3)$$

где  $\tau(k, \tilde{L})$  – касательное напряжение, возникающее в частице в данном

цикле;  $V_*$  – характерный объем структурного элемента материала кольца (размер зерна, включения, карбида и т. д.). Таким образом,  $\tau_*(\tilde{L})$  – касательное напряжение, при котором в объеме  $V_*$  за один цикл нагружения вероятность возникновения микротрешины равна единице.

Критерием выхода кольца из строя считаем появление первой микротрешины на поверхности или шелушение поверхности. Однако не каждое разрушение частицы  $dV$  приводит к разрушению поверхности, так как далеко не каждая микротрешина, образовавшаяся в материале, доходит до поверхности. Вероятность распространения микротрешины от точки с координатой  $z$  до поверхности можно учесть введением в правую часть (4.3) эмпирического множителя вида  $(z_*/z)^h$ , где  $z_*$  – характерный размер структурного элемента вдоль оси  $Oz$ , направленной перпендикулярно к поверхности в глубь материала;  $h$  – положительная постоянная. При этом фактически получим вероятность такого разрушения частицы, которое приводит к разрушению кольца. Направим оси  $Ox$  и  $Oy$  соответственно вдоль малой и большой осей эллипса контакта шарика с желобом кольца. Зависимость максимального по  $y$  значения  $\tau_a$  от  $z$  аппроксимируется формулой

$$\tau_a = \tau_0 \frac{z}{z_0} \exp \left( 1 - \frac{z}{z_0} \right).$$

где  $\tau_0$  – максимальное для кольца касательное напряжение, достигаемое на глубине  $z_0$ .

Зависимость от  $y$  и  $z$  касательного напряжения, достигаемого при прокатывании шарика по точке  $(y, z)$ , аппроксимируется формулой

$$\tau = \tau_a \exp \left[ - \left( \frac{y}{fa} \right)^2 \right],$$

где  $a$  – большая полуось эллипса контакта;  $f$  – постоянная, определяющая скорость убывания касательного напряжения по оси  $Oy$  ( $f \approx 1$ ).

Приближенная формула для наибольшего касательного напряжения (по всем площадкам, перпендикулярным плоскости  $Oyz$ ) имеет вид

$$\tau(y, z) = \tau_0 \frac{z}{z_0} \exp \left[ 1 - \frac{z}{z_0} - \left( \frac{y}{fa} \right)^2 \right].$$

Зависимость касательного напряжения  $\tau_0$ , а следовательно,  $\tau(y, z)$  от  $x$ , числа  $N$  циклов и числа  $\tilde{L}$  оборотов устанавливаем исходя из распределения нагрузки между телами качения (шариками или роликами). Окончательно вероятность возникновения микротрешины, приводящей к разрушению поверхности кольца,

$$pdV = \left\{ \frac{\tau_0}{\tau_*} \frac{z}{z_0} \exp \left[ 1 - \frac{z}{z_0} - \left( \frac{y}{fa} \right)^2 \right] \right\} c \left( \frac{z_*}{z} \right)^h \frac{dV}{V_*}.$$

Вероятность  $S$  неразрушения дорожки качения кольца определяем из следующей формулы:

$$\ln \frac{1}{S} = \int_0^{\tilde{L}} \int_0^m \left\{ \frac{\tau_0}{\tau_*} \frac{z}{z_0} \exp \left[ 1 - \frac{z}{z_0} - \left( \frac{y}{fa} \right)^2 \right] \right\} c \times \\ \times \left( \frac{z_*}{z} \right)^h dk d\tilde{L} \frac{dV}{V_*}. \quad (4.4)$$

Эта формула распространяется на любое тело при циклическом контактном нагружении.

Исходя из общей формулы (4.4), получим прежде всего выражение для вероятности безотказной работы в случае, когда каждый шарик действует на дорожку качения кольца с одинаковой силой  $P = \text{const}$ . Тогда  $\tau_0$ ,  $z_0$  и  $a$  не зависят от  $k, L$ .

После интегрирования по  $k$  и  $\tilde{L}$  с учетом  $\tilde{L}m \gg 1$  находим

$$\ln \frac{1}{S} \approx \frac{\exp c}{e^* (\tau_0^*)^c} \frac{z_*^h \tilde{L}^{e_* m^{e_*}}}{V_*} \times \\ \times \int_V \left\{ \frac{\tau_0}{z_0} \exp \left[ - \frac{z}{z_0} - \left( \frac{y}{fa} \right)^2 \right] \right\} c z^{c-h} ds dy dz,$$

где  $ds$  – дифференциал длины дорожки качения.

Поскольку  $\tau_0$ ,  $z_0$  и  $a$  не зависят в данном случае от  $y$  и  $z$ , интегрирование по  $y \in [-a, a]$  и  $z \in [0, \infty)$  дает

$$\ln \frac{1}{S} = 2A_1 \frac{z_*^{h-1} \tilde{L}^{e_* m^{e_*}}}{\Omega_* (\tau_0^*)^c} \int_0^l \frac{\tau_0^c a}{z_*^{h-1}} ds, \quad (4.5)$$

где  $A_1$  – безразмерная постоянная, зависящая от  $c, h$  и  $f$ ;  $\Omega_*$  – характерная площадь сечения структурного элемента материала плоскостью, параллельной поверхности дорожки качения;  $l$  – длина дорожки качения.

Так как  $\tau_0$ ,  $z_0$  и  $a$  при постоянной  $P$  не зависят и от  $s$ , окончательно получаем

$$\ln \frac{1}{S} = \frac{2al}{\Omega_*} A_1 \left( \frac{\tau_0}{\tau_0^*} \right)^c \left( \frac{z_*}{z_0} \right)^{h-1} (m \tilde{L})^{e_*}. \quad (4.6)$$

Поскольку  $c > 0, h > 1$ , из этой формулы следует, что  $S$  увеличивается с ростом  $\Omega_*$  и уменьшением  $z_*$ . Поэтому лучше, если волокна или зерна материала вытянуты в направлениях  $Ox$  и  $Oy$  и имеют малый характерный размер по  $Oz$ . В формулу (4.6) вместо  $\tau_0$  следует, вообще говоря, вводить напряжения на опасных площадках, ориентация которых зависит от структуры материала.

Если напряженное состояние в объеме  $V$  однородно (не зависит от координат), интегрирование формулы (4.1) по объему и по числу циклов с учетом соотношений (4.2) и (4.3) при  $n \gg 1$  приводит к зависимости

$$\ln \frac{1}{S} = \frac{1}{e_*} \left( \frac{\tau}{\tau_0^*} \right)^c \frac{V}{V_*} n^{e_*}, \quad (4.7)$$

из которой можно найти  $\tau_0^*$ , проведя испытания образцов. Следует отметить, что в кольце, в отличие от образца, максимальное напряжение возникает не сразу во всех точках, а поочередно, при прокатывании над ними тела качения.

## 4.2. ДИНАМИЧЕСКАЯ НЕСУЩАЯ СПОСОБНОСТЬ И ДОЛГОВЕЧНОСТЬ ПРИ ПОСТОЯННОМ НАГРУЖЕНИИ ШАРИКА

Формула (4.6) позволяет определить вероятность неразрушения  $S$  кольца, находящегося под действием нагрузки, равномерно распределенной по шарикам и постоянной во времени. Число циклов нагружения  $N = m\tilde{L}$ . В качестве  $\tau_0$  могут быть выбраны различные напряжения (максимальное касательное, максимальное растягивающее, октаэдрическое). В излагаемом методе расчета  $\tau_0$  — максимальное касательное напряжение, возникающее на глубине  $z_0$ . Тогда в соответствии с (2.131), (2.129)

$$\tau_0 = T p_0, z_0 = \xi b,$$

где  $p_0$  — максимальное контактное давление, определяемое по формуле Герца;  $b$  — малая полуось контактного эллипса;

$$T = \frac{\sqrt{2t-1}}{2t(t+1)}; \quad \xi = \frac{1}{(t+1)\sqrt{2t-1}};$$

а  $t$  определяем из уравнения

$$(t^2 - 1)(2t - 1) = (b/a)^2.$$

Согласно (2.17) — (2.19),

$$a = k_a \left(\frac{PR}{E'}\right)^{1/3}, \quad b = k_b \left(\frac{PR}{E'}\right)^{1/3},$$

$$p_0 = k_p \left(\frac{PE'^2}{R^2}\right)^{1/3}, \quad (4.8)$$

где  $k_a, k_b, k_p$  — функции от  $R_y/R_x$  (см. табл. 2.1);  $2/E' = (1 - \nu_1^2)/E_1 + (1 - \nu_2^2)/E_2$ ;  $E_j$  и  $\nu_j$  ( $j = 1, 2$ ) — модули упругости и коэффициенты Пуассона контактирующих тел;  $R = R_x R_y / (R_x + R_y)$ ;  $R_x$  и  $R_y$  — приведенные радиусы кривизны в сечениях  $x = \text{const}$  и  $y = \text{const}$ , определяемые по формулам  $R_x = R_{1x} R_{2x} / (R_{1x} + R_{2x})$ ;  $R_y = R_{1y} R_{2y} / (R_{1y} + R_{2y})$ ;  $R_{jx}$  и  $R_{jy}$  ( $j = 1, 2$ ) — радиусы кривизны поверхностей в указанных сечениях.

Наряду с табл. 2.1 для вычисления  $k_a, k_b$  используют приближенные формулы (2.20), из которых следует формула для отношения полуосей

$$\frac{a}{b} = \frac{k_a}{k_b} = 1,03 \left(\frac{R_y}{R_x}\right)^{0,636}$$

С учетом приведенных зависимостей формула (4.6) принимает вид

$$\ln \frac{1}{S} = \frac{2al}{\Omega_*} A_1 \left(\frac{z}{\xi b}\right)^{h-1} \left(\frac{3TP}{2\pi ab\tau_*^0}\right)^c m^{e*} \tilde{L}^{e*} = \\ = \frac{2\pi A_1 z_*^{h-1}}{\Omega_*} \left(\frac{3}{2\pi\tau_*^0}\right)^c \frac{T^c (m\tilde{L})^{e*} d_r}{\xi^{h-1}} \left(\frac{P}{ab^2}\right)^{\frac{c+h-1}{2}} \times$$

$$\times \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{c-h-1}{2}} P^{\frac{c-h+1}{2}},$$

где  $d_r = l/\pi$  — диаметр дорожки качения.

Из формул для  $a$  и  $b$  следует, что

$$\frac{P}{ab^2} = \frac{E'}{R k_a k_b}.$$

С учетом тождества

$$D_w^{\frac{2c+h-2}{3}} \left(\frac{1}{D_w^2}\right)^{\frac{c-h+2}{3}} D_w^{2-h} = 1,$$

где  $D_w$  — диаметр тела качения (шарика или профилированного ролика), и формулы (4.8) для  $a$  получим

$$\ln \frac{1}{S} = A_* \frac{T^c}{\xi^{h-1} k_a^{c-1} k_b^{c+h-1}} \left(\frac{E'D_w}{R}\right)^{\frac{2c+h-2}{3}} \times \\ \times \left(\frac{P}{D_w^2}\right)^{qe*} d_r D_w^{2-h} (m\tilde{L})^{e*}$$

[ $A_*$  — размерная постоянная, зависящая от свойств материала,  $q \equiv (c-h+2)/(3e_*)$ ], или

$$\frac{P}{D_w^2} \tilde{L}^{-\frac{1}{q}} = \left\{ \ln \frac{1}{S} [A_* \frac{T^c d_r D_w^{2-h} m^{e*}}{\xi^{h-1} k_a^{c-1} k_b^{c+h-1}} \times \right. \\ \left. \times \left(\frac{E'D_w}{R}\right)^{\frac{2c+h-2}{2}}]^{-1} \right\}^{-\frac{1}{qe_*}}.$$

Для заданной вероятности безотказной работы динамическая несущая способность дорожки качения определяется как нагрузка  $P_c$ , которую дорожка выдерживает (с вероятностью  $S$ ) в течение  $\tilde{L}_S = 10^6$  оборотов вращающегося кольца подшипника. В рассматриваемом случае нагрузка на тело качения пропорциональна нагрузке  $F_a$  на подшипник. Поэтому при  $S = 0,9$  по  $P_c$  определяем нагрузку  $F_a$  на подшипник, выдерживающую 90 % из партии идентичных колец за расчетный срок службы, в течение которого вал (ротор) совершил 1 млн оборотов, при заданных условиях работы.

Динамическую несущую способность дорожки качения определяем по формуле

$$P_c = \left\{ \frac{1}{(10^6 m)^{e_*}} \ln\left(\frac{1}{0.9}\right) \frac{\Omega_*}{2\pi A_1 z_*^{h-1}} \times \right. \\ \left. \times \left( \frac{2\pi r_*^0}{3} \right)^c \frac{\xi^{h-1} k_a^{c-1} k_b^{c+h-1}}{T^c d_r D_w^{2-h}} \left( \frac{R}{E' D_w} \right)^{\frac{2c+h-2}{3}} \right\} \frac{1}{qe_*} D_w^2.$$

Для произвольного  $S$  верно равенство

$$\frac{P^{qe_*} L_S^{qe_*}}{\ln(1/S)} = \frac{L_{90}^{qe_*} P_c^{qe_*}}{\ln(1/0.9)} \quad (4.9)$$

или

$$L_S = \varphi_1(S) \left( \frac{P_c}{P} \right)^q, \quad (4.10)$$

где  $L_S = \tilde{L}_S / 10^6$  – долговечность дорожки в миллионах оборотов, соответствующая данному уровню  $S$ .

Базовую долговечность, соответствующую  $S = 0.9$ , обозначим  $L_{90}$  (число миллионов оборотов, после которого 10 % испытываемой партии колец выходит из строя). Коэффициент

$$\varphi_1(S) = \left[ \frac{\ln(1/S)}{\ln(1/0.9)} \right]^{1/e_*}$$

позволяет пересчитывать долговечность  $L_{90}$  на долговечность  $L_S$ , соответствующую заданному значению  $S$ .

Формулу для  $P_c$  представим в виде

$$P_c = A_0 \Phi D_w^{\frac{2c+h-5}{c-h+2}}, \quad (4.11)$$

где

$$A_0 = \left[ \frac{1}{10^6 e_*} \ln\left(\frac{1}{0.9}\right) \frac{\Omega_*}{2\pi A_1 z_*^{h-1}} \times \right. \\ \left. \times \left( \frac{2\pi r_*^0}{3} \right)^c \left( \frac{1}{E'} \right)^{\frac{2c+h-2}{3}} \right]^{\frac{1}{qe_*}} -$$

размерная постоянная, зависящая только от свойств материала;

$$\Phi = \left[ \frac{\xi^{h-1} k_a^{c-1} k_b^{c+h-1} D_w^3}{T^c d_r} \left( \frac{R}{D_w} \right)^{\frac{2c+h-2}{3}} \times \right. \\ \left. \times \left( \frac{1}{m} \right)^{qe_*} \right]^{\frac{1}{qe_*}} -$$

безразмерная функция от геометрических параметров подшипника.

Коэффициенты  $T$ ,  $\xi$ ,  $k_a$  и  $k_b$  зависят только от отношения

$$\frac{R_y}{R_x} = \frac{1/R_{1x} + 1/R_{2x}}{1/R_{1y} + 1/R_{2y}},$$

где индекс 1 обозначает шарик, а индекс 2 – кольцо (наружное или внутреннее).

Ось  $Oy$  параллельна оси вращения вала. Главные кривизны в точках начального контакта шарика с кольцами определяем по формулам

$$\frac{1}{R_{1x}} = \frac{1}{R_{1y}} = \frac{2}{D_w}; \quad \frac{1}{R_{2x}} = \pm \frac{1}{r_{H(B)}}; \quad \frac{1}{R_{2y}} = - \frac{1}{r_{H(B)}},$$

где

$$\frac{1}{R_H} = \frac{2 \cos \alpha_H}{d_H - 2r_H(1 - \cos \alpha_H)};$$

$$\frac{1}{R_B} = \frac{2 \cos \alpha_B}{d_B + 2r_B(1 - \cos \alpha_B)};$$

$d_H$  и  $d_B$  – диаметры по дну желобов соответственно наружного и внутреннего колец;  $\alpha_{H(B)}$  – начальные углы контакта шарика с наружным и внутренним кольцами;  $r_{H(B)}$  – радиус желоба наружного (внутреннего) кольца; знак минус берется для наружного кольца, плюс – для внутреннего.

Введем обозначения

$$\xi_{H(B)} = \frac{r_{H(B)}}{D_w}; \quad \gamma_{H(B)} = \frac{D_w \cos \alpha_{H(B)}}{d_m},$$

где  $\xi_{H(B)}$  – развал желоба наружного (внутреннего) кольца;  $d_m$  – диаметр окружности, проходящей через центры шариков.

Тогда

$$\left( \frac{R_y}{R_x} \right)_H = \frac{1 - \gamma_H d_m / [d_H - 2r_H(1 - \cos \alpha_H)]}{1 - 1/(2\xi_H)};$$

$$\left( \frac{R_y}{R_x} \right)_B = \frac{1 + \gamma_B d_m / [d_B + 2r_B(1 - \cos \alpha_B)]}{1 - 1/(2\xi_B)}.$$

При умеренных частотах вращения центробежная сила много меньше нагрузки на шарик, поэтому  $\alpha_H \approx \alpha_B = \alpha$  и  $\gamma_H \approx \gamma_B = \gamma$ . Так как  $d_H \approx d_m + D_w$ ,  $d_B \approx d_m - D_w$ ,  $2r_H \approx 2r_B \approx D_w$ , то верны приближенные формулы

$$\left( \frac{R_y}{R_x} \right)_{H(B)} = \frac{2\xi_{H(B)}}{(2\xi_{H(B)} - 1)(1 \pm \gamma)}, \quad (4.12)$$

где знак плюс берется для наружного кольца, минус – для внутреннего.

Диаметры дорожек качения определяем, предполагая отсутствие деформаций, по формулам

$$d_{rH(B)} = d_m \pm D_w \cos \alpha_{H(B)} = d_m (1 \pm \gamma).$$

Средняя кривизна

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_{1x}} + \frac{1}{R_{2x}} + \frac{1}{R_{1y}} + \frac{1}{R_{2y}}.$$

Для наружного кольца

$$\left(\frac{D_w}{R}\right)_H = 4 - \frac{1}{\xi_H} - \frac{2D_w \cos \alpha_H}{d_H - 2r_H(1 - \cos \alpha_H)},$$

для внутреннего

$$\left(\frac{D_w}{R}\right)_B = 4 - \frac{1}{\xi_B} + \frac{2D_w \cos \alpha_B}{d_B + 2r_B(1 - \cos \alpha_B)}.$$

С учетом приближенных равенств  $\alpha_H \approx \alpha_B$ ,  $d_H \approx d_m + D_w$ ,  $d_B = d_m - D_w$ ,  $2r_H \approx 2r_B \approx D_w$  получим

$$\left(\frac{D_w}{R}\right)_{H(B)} = 4 - \frac{1}{\xi_{H(B)}} \mp \frac{2\gamma}{1 \pm \gamma} = \frac{2}{1 \pm \gamma} \left(1 + \frac{R_x}{R_y}\right),$$

где верхние знаки соответствуют наружному кольцу.

Число  $m$  циклов нагружения за один оборот находим следующим образом. Частота вращения сепаратора  $n_m = 0,5(1 - \gamma)n_B$  при вращении внутреннего кольца с частотой  $n_B$ . Для вращающегося с частотой  $n_H$  наружного кольца  $n_m = 0,5(1 + \gamma)n_H$ . В обоих случаях за один оборот вала сепаратор поворачивается на  $0,5(1 + \gamma)$  оборотов относительно внутреннего кольца и на  $0,5(1 - \gamma)$  оборотов относительно наружного. Поскольку нагруженная зона в данном случае составляет  $360^\circ$ , то

$$m_{H(B)} = 0,5Z(1 \mp \gamma),$$

где знак минус соответствует наружному кольцу.

Для последующей аппроксимации функцию  $\Phi$  представим в виде

$$\Phi = \Omega_1 \left[ (1 \pm \gamma)^{\frac{2c+h-2}{3}} \frac{D_w}{d_m(1 \pm \gamma)} \frac{2^{e_*}}{Z^{e_*}(1 \mp \gamma)^{e_*}} \right]^{\frac{1}{qe_*}}$$

где

$$\Omega_1 = \left[ \frac{\xi^{h-1} k_a^{c-1} k_b^{c+h-1}}{T^c} \left( \frac{1/2}{1 + R_x/R_y} \right)^{\frac{2c+h-2}{3}} \right]^{\frac{1}{qe_*}} -$$

безразмерная величина, зависящая только от  $R_x/R_y$ .

Выделив числовой множитель и  $1 \pm \gamma$ , получаем

$$\Phi = 2^{\frac{1}{q}} \Omega_1 \frac{(1 \pm \gamma)^{\frac{2c+h-5}{c-h+2}}}{\frac{1}{(1 \mp \gamma)^{\frac{q}{q}}}} \left( \frac{D_w}{d_m} \right)^{\frac{1}{qe_*}} Z - \frac{1}{q},$$

где

$$\Omega_1 = \frac{\frac{h-1}{qe_*}}{\frac{c}{qe_*}} k_a^{\frac{c-1}{qe_*}} k_b^{\frac{c+h-1}{qe_*}} \left( \frac{2}{1 + R_x/R_y} \right)^{\frac{2c+h-2}{c-h+2}}.$$

Постоянные характеристики материала  $e_*$ ,  $c$  и  $h$  определяем экспериментальным путем. Значение  $e_*$  можно найти из формулы (4.6) логарифмированием:

$$\ln \ln \frac{1}{S} = e_* \ln \tilde{L} + c_1,$$

где  $c_1$  постоянно для партии одинаковых колец, работающих под одной и той же нагрузкой.

График зависимости  $\ln \ln S^{-1}$  от экспериментальных значений  $\ln \tilde{L}$  представляет собой прямую линию, тангенс угла наклона которой равен  $e_*$ . Например, фирма СКФ (Швеция) провела испытания на усталость девяти партий подшипников 1309 и шести партий подшипников 6309 по 30 шт. в партии. В первом случае  $e_*$  изменялось от 1,06 до 1,36 при среднем значении 1,12, во втором — от 0,95 до 1,23 при среднем значении 1,03. На основании этих испытаний было принято  $e_* = 10/9$ .

К настоящему времени накоплено большое количество результатов испытаний на усталость, из которых следует  $q \approx 3$ . Согласно формуле (4.10),  $\tilde{L}_S$  убывает кубически с ростом  $P$ .

Обработка в соответствии с формулой (4.11) результатов испытаний на усталость нескольких партий подшипников с заданным значением  $\Phi$  (постоянны  $Z$ ,  $\gamma$ ,  $\xi$ ,  $\alpha$ ) и различными  $D_w$  показывает, что  $(2c+h-5)/(c-h+2) \approx 1,8$ . Отсюда с учетом  $q \approx 3$  следует, что  $c \approx 31/3$ ,  $h \approx 7/3$ . Установленные значения  $e_*$ ,  $c$  и  $h$  не являются абсолютными постоянными и должны уточняться при изменении химического состава материала, технологии его получения и поверхностной обработки. Подстановка значений  $e_*$ ,  $c$  и  $h$  в формулу для  $\Phi$  дает

$$\Phi = \left( \frac{2}{Z} \right)^{1/3} \Omega_1 \frac{(1 \pm \gamma)^{1/8}}{(1 \mp \gamma)^{1/3}} \left( \frac{D_w}{d_m} \right)^{0.3},$$

где

$$\Omega_1 = \frac{\xi^{0.4}}{T^{3.1}} k_a^{2.8} k_b^{3.5} \left( \frac{2}{1 + R_x/R_y} \right)^{2.1}$$

С погрешностью не более 3 % верна аппроксимационная формула Б. Хэмрока и Д. Даусона

$$\frac{\xi^{0,4}}{T^{3,1}} = 55,361 + 23,524 \left( \frac{k_b}{k_a} \right)^{1,92}.$$

В соответствии с аппроксимационной формулой Г. Лундберга

$$\Omega_1 \approx 12,8 \left( \frac{R_y}{R_x} \right)^{0,41}.$$

Тогда с учетом формулы (4.12) выражение для  $\Phi$  приобретает вид

$$\Phi = \frac{16,1}{Z^{1/3}} \left[ \frac{2\xi_{\text{H(B)}}}{2\xi_{\text{H(B)}} - 1} \right]^{0,41} \frac{(1 \pm \gamma)^{1,39}}{(1 \mp \gamma)^{1/3}} \left( \frac{D_w}{d_m} \right)^{0,3}.$$

Подстановка  $\Phi$  в формулу (4.11) и замена  $D_w/d_m$  на  $\gamma/\cos\alpha$  (напомним, что  $\gamma = D_w \cos\alpha/d_m$ ) приводят к окончательной формуле для динамической несущей способности кольца

$$P_{\text{c.h.(B)}} = A \left[ \frac{2\xi_{\text{H(B)}}}{2\xi_{\text{H(B)}} - 1} \right]^{0,41} \frac{(1 \pm \gamma)^{1,39}}{(1 \mp \gamma)^{1/3}} \left( \frac{\gamma}{\cos\alpha} \right)^{0,3} \frac{D_w^{1,39}}{Z^{1/3}}. \quad (4.13)$$

Коэффициент  $A$  для подшипниковых сталей, в соответствии с результатами испытаний на усталость, обычно принимают равным 100, если нагрузка задана в ньютонах, а диаметр шарика – в миллиметрах. Изменением  $A$  можно приближенно учесть некоторые факторы, не принятые в расчет при выводе формул (4.10) и (4.13). Например, при учете технологических дефектов подшипников Пальмгрен рекомендует уменьшать  $A$  до 85 для однорядных и до 80 – для двухрядных шарикоподшипников.

Из формулы (4.13) следует, что  $P_c$  увеличивается с уменьшением раз渲а  $\xi$ , которое приводит к падению контактного давления. Однако при очень малых раз渲ах надо определять разрушающее напряжение  $\tau_0$  с учетом трения скольжения в контакте, используя формулы подразд. 2.4.

#### 4.3. ДОЛГОВЕЧНОСТЬ ПРИ ПЕРЕМЕННОМ НАГРУЖЕНИИ ШАРИКА

Пусть на вал действует постоянная произвольно направленная сила  $F$ . Получим выражение для вероятности безотказной работы кольца, неподвижного относительно линии действия силы. Таким кольцом, например, будет наружное, если сила  $F$  обусловлена весом маховика, а на вращающийся вал наложены внутренние кольца. В этом случае нагрузка на элемент кольца  $dV$  не зависит от  $k$  и  $\tilde{L}$  и определяется угловой координатой  $\psi$  этого элемента относительно линии действия силы  $F$ . Разрушающее напряжение, глубина, на которой оно возникает, и большая полуось контактного эллипса равны соответственно  $\tau_0 = \tau_0(P_\psi)$ ,  $z_0 = z_0(P_\psi)$ ,  $a = a(P_\psi)$ , где  $P_\psi$  – сила, действующая на дорожку качения со стороны шарика, расположенного под углом  $\psi$  к направлению  $F$ . Следовательно, в соответствии с формулой (4.5), для неподвижного кольца (индекс  $v$ )

$$\ln \frac{1}{S_v} = 2A_1 \frac{z_*^{h-1} (\tilde{L}m)^{e_*}}{\Omega_* (r_*^v)^c} \int_0^{2\pi} \frac{d_r r_*^c a}{2z_*^{h-1}} d\psi. \quad (4.14)$$

Согласно формулам (4.7) и (4.8), для точечного контакта имеем вектор  $[\tau_0, a, z_0] = P_\psi^{1/3} [A_r, A_a, A_z]$ , где  $A_r$ ,  $A_a$  и  $A_z$  – коэффициенты, не зависящие от  $P_\psi$ . Подстановка этих выражений в (4.14) дает соотношение

$$\ln \frac{1}{S} = \frac{k_v L^{e_*}}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_\psi^{qe_*} d\psi,$$

где  $P_\psi(\psi) \equiv P_\psi(\psi)$  для выбранного кольца.

Разумеется, при учете отклонений формы дорожек и тел качения  $P_\psi$  может зависеть от  $k$ ,  $\tilde{L}$  и даже от времени  $t$ , которое в рассматриваемой приближенной теории проявляется только через значения  $k$  и  $\tilde{L}$ . При  $P_{\psi v}(\psi) = P = \text{const}$

$$\ln \frac{1}{S_v} = k_v L^{e_*} P^{qe_*}. \quad (4.15)$$

Из формулы (4.9), с учетом  $\tilde{L}_{9,0} = 10^6$ ,  $L_{9,0} = 1$ , следует

$$k_v = \frac{\ln(1/0,9)}{P_{cv}^{qe_*}},$$

где  $P_{cv}$  – динамическая несущая способность дорожки кольца, неподвижного относительно линии действия силы.

Введя эквивалентную нагрузку

$$P_{ev} = \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_\psi^{qe_*} d\psi \right)^{1/(qe_*)}, \quad (4.16)$$

преобразуем соотношение (4.10) :

$$\frac{\ln(1/S_\nu)}{\ln(1/0,9)} = L^{e_*} \left(\frac{P_{e\nu}}{P_{cv}}\right)^{qe_*}, \quad (4.16a)$$

откуда для долговечности кольца следует формула

$$L_{S_\nu} = \varphi_1(S_\nu) \left(\frac{P_{cv}}{P_{e\nu}}\right)^q, \quad (4.17)$$

где

$$\varphi_1(S_\nu) = \left[ \frac{\ln(1/S_\nu)}{\ln(1/0,9)} \right]^{1/e_*}. \quad (4.18)$$

Рассмотрим теперь кольцо, вращающееся относительно линии действия постоянной силы  $F$ , приложенной к валу. В этом случае фиксированный элемент кольца испытывает в течение одного оборота циклы нагружения с различными амплитудами, но зато другой элемент кольца, отличающийся от первого только угловой координатой  $\psi$ , испытывает практически ту же последовательность циклов нагружения, только с некоторым сдвигом фаз. В течение одного оборота  $\tau_0 = \tau_0(P_k)$ ,  $z_0 = z_0(P_k)$ ,  $a = a(P_k)$ , где  $P_k$  — сила, с которой шарик, ближайший к данному элементу кольца, действует на дорожку качения в  $k$ -м цикле. Обозначим индексом  $\mu$  величины, относящиеся к кольцу, которое вращается относительно линии действия силы  $F$ . Проинтегрировав (4.4) сначала по  $V$ , а затем по  $\tilde{L}$ , получим

$$\ln \frac{1}{S_\mu} = 2\pi d_r A \frac{z_*^{h-1} \tilde{L}^{e_*} m^{e_*-1}}{\Omega_* (\tau_*^c)^c} \int_0^m \frac{\tau_0^c a}{z_0^{h-1}} dk.$$

Как и в предыдущем случае, имеем вектор  $[\tau_0, a, z_0] = P_k^{1/3} [A_r, A_a, A_z]$ . Рассматриваемый элемент кольца в  $k$ -м цикле нагружения расположен под углом  $\psi_k = 2\pi k/m$ , причем  $\psi_0 = 0$ . Поскольку при достаточно большом числе  $Z$  шариков нагрузка на элемент кольца, занимающий положение с угловой координатой  $\psi_k$ , не меняется от цикла к циклу, то

$$\ln \frac{1}{S_\mu} = k_\mu L^{e_*} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_{\psi\mu}^{qe_*} d\psi_k, \quad (4.19)$$

$$k_\mu = P_{cv}^{-qe_*} \ln \frac{1}{0,9}.$$

Здесь  $P_{\psi\mu}$  — сила, действующая со стороны шарика с угловой координатой  $\psi_k$  на дорожку рассматриваемого кольца. Введя эквивалентную нагрузку

$$P_{e\mu} = \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_{\psi\mu}^{qe_*} d\psi \right)^{1/(qe_*)}$$

аналогично предыдущему случаю, для долговечности  $L_{S_\mu}$  вращающегося

относительно линии действия силы  $F$  кольца при вероятности неразрушения  $S_\mu$  и эквивалентной нагрузке  $P_{e\mu}$  получаем

$$L_{S_\mu} = \varphi_1(S_\mu) (P_{cv}/P_{e\mu})^q, \quad (4.20)$$

где  $P_{cv}$  — динамическая несущая способность рассматриваемого кольца.

**З а м е ч а н и я :** 1. Точность полученных выражений для  $P_{e\nu}$  и  $P_{e\mu}$  зависит от точности выполнения условия  $Z \gg 1$ . Как правило, достаточно того, чтобы  $Z > 5$ .

2. Формулы для  $P_{e\nu}$  и  $P_{e\mu}$  совпадают. Причина этого заключается в выборе приближенной зависимости (4.2) допускаемого касательного напряжения  $\tau_*$  от числа циклов. В действительности  $\tau_*$  является функционалом от распределения амплитудных касательных напряжений по числу циклов на всем интервале времени работы данного кольца. В более точной теории предел выносливости должен с ростом числа циклов снижаться для циклов большой амплитуды заметнее, чем для циклов малой амплитуды.

3. Во всех рассмотренных случаях углы контакта шариков с кольцами подшипника предполагались одинаковыми для всех шариков и неизменными от цикла к циклу и от оборота к обороту. В действительности в выражениях для динамической несущей способности колец и для эквивалентных нагрузок надо использовать эффективный угол контакта  $\alpha_{\text{эфф}}$ , получаемый усреднением реализуемых в процессе работы подшипника углов контакта по шарикам, циклам и оборотам. Углы контакта могут быть различными при комбинированном нагружении и, тем более, при нагружении, меняющемся во времени. Однако погрешности в определении  $\alpha_{\text{эфф}}$  не приводят к существенным погрешностям при нахождении  $P_c$  и  $P_e$  (не более нескольких процентов).

#### 4.4. ДОЛГОВЕЧНОСТЬ ПОДШИПНИКА ПРИ НАГРУЖЕНИИ, МЕДЛЕННО МЕНЯЮЩЕМСЯ ВО ВРЕМЕНИ

Ранее был рассмотрен случай, когда действующая сила постоянна во времени. Пусть теперь сила зависит от времени, выраженного в единицах периода вращения вала, однако не меняется в течение одного оборота от цикла к циклу нагружения. Предположим, что угол контакта одинаков для всех шариков и постоянен. Тогда, проинтегрировав (4.4) по числу циклов  $k$  и по объему  $V$ , получаем в соответствии с (4.14), (4.15)

$$\ln \frac{1}{S_{\nu}(\mu)} = \frac{1}{\kappa} \int_0^{\tilde{L}} m_{\nu}(\mu) P_{ev}^{qe_*}(\tilde{L}) \left[ \frac{\tau_*}{\tau_0} - (\tilde{L}) \right]^{-c} d\tilde{L}. \quad (4.21)$$

Значение  $\kappa$  определяем из условия

$$k_{\nu}(\mu) P_{ev}^{qe_*} \frac{m_{\nu}^{e_*-1} \tilde{L}^{e_*}}{ke_*} = k_{\nu}(\mu) L^{e_*} P_{ev}^{qe_*}.$$

Получаем

$$\kappa = 10^{6e_*} m_{\nu}^{e_*-1} / e_*$$

Введя эквивалентную нагрузку

$$P_{emv}(\mu) = \left[ \frac{e_*}{\tilde{L}^{e_*} m_{\nu}^{e_*-1}} \int_0^{\tilde{L}} \frac{P_{ev}^{qe_*}(\tilde{L})}{(1 + \tilde{L} m_{\nu}(\mu))^{1-e_*}} d\tilde{L} \right]^{1/(qe_*)}, \quad (4.22)$$

находим

$$\ln \frac{1}{S_{\nu}(\mu)} = k_{\nu}(\mu) L^{e_*} P_{emv}^{qe_*}(\mu). \quad (4.23)$$

#### 4.5. ПРАКТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА ДОЛГОВЕЧНОСТИ ПОДШИПНИКОВ

Применим приведенную методику к подшипникам, работающим при умеренных частотах вращения. В силу относительной малости центробежных сил полагаем, что распределение нагрузки со стороны шариков на дорожку качения по всему периметру дорожки такое же, как при статическом нагружении. Используем данное предположение для расчета долговечности радиально-упорного подшипника при комбинированном нагружении – радиальном и осевом. Обозначим через  $\delta_a$  относительное упругое смещение колец в осевом направлении, через  $\delta_r$  – в радиальном направлении. Предположим, что перекос колец отсутствует и все шарики имеют одинаковые углы контакта  $\alpha$ . Как и выше, будем отсчитывать угол  $\psi$  от линии действия радиальной нагрузки. Решение, предложенное Шовалем, дает зависимость нагрузки на шарик от  $\psi$

$$P_{\psi} = P_0 \left[ 1 - \frac{1}{2\epsilon} (1 - \cos\psi) \right]^{3/2}, \quad (4.24)$$

где

$$\epsilon = 0,5 \left( 1 + \frac{\delta_a}{\delta_r} \operatorname{tg}\alpha \right). \quad (4.25)$$

Связь нагрузки  $P_0$  на наиболее нагруженный шарик с  $F_a$ ,  $F_r$  (осевая и радиальная нагрузки соответственно) дается выражениями

$$F_r = ZP_0 I_r(\epsilon) \cos\alpha; \quad (4.26)$$

$$F_a = ZP_0 I_a(\epsilon) \sin\alpha, \quad (4.27)$$

где

$$I_r(\epsilon) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\varphi}^{\varphi} \left[ 1 - \frac{1}{2\epsilon} (1 - \cos\psi) \right]^{3/2} \cos\psi d\psi;$$

$$I_a(\epsilon) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\varphi}^{\varphi} \left[ 1 - \frac{1}{2\epsilon} (1 - \cos\psi) \right]^{3/2} d\psi.$$

В последней формуле учтено, что проекции на ось подшипника сил, действующих на кольцо со стороны шариков, вычисляются умножением только на  $\sin\alpha$ . Здесь  $\varphi$  (половину угла нагруженной зоны) определяем из соотношений

$$\varphi = \begin{cases} \arccos [(-\delta_a/\delta_r) \operatorname{tg}\alpha] & \text{при } (\delta_a/\delta_r) \operatorname{tg}\alpha < 1, \\ \pi & \text{при } (\delta_a/\delta_r) \operatorname{tg}\alpha \geq 1. \end{cases}$$

Смещения  $\delta_a$  и  $\delta_r$  определяем из статического расчета подшипника (см. подразд. 3.2), а  $\epsilon$  можно определить по табл. 4.1. Из выражений (4.26)

Таблица 4.1

$\epsilon$	$\frac{F_r}{F_a} \operatorname{tg}\alpha$	$I_r(\epsilon)$	$I_a(\epsilon)$	$I(\epsilon)$
0,00	1,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,20	0,9318	0,1590	0,1707	0,5100
0,30	0,8964	0,1892	0,2110	0,5427
0,40	0,8601	0,2120	0,2462	0,5673
0,50	0,8225	0,2288	0,2782	0,5875
0,60	0,7835	0,2416	0,3084	0,6045
0,70	0,7427	0,2505	0,3374	0,6196
0,80	0,6995	0,2559	0,3658	0,6330
0,90	0,6529	0,2576	0,3945	0,6453
1,00	0,6000	0,2564	0,4244	0,6566
1,25	0,4338	0,2289	0,5044	0,6821
1,67	0,3088	0,1871	0,6060	0,7160
2,50	0,1850	0,1339	0,7240	0,7777
5,00	0,0831	0,0711	0,8558	0,8693
$\infty$	0,0000	0,0000	1,0000	1,0000

и (4.27) следует, что  $(F_r/F_a) \operatorname{tg}\alpha = I_r(\epsilon)/I_a(\epsilon)$  – функция от  $\epsilon$ , поэтому существует однозначная связь величины  $(F_r/F_a) \operatorname{tg}\alpha$ , которая может быть найдена из условий нагружения подшипника, с параметром  $\epsilon$ , а значит, и интегралами  $I_r(\epsilon)$  и  $I_a(\epsilon)$ .

Теперь с учетом выражений (4.26) и (4.27) значение для  $P_0$  может быть найдено по одной из приведенных формул:

$$P_0 = F_r/(ZI_r \cos\alpha); \quad (4.28)$$

$$P_0 = F_a/(ZI_a \sin\alpha); \quad (4.29)$$

$$P_0 = F_r \cos\alpha/(ZI_r) + F_a \sin\alpha/(ZI_a); \quad (4.30)$$

$$P_0 = \sqrt{(F_r/I_r)^2 + (F_a/I_a)^2}/Z. \quad (4.31)$$

Таким образом, распределение  $P_\psi$  найдено. Однако в полученное ранее выражение для долговечности подшипника входит эквивалентная нагрузка на шарик

$$P_{e\mu(\nu)} = \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\varphi}^{\varphi} P_\psi^{qe_*}(\nu) d\psi \right]^{1/(qe_*)}, \quad (4.32)$$

причем показатель степени  $qe_*$  одинаков для вращающегося и неподвижного колец. Это обусловлено тем, что в используемой теории предел выносливости структурного элемента в  $m$ -м цикле нагружения не зависит от нагрузок, действовавших на данный элемент в течение предыдущего ( $m-1$ )-го цикла, а зависит только от  $m$ .

Вследствие умеренности частоты вращения выражения для распределения нагрузки по вращающемуся и неподвижному, по внутреннему и наружному кольцам совпадают, т. е.

$$P_{\psi\mu(\nu)} = P_\psi = P_0 [1 - \frac{1}{2\epsilon} (1 - \cos\psi)]^{3/2}.$$

Подставляя это выражение в формулу (4.32), получим

$$P_{e\mu(\nu)} = P_0 I_{\mu(\nu)}(\epsilon), \quad (4.33)$$

где в данном случае

$$I_{\mu(\nu)}(\epsilon) \equiv I(\epsilon) = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\varphi}^{\varphi} [1 - \frac{1}{2\epsilon} (1 - \cos\psi)]^{3qe_*/2} d\psi \right\}^{1/(qe_*)}$$

(см. табл. 4.1).

Для вероятности безотказной работы вращающегося (неподвижного) кольца в соответствии с приведенной теорией имеем

$$\ln \frac{1}{S_{\mu(\nu)}} = \ln \left( \frac{1}{0,9} \right) L_{\mu(\nu)}^{qe_*} \left( \frac{P_{e\mu(\nu)}}{P_{c\mu(\nu)}} \right)^{qe_*}. \quad (4.34)$$

Введем нагрузку  $P_{0c\mu(\nu)}$  на наиболее нагруженный шарик, при которой для данных значений  $\epsilon$  и угла контакта  $\alpha$  в течение 1 млн оборотов 10 % одинаковых вращающихся (неподвижных) подшипниковых кольца выходит из строя. Естественно называть  $P_{0c\mu(\nu)}$  динамической несущей способностью кольца по наиболее нагруженному шарику. Согласно определению динамической несущей способности вращающегося (неподвижного) кольца, заключаем, что  $P_{0c\mu(\nu)}$  – такая нагрузка на наиболее нагруженный шарик, при которой для данных значений  $\epsilon$  и  $d$  соответствующая эквивалентная нагрузка на шарик равна динамической несущей способности кольца. С учетом  $P_{0c\mu(\nu)}$  и формулы (4.33) получим

$$P_{c\mu(\nu)} = P_{0c\mu(\nu)} I_{\mu(\nu)}(\epsilon). \quad (4.35)$$

Подставив выражения (4.33) и (4.35) в формулу (4.34), получим

$$\ln \frac{1}{S_{\mu(\nu)}} = \ln \left( \frac{1}{0,9} \right) L_{\mu(\nu)}^{qe_*} \left( \frac{P_0}{P_{0c\mu(\nu)}} \right)^{qe_*}.$$

Поскольку  $L_{\mu(\nu)} = L$ ,

$$\ln \frac{1}{S_{\mu(\nu)}} = \ln \left( \frac{1}{0,9} \right) L^{qe_*} \left( \frac{P_0}{P_{0c\mu(\nu)}} \right)^{qe_*}.$$

Применив правило перемножения вероятностей, для всего подшипника получим

$$\ln \frac{1}{S} = \ln \frac{1}{S_\mu} + \ln \frac{1}{S_\nu} = \ln \left( \frac{1}{0,9} \right) L^{qe_*} \left[ \left( \frac{P_0}{P_{0c\mu}} \right)^{qe_*} + \left( \frac{P_0}{P_{0cv}} \right)^{qe_*} \right].$$

Введем обозначение

$$P_{0c} = \left( P_{0c\mu}^{-qe_*} + P_{0cv}^{-qe_*} \right)^{-1/(qe_*)}. \quad (4.36)$$

При нагрузке на наиболее нагруженный шарик, равной  $P_{0c}$ , и параметрах  $\epsilon$  и  $d$  10 % одинаковых подшипников данной партии выходит из строя в течение 1 млн оборотов. Для однорядного подшипника получим

$$\ln \frac{1}{S} = \ln \frac{1}{0,9} L^{e_*} \left( \frac{P_0}{P_{0c}} \right)^{qe_*}. \quad (4.37)$$

Полученную формулу используем для нахождения долговечности подшипника, соответствующего заданному значению  $S$  всего подшипника. Нагрузку  $P_0$  находим по формулам (4.28) – (4.31); нагрузку  $P_{0c}$  можно определить с помощью полученных ранее  $P_{c,n}$  и  $P_{c,v}$  [см. формулу (4.13)], заменяя индексы "n" или "v" на  $\mu$  или  $\nu$  в зависимости от того, является ли рассматриваемое (наружное или внутреннее) кольцо вращающимся или неподвижным относительно  $F$ .

Преобразуем равенство (4.36):

$$P_{0c} = P_{0c\mu} \left[ 1 + \left( \frac{P_{0c\mu}}{P_{0cv}} \right)^{qe_*} \right]^{-1/(qe_*)},$$

или

$$P_{0c} = \frac{P_{c\mu}}{I_\mu(\epsilon)} \left[ 1 + \left( \frac{P_{c\mu} I_\nu(\epsilon)}{P_{cv} I_\mu(\epsilon)} \right)^{qe_*} \right]^{-1/(qe_*)}.$$

С учетом  $I_\mu(\epsilon) = I_\nu(\epsilon) = I(\epsilon)$

$$P_{0c} = \frac{P_{c\mu}}{I(\epsilon)} \left[ 1 + \left( \frac{P_{c\mu}}{P_{cv}} \right)^{qe_*} \right]^{-1/(qe_*)}.$$

Подставив в это равенство выражения для  $P_{c\mu}$  и  $P_{cv}$ , при  $qe_* = 10/3$  получаем

$$P_{0c} = \frac{A}{I(\epsilon)} \left\langle 1 + \left\{ \left( \frac{1 \mp \gamma}{1 \pm \gamma} \right)^{1,72} \left[ \frac{\xi_\mu(2\xi_\nu - 1)}{\xi_\nu(2\xi_\mu - 1)} \right]^{0,41} \right\}^{1/0/3} \right\rangle^{-0,3} \times \\ \times \frac{(1 \mp \gamma)^{1,39}}{(1 \pm \gamma)^{1/3}} \left( \frac{2\xi_\mu}{2\xi_\mu - 1} \right)^{0,41} \left( \frac{\gamma}{\cos\alpha} \right)^{0,3} D_w^{1,8} Z^{-1/3}. \quad (4.38)$$

В этой формуле неизвестно значение интеграла  $I(\epsilon)$ , которое можно найти из табл. 4.1. Перепишем выражение (4.38) в следующем виде:

$$P_{0c} = \frac{A}{I(\epsilon)} f_c \left( \frac{\gamma}{\cos\alpha} \right)^{0,3} D_w^{1,8} Z^{-1/3}, \quad (4.39)$$

где

$$f_c = \left\langle 1 + \left\{ \left( \frac{1 \mp \gamma}{1 \pm \gamma} \right)^{1,72} \left[ \frac{\xi_\mu(2\xi_\nu - 1)}{\xi_\nu(2\xi_\mu - 1)} \right]^{0,41} \right\}^{1/0/3} \right\rangle^{-0,3} \times$$

$$\times \frac{(1 \mp \gamma)^{1,39}}{(1 \pm \gamma)^{1/3}} \left( \frac{2\xi_\mu}{2\xi_\mu - 1} \right)^{0,41}. \quad (4.40)$$

Верхний знак соответствует случаю, когда наружное кольцо неподвижно относительно линии действия силы, а нижний знак, соответственно, случаю, когда внутреннее кольцо неподвижно относительно линии действия силы. Введя новое обозначение

$$\xi_{\mu/\nu} = \frac{\xi_\mu(2\xi_\nu - 1)}{\xi_\nu(2\xi_\mu - 1)}, \quad (4.41)$$

для покоящегося относительно линии действия нагрузки наружного кольца подшипника получим

$$f_c = f_{c,n\nu}(\gamma, \xi_{\mu/\nu}) f_{c\xi}(\xi_\mu), \quad (4.42)$$

где

$$f_{c,n\nu}(\gamma, \xi_{\mu/\nu}) = \left\{ 1 + \left[ \left( \frac{1 - \gamma}{1 + \gamma} \right)^{1,72} \xi_{\mu/\nu}^{0,41} \right]^{1/0/3} \right\}^{-0,3} \frac{(1 - \gamma)^{1,39}}{(1 + \gamma)^{1/3}}, \quad (4.43)$$

$$f_{c\xi}(\xi_\mu) = \left( \frac{2\xi_\mu}{2\xi_\mu - 1} \right)^{0,41}. \quad (4.44)$$

Если наружное кольцо подшипника вращается относительно линии действия нагрузки, а внутреннее кольцо подшипника неподвижно, то

$$f_c = f_{c,n\mu}(\gamma, \xi_{\mu/\nu}) f_{c\xi}(\xi_\mu), \quad (4.45)$$

где

$$f_{c,n\mu}(\gamma, \xi_{\mu/\nu}) = \left\{ 1 + \left[ \left( \frac{1 + \gamma}{1 - \gamma} \right)^{1,72} \xi_{\mu/\nu}^{0,41} \right]^{1/0/3} \right\}^{-0,3} \frac{(1 + \gamma)^{1,39}}{(1 - \gamma)^{1/3}},$$

а значение коэффициента  $f_{c\xi}(\xi_\mu)$  находим по формуле (4.44). Значения коэффициентов  $f_{c,n\nu}(\gamma, \xi_{\mu/\nu})$ ,  $f_{c,n\mu}(\gamma, \xi_{\mu/\nu})$  и  $f_{c\xi}(\xi_\mu)$  можно найти из табл. 4.2 – 4.5. На практике часто  $\xi_\mu = \xi_\nu = \xi$ . Табл. 4.5 дает значения коэффициента  $f_{c,n\mu}(\gamma, 1)$  при более мелких шагах по  $\gamma$ . Значение  $f_{c,n\nu}(\gamma, 1)$  меньше, чем  $f_{c,n\mu}(\gamma, 1)$ , но их разность при  $\gamma = 0 \dots 0,4$  не превышает 0,5 %.

Таким образом, долговечность однорядного подшипника можно определить по формуле. [см. (4.37)]

$$L = \left( \frac{\ln(1/S)}{\ln(1/0,9)} \right)^{1/e_*} \left( \frac{P_{0c}}{P_0} \right)^q. \quad (4.46)$$

Осталось подставить в эту формулу полученные значения  $P_{0c}$  и  $P_0$ .

Практический интерес представляет также расчет долговечности подшипников, имеющих  $n$  рядов тел качения. Для каждого фиксированного ряда тел качения (обозначим его индексом  $k$ ) верна формула

$$\ln \frac{1}{S_k} = \ln \left( \frac{1}{0,9} \right) L^{e_*} \left( \frac{P_{0k}}{P_{0ck}} \right)^{qe_*}, \quad (4.47)$$

где  $S_k$  – вероятность неразрушения  $k$ -го ряда;  $P_{0k}$  – нагрузка на наиболее

Таблица 4.2

$\xi_{\mu/\nu}$	Значение $f_{c,h\nu}$ при $\gamma$									
	0,00	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	
0,20	0,969	0,899	0,828	0,757	0,688	0,621	0,558	0,497	0,439	
0,25	0,959	0,894	0,825	0,755	0,687	0,621	0,557	0,496	0,439	
0,35	0,938	0,882	0,819	0,752	0,685	0,620	0,557	0,496	0,439	
0,50	0,906	0,863	0,808	0,746	0,682	0,618	0,556	0,496	0,439	
0,65	0,876	0,844	0,797	0,740	0,679	0,617	0,555	0,496	0,439	
0,80	0,847	0,826	0,786	0,734	0,676	0,615	0,555	0,496	0,439	
1,00	0,812	0,801	0,770	0,724	0,671	0,612	0,553	0,495	0,438	
1,25	0,773	0,773	0,752	0,714	0,665	0,609	0,552	0,494	0,438	
1,50	0,739	0,746	0,733	0,702	0,658	0,606	0,550	0,493	0,438	
2,00	0,682	0,700	0,699	0,680	0,645	0,599	0,546	0,491	0,437	
3,00	0,599	0,627	0,641	0,639	0,618	0,583	0,538	0,487	0,435	
4,00	0,542	0,573	0,595	0,603	0,593	0,567	0,529	0,483	0,433	
5,00	0,500	0,532	0,557	0,571	0,570	0,553	0,521	0,478	0,431	

Таблица 4.3

$\xi_{\mu/\nu}$	Значение $f_{c,h\nu}$ при $\gamma$									
	0,00	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	
0,20	0,969	1,031	1,081	1,109	1,107	1,073	1,011	0,930	0,837	
0,25	0,959	1,014	1,053	1,068	1,050	1,006	0,938	0,856	0,768	
0,35	0,938	0,980	1,000	0,993	0,959	0,903	0,832	0,754	0,672	
0,50	0,906	0,931	0,931	0,905	0,859	0,798	0,728	0,655	0,583	
0,65	0,876	0,886	0,873	0,838	0,786	0,724	0,658	0,591	0,524	
0,80	0,847	0,847	0,825	0,783	0,730	0,670	0,606	0,543	0,482	
1,00	0,812	0,801	0,771	0,726	0,672	0,614	0,555	0,496	0,440	
1,25	0,773	0,754	0,718	0,671	0,618	0,562	0,507	0,454	0,402	
1,50	0,739	0,713	0,674	0,627	0,576	0,523	0,471	0,421	0,373	
2,00	0,682	0,650	0,608	0,562	0,514	0,466	0,419	0,374	0,331	
3,00	0,599	0,563	0,522	0,480	0,437	0,396	0,356	0,317	0,281	
4,00	0,542	0,506	0,462	0,427	0,389	0,352	0,316	0,282	0,249	
5,00	0,500	0,465	0,428	0,391	0,356	0,321	0,289	0,257	0,228	

Таблица 4.4

$\xi_\mu$	$f_{c\xi}$	$\xi_\mu$	$f_{c\xi}$	$\xi_\mu$	$f_{c\xi}$
0,500	$\infty$	0,508	5,480	0,540	2,910
0,501	12,790	0,510	5,010	0,550	2,670
0,502	9,640	0,512	4,660	0,570	2,360
0,503	8,170	0,516	4,150	0,600	2,085
0,504	7,260	0,520	3,800	0,650	1,820
0,505	6,630	0,525	3,480	0,700	1,670
0,506	6,160	0,530	3,250	0,750	1,600
				0,800	1,495

Таблица 4.5

$\gamma$	$f_{c,h\mu}$	$\gamma$	$f_{c,h\mu}$	$\gamma$	$f_{c,h\mu}$
0,00	0,812	0,09	0,778	0,26	0,602
0,01	0,812	0,10	0,771	0,28	0,578
0,02	0,811	0,12	0,754	0,30	0,554
0,03	0,808	0,14	0,736	0,32	0,531
0,04	0,805	0,16	0,716	0,34	0,508
0,05	0,801	0,18	0,694	0,36	0,485
0,06	0,797	0,20	0,672	0,38	0,462
0,07	0,791	0,22	0,649	0,40	0,440
0,08	0,785	0,24	0,6260		

нагруженный шарик в  $k$ -м ряду тел качения при данных условиях нагружения;  $P_{0ck}$  — нагрузка на наиболее нагруженный шарик в  $k$ -м ряду тел качения при тех же параметрах  $\epsilon$  и  $\alpha$ , что и для  $P_{0k}$ , при которой 10 % одинаковых однорядных подшипников выходят из строя после 1 млн оборотов.

$P_{0k}$  может быть найдено по формулам, аналогичным (4.30), (4.31):

$$P_{0k} = \frac{F_{rk} \cos \alpha_k}{Z_k I_r(\epsilon_k)} + \frac{F_{ak} \sin \alpha_k}{Z_k I_a(\epsilon)} = \sqrt{\left( \frac{F_{rk}}{Z_k I_r(\epsilon_k)} \right)^2 + \left( \frac{F_{ak}}{Z_k I_a(\epsilon_k)} \right)^2}, \quad (4.48)$$

где  $F_{rk}$  и  $F_{ak}$  — радиальная и осевая нагрузки соответственно, которые приходятся на  $k$ -й ряд тел качения;  $F_{rk}$  и  $F_{ak}$  удовлетворяют равенствам

$$\sum_{k=1}^n F_{rk} = F_r; \quad \sum_{k=1}^n F_{ak} = F_a.$$

Применяя правило перемножения вероятностей, для вероятности безотказной работы подшипника, состоящего из  $n$  рядов тел качения, получим

$$\ln \frac{1}{S} = \ln \left( \frac{1}{0,9} \right) L^{e_*} \sum_{k=1}^n \left( \frac{P_{0k}}{P_{0ck}} \right)^{q e_*}. \quad (4.49)$$

Если число тел качения во всех рядах одинаково и нагрузка между ними распределена также одинаково, задача упрощается, так как

$$Z_k = Z; \quad F_{rk} = F_r/n; \quad F_{ak} = F_a/n;$$

$$\alpha_k = \alpha; \quad \epsilon_k = \epsilon; \quad P_{0ck} = P_{0c}.$$

В итоге получаем для  $P_{0k}$

$$\begin{aligned} P_{0k} &= P_0 = \frac{1}{nZ} \left( \frac{F_r \cos \alpha}{I_r(\epsilon)} + \frac{F_a \sin \alpha}{I_a(\epsilon)} \right) = \\ &= \frac{1}{nZ} \sqrt{\left( \frac{F_r}{I_r(\epsilon)} \right)^2 + \left( \frac{F_a}{I_a(\epsilon)} \right)^2}. \end{aligned}$$

Формула (4.49) упрощается:

$$\ln \frac{1}{S} = \ln \left( \frac{1}{0,9} \right) L^{e_*} n \left( \frac{P_0}{P_{0c}} \right)^{qe_*}. \quad (4.50)$$

Отсюда получаем формулу для определения долговечности  $n$ -рядного подшипника

$$L = \left[ \frac{\ln(1/S)}{\ln(1/0,9)} \right]^{1/e_*} n^{-1/e_*} \left( \frac{P_{0c}}{P_0} \right)^q.$$

При  $n = 1$  отсюда следует формула для однорядного подшипника, полученная ранее.

**Пример 4.1.** Дан радиально-упорный подшипник, у которого  $D_w = 7,144$  мм;  $d_m = 102,4$  мм;  $r_{hv} = 3,67$  мм;  $r_{v\mu} = 3,67$  мм;  $\alpha = 21^\circ$ ;  $Z = 24$ . Осевая нагрузка  $F_a = 3000$  Н, радиальная  $F_r = 5000$  Н.

**Решение.** Найдем параметр  $\epsilon$ . Для этого вычислим значение  $(F_r/F_a) \operatorname{tg} \alpha = 0,64$ . Из табл. 4.1 найдем  $\epsilon = 0,9$ ;  $I_r(0,9) = 0,258$ ;  $I_a(\epsilon) = 0,394$ ;  $I = 0,645$ .

Найдем следующие параметры:

$$\gamma = \frac{D_w}{d_m} \cos \alpha = 0,0651; \quad \xi = \frac{r_\mu}{D_w} = 0,51.$$

Чтобы найти  $\xi_{\mu/\nu}$ , определим сначала  $\xi_\nu = r_\nu/D_w = 0,51$ . Подставив значения для  $\xi_\mu$  и  $\xi_\nu$  в формулу для  $\xi_{\mu/\nu}$ , находим  $\xi_{\mu/\nu} = 1$ .

Для определения  $P_{0c}$  сначала из табл. 4.2 и 4.4 получаем  $f_{c,hv}(\gamma, \xi_{\mu/\nu}) = 0,793$ ,  $f_{c\xi}(\xi) = 4,26$ .

Подставив полученные значения в формулу (4.39), получим  $P_{0c} = 2390$  Н. По формулам (4.28) – (4.31) найдем

$$P_0 = 866 \text{ Н}, \quad P_{0k} = 884 \text{ Н}.$$

Расхождение получили из-за неточно вычисленных значений интегралов  $I_r(\epsilon)$  и  $I_a(\epsilon)$ . Поэтому определим среднее значение нагрузки  $P_0 = 875$  Н.

Определим долговечность подшипника. Практический интерес представляет базовая долговечность, соответствующая уровню  $S = 0,9$  и обозначаемая  $L_{90}$ :

$$L_{90} = (P_{0c}/P_0)^3 = 20,4 \text{ млн об.}$$

**Пример 4.2.** Дан подшипник:  $D_w = 1,5$  мм;  $d_m = 5,14$  мм;  $Z = 6$ ;  $\alpha = 18^\circ$ ;  $r_{hv} = 0,86$  мм;  $r_{v\mu} = 0,92$  мм. Осевая нагрузка  $F_a = 10$  Н.

**Решение.** Найдем значения параметров  $\gamma$ ,  $\xi_\mu$ ,  $\xi_\nu$ :

$$\gamma = \frac{D_w}{d_m} \cos \alpha = 0,277; \quad \xi_\mu = \frac{r_\mu}{D_w} = 0,613;$$

$$\xi_\nu = \frac{r_\nu}{D_w} = 0,573.$$

Используя значения  $\xi_\mu$  и  $\xi_\nu$ , определим

$$\xi_{\mu/\nu} = 0,692.$$

Найдем  $P_{0c}$ . Из табл. 4.2 и 4.4  $f_{c,hv} = 0,583$ ,  $f_{c\xi} = 2,0$ . Поскольку  $(F_r/F_a) \operatorname{tg} \alpha = 0$ , то из табл. 4.1  $I_a(\epsilon) = 1$ ,  $I_r(\epsilon) = 0$ ,  $I(\epsilon) = 1$ . По формуле (4.39) получим нагрузку  $P_{0c} = 78$  Н.

Найдем  $P_0$ , для чего используем формулу

$$P_0 = F_a / (Z I_a \sin \alpha),$$

так как при использовании других формул для  $P_0$  возникнут неопределенности типа 0/0. Получаем  $P_0 = 539$  Н.

В итоге получаем базовую долговечность  $L_{90} = 3050$  млн об.

**Пример 4.3.** Дан радиально-упорный подшипник:  $D_w = 12,303$  мм;  $d_m = 52$  мм;  $Z = 8$ ;  $r_{hv} = r_{v\mu} = 6,34$  мм. Радиальная нагрузка  $F_r = 3$  кН.

**Решение.** Примем радиальный зазор равным нулю. При ненулевом радиальном зазоре или натяге распределение нагрузки по шарикам вдоль дорожки качения будет другим, следовательно,  $P$  и  $L$  изменятся.

Найдем  $\epsilon$ . В данном случае искать  $\epsilon$  по  $(F_r/F_a) \operatorname{tg} \alpha$  нельзя, поскольку  $F_a = 0$ , в силу этого  $\alpha = 0$ , и получается неопределенность вида 0/0. Для вычисления  $\epsilon$  воспользуемся формулой (4.25). Поскольку  $\delta_r \neq 0$ ,  $\operatorname{tg} \alpha = 0$ , а  $\delta_a$  конечно, получаем  $\epsilon = 0,5$ . Затем по табл. 4.1  $I_r(0,5) = 0,2288$ ;  $I(0,5) = 0,5875$ .

Теперь вычислим

$$\gamma = D_w/d_m = 12,303/52 = 0,236.$$

Найдем  $\xi_\mu$  и  $\xi_{\mu/\nu}$ :

$$\xi_\mu = r_\mu/D_w = 6,34/12,303 = 0,515.$$

Поскольку  $\xi_\mu = r_\mu/D_w = r_\nu/D_w = \xi_\nu$ , получаем  $\xi_{\mu/\nu} = 1$ .

Вычислим значение  $P_{0c}$ , для чего найдем сначала коэффициенты

$$f_{c,hv}(0,236; 1) = 0,63; \quad f_{c\xi}(0,515) = 4,262.$$

Теперь, используя формулу (4.39), получаем

$$P_{0c} = \frac{8,5}{0,5875} \cdot 0,63 \cdot 4,262 \cdot 0,236^{0,3} \cdot 12,303^{1,8} \cdot 8^{1/3} = 11,5 \text{ кН.}$$

Определим значение  $P_0$  по формуле (4.28), поскольку при использовании других формул для  $P_0$  возникают неопределенности типа 0/0. Получаем

$$P_0 = \frac{3000}{8 \cdot 0,2288} = 1640 \text{ Н.}$$

Для  $L_{90}$  по формуле (4.46) получим

$$L_{90} = \left( \frac{11,540}{1640} \right)^3 = 348 \text{ млн об.}$$

#### 4.6. ДОЛГОВЕЧНОСТЬ ПОДШИПНИКА ПРИ ПЕРИОДИЧЕСКОМ СТУПЕНЧАТОМ НАГРУЖЕНИИ

Пусть на подшипник действует периодическая ступенчатая нагрузка. Если длительность нагружения на каждой ступени (в оборотах) много больше единицы, что и предположим в дальнейшем, то получаем частный случай нагружения, медленно меняющегося во времени. Предполагая, как и ранее, что угол контакта одинаков для всех шариков и постоянен, согласно формуле (4.23) для вероятности безотказной работы кольца, соответствующей заданному числу оборотов, имеем

$$\ln \frac{1}{S_{\nu}(\mu)} = \ln \left( \frac{1}{0,9} \right) L_{\nu}^{e^*} (\mu) (P_{em \nu}(\mu) / P_{cv}(\mu))^{qe^*}, \quad (4.51)$$

где эффективная эквивалентная нагрузка  $P_{em \nu}(\mu)$  определяется по формуле (4.22). Для простоты рассмотрим случай, когда нагружение состоит всего из двух ступеней. Пусть  $P_{ev}(\mu)_1$  и  $\tilde{L}_1$  – эквивалентная нагрузка и длительность нагружения, соответствующие первой ступени периода, а  $P_{ev}(\mu)_2$  и  $\tilde{L}_2$  – аналогичные величины второй ступени. Поскольку дальнейшие выкладки совершенно одинаковы как для кольца, вращающегося относительно линии действия силы, так и для неподвижного, то индексы  $v$  и  $\mu$  временно опустим.

Итак, имеем двухступенчатое периодическое нагружение, как показано на рис. 4.1. Рассмотрим  $n$  периодов нагружения, что соответствует  $\tilde{L} = n(\tilde{L}_1 + \tilde{L}_2)$  оборотам. Проведя в формуле (4.22) интегрирование с учетом указанного выше типа нагружения, для эффективной эквивалентной нагрузки получим

$$P_{em} = \left\langle n^{-e^*} \left\{ P_{e_1}^{qe^*} \sum_{k=1}^n [(k-1+l_1)^{e^*} - (k-1)^{e^*}] + P_{e_2}^{qe^*} \sum_{k=1}^n [k^{e^*} - (k-1+l_1)^{e^*}] \right\} \right\rangle^{1/(qe^*)}, \quad (4.52)$$

где  $l_1 = \tilde{L}_1 / (\tilde{L}_1 + \tilde{L}_2)$  – относительная длительность нагружения на первой ступени ( $l_2 = 1 - l_1$  – относительная длительность нагружения на второй ступени). Если  $l_1 \ll 1$ , т. е.  $\tilde{L}_1 \ll \tilde{L}_2$ , то формула (4.52) принимает более простой вид:

$$P_{em} = P_{e_2} \left\{ 1 + \left[ \left( \frac{P_{e_1}}{P_{e_2}} \right)^{qe^*} - 1 \right] \frac{e^* l_1}{n^{e^*}} \sum_{k=1}^{n-1} k^{e^*-1} \right\}^{1/(qe^*)}.$$

Аналогично при  $l_2 \ll 1$ , т. е.  $\tilde{L}_1 \gg \tilde{L}_2$ ,

$$P_{em} = P_{e_1} \left\{ 1 + \left[ \left( \frac{P_{e_2}}{P_{e_1}} \right)^{qe^*} - 1 \right] \frac{e^* l_2}{n^{e^*}} \sum_{k=1}^n k^{e^*-1} \right\}^{1/(qe^*)}.$$

Обычно число периодов нагружения  $n = \tilde{L} / (\tilde{L}_1 + \tilde{L}_2) \gg 1$ . В этом слу-

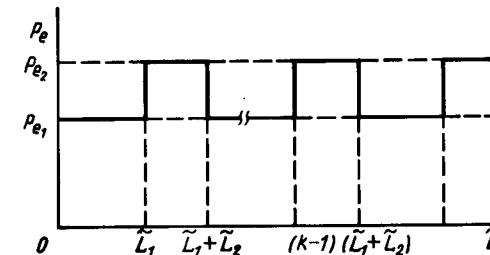


Рис. 4.1

чае, который в дальнейшем и будем рассматривать, в формуле (4.52) суммирование можно заменить интегрированием и после интегрирования, пренебрегая членами более высокого порядка малости по обратным степеням  $n$ , приближенно получить

$$P_{em} = [l_1 P_{e_1}^{qe^*} + l_2 P_{e_2}^{qe^*}]^{1/(qe^*)}. \quad (4.53)$$

Таким образом, эффективная эквивалентная нагрузка изменяется в соответствии с зависимостями, представленными на рис. 4.2, а, б. При этом для  $P_{e_2} > P_{e_1}$  (см. рис. 4.2, а)  $\tga_2 / \tga_1 = (P_{e_1} / P_{e_2})^{qe^*} - 1 < 1$ ; для  $P_{e_1} > P_{e_2}$   $\tga_2 / \tga_1 = (P_{e_1} / P_{e_2})^{qe^*} - 1 > 1$  (см. рис. 4.2, б).

При периодическом ступенчатом нагружении, состоящем из  $f$  ступеней,

$$P_{em} = [l_1 P_{e_1}^{qe^*} + l_2 P_{e_2}^{qe^*} + \dots + l_f P_{e_f}^{qe^*}]^{1/(qe^*)},$$

где  $P_{e_i}$  – эквивалентная нагрузка на  $i$ -й ступени нагружения,  $i = 1, \dots, f$ ;  $l_i$  – относительная продолжительность нагружения на  $i$ -й ступени. Заметим, что эта формула, как и (4.53), справедлива при  $n \gg 1$ .

Найдем теперь соответствующую заданной вероятности  $S$  неразрушения долговечность подшипника, работающего в условиях периодического ступенчатого нагружения ( $n \gg 1$ ).

Поскольку в подшипнике  $L_{\mu} = L_{\nu} = L$ , то, применив правило перемножения вероятностей, из формулы (4.51) для всего подшипника получим

$$\ln \frac{1}{S} = \ln \left( \frac{1}{0,9} \right) L_S^{e^*} \left[ \left( \frac{P_{em \mu}}{P_{cv}} \right)^{qe^*} + \left( \frac{P_{em \nu}}{P_{cv}} \right)^{qe^*} \right],$$

или, с учетом формулы (4.53),

$$\ln \frac{1}{S} = \ln \left( \frac{1}{0,9} \right) L_S^{e^*} \left\{ l_1 \left[ \left( \frac{P_{e \mu_1}}{P_{cv}} \right)^{qe^*} + \left( \frac{P_{e \nu_1}}{P_{cv}} \right)^{qe^*} \right] + l_2 \left[ \left( \frac{P_{e \mu_2}}{P_{cv}} \right)^{qe^*} + \left( \frac{P_{e \nu_2}}{P_{cv}} \right)^{qe^*} \right] \right\},$$

где  $L_S$  – долговечность рассматриваемого подшипника, соответствующая заданному значению  $S$ .

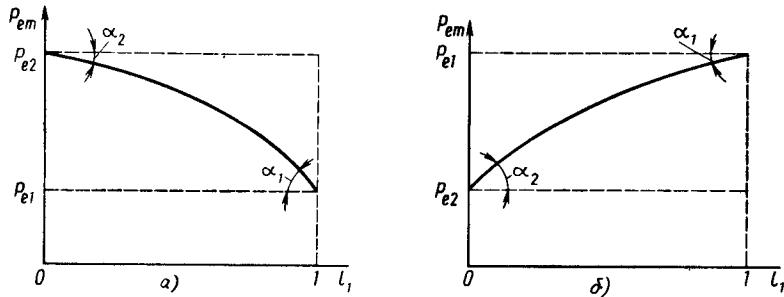


Рис. 4.2

Но по формулам (4.16а) и (4.18) с учетом правила перемножения вероятностей имеем

$$\ln \frac{1}{S} = \ln \left( \frac{1}{0,9} \right) L_{iS}^{e_*} \left[ \left( \frac{P_{e\mu i}}{P_{c\mu}} \right)^{qe_*} + \left( \frac{P_{evi}}{P_{cv}} \right)^{qe_*} \right], i = 1, 2,$$

где  $L_{iS}$  — долговечность подшипника при том же уровне  $S$ , но работающего в условиях постоянного нагружения нагрузкой, соответствующей  $i$ -й ступени,  $i = 1, 2$ . Следовательно, получаем

$$L_S = [l_1 L_{1S}^{-e_*} + l_2 L_{2S}^{-e_*}]^{-1/e_*}. \quad (4.54)$$

Обобщим последнее выражение для случая периодического ступенчатого нагружения из  $f$  ступеней:

$$L_S = [l_1 L_{1S}^{-e_*} + l_2 L_{2S}^{-e_*} + \dots + l_f L_{fS}^{-e_*}]^{-1/e_*}.$$

**Пример 4.4** Дан радиально-упорный подшипник:  $D_W = 7,144$  мм;  $d_m = 102,4$  мм;  $r_{hv} = r_{v\mu} = 3,67$  мм;  $\alpha = 21^\circ$ ;  $Z = 24$ . На него действует ступенчатая периодическая нагрузка:  $F_{a_1} = 1500$  Н;  $F_{r_1} = 2500$  Н;  $L_1 = 40\,000$ ;  $F_{a_2} = 3000$  Н;  $F_{r_2} = 5000$  Н;  $L_2 = 10\,000$ . Найти базовую долговечность  $L_{90}$ , соответствующую уровню  $S = 0,9$ .

**Решение.** Воспользовавшись результатами примера 4.1, определяем долговечность подшипника при постоянном нагружении нагрузкой, приходящейся на вторую ступень,  $L_{(2)90} = 20,4$  млн об. Прежде чем вычислять  $L_{(1)90}$ , заметим, что в данном примере  $F_{r_2}/F_{a_2} = F_{r_1}/F_{a_1}$ , т. е. нагрузки динамически подобны, а так как  $\alpha$  остается постоянным, то

$$P_{0c2} = P_{0c1}; P_{01}/P_{02} = F_{r_2}/F_{r_1} = F_{a_1}/F_{a_2} = 0,5.$$

Выражение для базовой долговечности  $L_{(i)90}$  имеет вид

$$L_{(i)90} = (P_{0ci}/P_{0i})^3, \quad i = 1, 2.$$

Следовательно,

$$\frac{L_{(1)90}}{L_{(2)90}} = \left( \frac{P_{0c1}/P_{01}}{P_{0c2}/P_{02}} \right)^3 = 8;$$

$$L_{(1)90} = 8L_{(2)90} = 162,4 \text{ млн об.}$$

Найдем относительную длительность нагружения

$$l_1 = \frac{\tilde{L}_1}{\tilde{L}_1 + \tilde{L}_2} = 0,8; \quad l_2 = \frac{\tilde{L}_2}{\tilde{L}_1 + \tilde{L}_2} = 1 - l_1 = 0,2.$$

Подставив полученные значения  $l_1, l_2, L_{(1)90}, L_{(2)90}$  в формулу (4.54), найдем

$$L_{90} = (0,8 \cdot 162,4^{-10/9} + 0,2 \cdot 20,4^{-10/9})^{-9/10} = 64,2 \text{ млн об.}$$

Проверим выполнение условия  $n > 1$ . Действительно,

$$n = \frac{\tilde{L}}{\tilde{L}_1 + \tilde{L}_2} = \frac{\tilde{L}_{90}}{\tilde{L}_1 + \tilde{L}_2} = 1280 > 1.$$

#### 4.7. РАСЧЕТ ДОЛГОВЕЧНОСТИ ПО ЭКВИВАЛЕНТНЫМ ОСЕВОЙ И РАДИАЛЬНОЙ НАГРУЗКАМ НА ПОДШИПНИК

Приведенная выше методика расчета долговечности требует определения нагрузки на наиболее нагруженный шарик. С достаточной для инженерной практики точностью можно найти долговечность, вычислив по заданной комбинированной нагрузке эквивалентную осевую или радиальную.

Рассмотрим радиально-упорный подшипник с углом  $\alpha$  контакта при комбинированном нагружении нагрузками  $F_a$  и  $F_r$ .

Назовем нагрузку, составляющие которой  $F_a = P_a$  и  $F_r = 0$ , эквивалентной заданной нагрузке на подшипник с составляющими  $F_a$  и  $F_r$ , если долговечность подшипника в обоих случаях нагружения одинакова. Найдем связь между нагрузками. Используя выражение

$$P_0 = F_a / (I_a(\epsilon) Z \sin \alpha),$$

запишем формулу для долговечности подшипника:

$$L = \left( \frac{P_0 c}{P_0} \right)^3 = \left( \frac{A f_c \gamma^{0,3} Z^{2/3} D_w^{1,8} (\cos \alpha)^{0,7} \operatorname{tg} \alpha}{F_a I_a(\epsilon) / I_a(\epsilon)} \right)^3. \quad (4.55)$$

Долговечность  $L$  остается постоянной для данного подшипника, если выполняется равенство

$$F_a \frac{I_a(\epsilon)}{I_a(\epsilon)} = P_a \frac{I_a(\infty)}{I_a(\infty)} = P_a = \text{const}, \quad (4.56)$$

поскольку только выражение  $F_a I_a(\epsilon) / I_a(\epsilon)$  в формуле для определения  $L$  зависит от условий нагружения. Используя данные табл. 4.1 и выбирая различные  $\epsilon$ , можно найти  $I(\epsilon)$ ,  $I_a(\epsilon)$  и  $(F_r/F_a) \operatorname{tg} \alpha$ , а значит,  $F_a$  и  $F_r$ :

$$\begin{aligned} F_a &= P_a \frac{I_a(\epsilon)}{I(\epsilon)} ; \quad F_r = \left( \frac{F_r}{F_a} \operatorname{tg} \alpha \right) \frac{F_a}{\operatorname{tg} \alpha} = \\ &= \left( \frac{F_r}{F_a} \operatorname{tg} \alpha \right) \frac{I_a(\epsilon) P_a}{I(\epsilon) \operatorname{tg} \alpha}. \end{aligned}$$

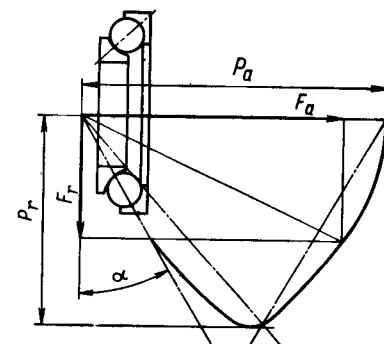
На рис. 4.3 в переменных  $F_a$  и  $F_r$  построена кривая, показывающая значение и направление нагрузок, прикладываемых к подшипнику, при которых долговечность остается постоянной. Для получения простой зависимости между эквивалентной нагрузкой  $P_a$  и двумя составляющими  $F_a$  и  $F_r$ , приложенной к подшипнику нагрузки кривую можно аппроксимировать двумя прямыми линиями, уравнения которых имеют вид

$$\begin{cases} P_a = F_a + X_a F_r \text{ при } F_a/F_r \geq 1,5 \operatorname{tg} \alpha, \\ P_a = Y_a F_r \text{ при } F_a/F_r < 1,5 \operatorname{tg} \alpha. \end{cases} \quad (4.57)$$

Коэффициенты  $X_a$  и  $Y_a$  определяем по формулам

$$X_a = \operatorname{tg} \alpha; \quad Y_a = 2,5 \operatorname{tg} \alpha.$$

Рис. 4.3



Таким образом, для заданных значений  $F_a$  и  $F_r$ , а также угла контакта  $\alpha$  значение эквивалентной осевой нагрузки  $P_a$  на подшипник может быть найдено. Вычисленное значение  $P_a$  нужно подставить в формулу для определения долговечности  $L$ , которая с учетом (4.55) и (4.56) принимает вид

$$L = \left( \frac{A f_c \gamma^{0,3} Z^{2/3} D_w^{1,8} (\cos \alpha)^{0,7} \operatorname{tg} \alpha}{P_a} \right)^3.$$

Иногда удобнее перейти к эквивалентной радиальной нагрузке  $P_r$ , на подшипник. Для этого, используя выражение

$$P_0 = F_r / [Z I_r(\epsilon) \cos \alpha],$$

выпишем формулу для долговечности подшипника

$$L = \left( \frac{A f_c \gamma^{0,3} Z^{2/3} D_w^{1,8} (\cos \alpha)^{0,7}}{F_r I_r(\epsilon) / I_r(\epsilon)} \right)^3. \quad (4.58)$$

Чтобы  $P_a$  и  $P_r$  соответствовали одному и тому же значению долговечности, с учетом (4.55) и (4.58), должно выполняться равенство

$$P_r \frac{I(0,5)}{I_r(0,5)} = P_a \frac{I(\infty)}{I_a(\infty)} \operatorname{ctg} \alpha = P_a \operatorname{ctg} \alpha. \quad (4.59)$$

Здесь учтено, что при чисто осевом нагружении  $\epsilon \rightarrow \infty$  и  $I(\infty)/I_a(\infty) = 1$ , а при чисто радиальном нагружении  $\epsilon = 0,5$ , поскольку в выражении

$$\epsilon = 0,5 \left( 1 + \frac{\delta_a}{\delta_r} \operatorname{tg} \alpha \right)$$

при чисто радиальном нагружении подшипника  $\delta_a = 0$ . Конечно, данный тип подшипника с  $\alpha \neq 0$  при чисто радиальном нагружении работать не сможет, но тем не менее формально предельный переход осуществить можно. Тогда, подставив в выражение (4.59) значения интегралов  $I(0,5)$  и  $I_r(0,5)$ , получаем

$$P_r = 0,4 P_a \operatorname{ctg} \alpha.$$

Формулы (4.57) для нахождения  $P_r$ , аппроксимирующие кривую, представленную на рис. 4.3, принимают вид

$$\begin{cases} P_r = X_r F_r + Y_r F_a \text{ при } F_a/F_r \geq 1,5 \operatorname{tg} \alpha, \\ P_r = F_r Y_r \text{ при } F_a/F_r < 1,5 \operatorname{tg} \alpha. \end{cases} \quad (4.60)$$

Коэффициенты  $X_r$  и  $Y_r$  определяем по формулам

$$X_r = 0,4, \quad Y_r = 0,4 \operatorname{ctg} \alpha.$$

При определении коэффициентов  $X_r$  и  $Y_r$ , Г. Лундберг рекомендовал включить параметр  $\eta = 1 - (1/3)\sin\alpha$  для корректировки неточности изготовления дорожки качения:

$$X_r = 1 - 0,6/\eta, \quad Y_r = (0,4/\eta) \operatorname{ctg}\alpha.$$

Таким образом, для заданных значений нагрузок  $F_a$  и  $F_r$ , а также угла контакта  $\alpha$  можно найти эквивалентную радиальную нагрузку на подшипник  $P_r$ . Полученное значение  $P_r$  нужно подставить в формулу для долговечности, которая с учетом (4.58) принимает вид

$$L = \left( \frac{A_r f_c \gamma^{0,3} Z^{2/3} D_w^{1,8} (\cos\alpha)^{0,7}}{P_r} \right)^3$$

Коэффициент  $A_r$  связан с  $A$  следующим образом:

$$A_r = I_r (0,5) A / I (0,5) = A.$$

Недостатком данного расчета является неустранимая погрешность, обусловленная аппроксимацией кривой (см. рис. 4.3) двумя прямыми линиями. Эта погрешность на некоторых участках достигает 12 %. Если направление нагрузки близко к направлению линии контакта, то расхождение может быть еще большим, но в таком режиме подшипник обычно не работает. Поскольку эквивалентная нагрузка входит в выражение для долговечности в третьей степени, то погрешность в вычислении долговечности подшипника в некоторых случаях достигает 40 %. При расчете по предлагаемой в подразд. 4.5 методике такая погрешность не возникает.

**П р и м е ч а н и я :** 1. Для нормальной работы однорядного радиально-упорного подшипника с углом контакта  $\alpha > 0$  требуется определенная осевая нагрузка на подшипник для предотвращения расхождения подшипниковых колец. Нормальная работа подшипника осуществляется при  $F_z/F_r > \operatorname{tg}\alpha$ . В ПУ с двумя подшипниками это неравенство всегда выполняется, так как радиальное перемещение вала ограничено.

2. При практическом расчете долговечности подшипника необходимо помнить, что динамическая несущая способность  $P_{0c}$  наиболее нагруженного шарика подшипника зависит от конкретных условий нагружения, поскольку в выражение для нее входит интеграл  $I(\epsilon)$ , который зависит от направления приложенной к подшипнику нагрузки. Поэтому при расчете одного и того же подшипника, но при различных способах нагружения, нужно каждый раз в выражение для  $P_{0c}$  поставлять значение  $I(\epsilon)$ , полученное для рассматриваемого способа нагружения.

#### 4.8. ВЛИЯНИЕ РАЗЛИЧНЫХ ФАКТОРОВ НА ЦИКЛИЧЕСКУЮ ДОЛГОВЕЧНОСТЬ ПОДШИПНИКОВ

Коэффициент  $A$  в формуле (4.13) принят равным 100 для стандартной подшипниковой стали (типа ШХ15), полученной по стандартной технологии и имеющей твердость HRC 58. При этом считаем, что подшипник работает в некотором среднестатистическом режиме смазывания, не очень обильного, но и не очень скучного. В формулах типа (4.17) стоит коэффициент  $A^q$ , изменение которого в зависимости от химического состава стали, технологии ее получения и твердости удобно учитывать коэффициентами  $\varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ . Коэффициент  $\varphi_2$  зависит только от химического состава стали,  $\varphi_3$  – только от технологии ее получения, а  $\varphi_4$  – от твердости. С другой стороны, разрушающее напряжение  $\tau_0$  и глубина  $z_0$ , на которой оно возникает, зависят от толщины смазочного слоя и распределения в нем давления. Действительно, рабочие поверхности подшипников щерохованы, в контактах неровностей возникает давление, фактическое распределение которого отличается от идеализированного распределения давления, вычисляемого по формуле Герца. Вблизи локальных максимумов давления смазочный материал поступает под давлением к вершинам трещин, расположенных перпендикулярно или под углом к поверхности, и раскалывает эти трещины, создавая значительные растягивающие напряжения. Силы трения способствуют увеличению разрушающего напряжения  $\tau_0$ . При увеличении толщины смазочного слоя распределение становится более плавным и описанные эффекты уменьшаются. Влияние режима смазывания можно учесть коэффициентом  $\varphi_5$  в формулах, аналогичных формуле (4.17). Коэффициент  $\varphi_1$ , определяемый по формуле (4.18), учитывает надежность, с которой обеспечивается долговечность партии подшипников.

Для сталей различного химического состава, полученных открытой выплавкой и подвергнутых объемной закалке, в табл. 4.6 приведены значения коэффициента  $\varphi_2$  (согласно Б. Хэмроку и Д. Даусону). Очевидно, что химический состав стали сказывается на разрушающем напряжении  $\tau_*^0$ , однако не вполне ясна зависимость  $\tau_*^0$  от количества и интенсивности микроконцентраторов, возникающих из-за добавления к железу угле-

Таблица 4.6

Массовая доля*, %								$\varphi_2$
C	Mn	Si	Mo	W	Cr	V	Co	
1,00	0,35	0,30	–	–	1,45	–	–	2,00
0,80	0,30	0,30	8,00	1,50	4,00	1,00	–	0,60
0,83	0,30	0,30	5,00	6,15	3,85	1,90	–	0,60
0,85	0,25	0,30	8,00	–	4,00	2,00	–	2,00
0,85	0,35	0,25	4,25	–	4,00	1,00	–	2,00
1,07	0,30	0,02	3,90	6,80	4,40	2,00	5,20	0,60

\* Остальное Fe.

рода, кремния и легирующих элементов. Коэффициент  $\varphi_3$  может значительно превышать единицу для сталей, полученных вакуумным переплавом. Характерное значение  $\varphi_3$  равно 3, однако при особо однородной структуре стали он может достигать 13. Значение  $\varphi_4$  оценивается по формулам (4.11) и (4.17). Действительно,  $\tau_*^0$  пропорционально твердости HRC,  $c/e^* = 9,3$ , поэтому

$$\varphi_4 = (\text{HRC}/58)^{9,3}. \quad (4.61)$$

Б. Хэмрок и Д. Даусон приводят для показателя степени значение 10,8. Из формулы (4.61) следует, что падение твердости вследствие неудачной термообработки или высокой рабочей температуры подшипника значительно уменьшает долговечность. Влияние температуры на долговечность становится явным при введении в формулу (4.61) убывающей зависимости HRC от температуры.

Произведение  $\varphi_2\varphi_3$  в конечном счете определяется неоднородностью структуры материала и допускает теоретическую оценку. Известно, что разброс прочностных свойств по объему материала значительно снижает циклическую долговечность. В связи с этим в расчетную формулу, аналогичную формуле (4.17), должен входить коэффициент качества материала. Пусть (для упрощения оценки этого влияния) напряженное состояние однородно, а  $\tau_*$  не зависит от числа  $n$  циклов. Тогда зависимость  $\tau_*$  от координаты можно задать формулой

$$\tau_* = \tau_*^0 \left( \frac{1}{K} \right)^{\cos \omega x} = \tau_*^0 e^{-(\ln K) \cos \omega x} \equiv \tau_*^0 \varphi_1(x), \quad (4.62)$$

где  $K > 1$  – постоянная;  $1/\omega$  – характерный размер неоднородности.

Из формулы (4.62) следует, что в точках  $x = 2j\pi$  при  $j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  и т. д. предел выносливости в  $K$  раз меньше  $\tau_*^0$ , а в точках  $x = (2j+1)\pi - K$  раз больше  $\tau_*^0$ . В соответствии с формулой (4.4) интегрирование  $\varphi_1^{-c}(x)$  по  $x$  при  $K \gg 1$  с помощью асимптотического метода Лапласа дает

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} e^{c(\ln K) \cos \omega x} dx &\approx \frac{(x_2 - x_1) \omega}{2\pi} K^c \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-c(\ln K) \omega^2 x^2/2} dx = \\ &= \frac{(x_2 - x_1) \omega}{2\pi} \frac{K^c}{\omega} \sqrt{\frac{2}{c \ln K}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2} d\xi = \frac{(x_2 - x_1) K^c}{\sqrt{2\pi c \ln K}}. \end{aligned}$$

Если материал неоднороден во всех направлениях, то вместо  $\varphi_1(x)$  целесообразно ввести

$$\varphi(x, y, z) = K^{\cos \omega x + \cos \omega y + \cos \omega z}.$$

Проинтегрировав  $\varphi^{-c}(x, y, z)$  по объему  $V$ , получаем  $V K^{3c} / (2\pi c \ln K)^{3/2}$ . При  $K = 1$  функция  $\varphi(x, y, z) \equiv 1$ . При  $c > 0,5$

$$\psi(K) = 1 + \frac{(K-1)^{3c}}{(2\pi c \ln K)^{3/2}}.$$

стремится к 1 для  $K \rightarrow 1$ , для  $K \rightarrow \infty$   $\psi(K)$  эквивалентно  $K^{3c} / (2\pi c \ln K)^{3/2}$ . Множитель  $\psi(K)$  следует вводить в правые части формул типа (4.4) для учета неоднородности материала. Большое рассеяние  $\tau_*$  по объему ( $K \gg 1$ ) приводит к значительному увеличению значения правой части формулы (4.4) и, как следствие, к уменьшению надежности. Эффект, полученный при возведении в степень  $c > 1$ , сохраняется даже при неизменном среднем значении  $\tau_*$ . В формуле (4.17) рассеяние  $\tau_*$  учтено коэффициентом

$$\varphi_2 \varphi_3 = \frac{26}{\psi^{1/c}(K)}. \quad (4.63)$$

Числовой коэффициент 26 в этой формуле равен произведению практически максимально достижимых значений  $\varphi_2 = 2$  и  $\varphi_3 = 13$ . Таким образом, считают, что при  $\varphi_2 \varphi_3 = 26$  материал будет практически однородным, т. е.  $K \approx 1$ . При увеличении  $K$  циклическая долговечность, вычисляемая по формуле типа (4.17), уменьшается. Конечно, число 26 достаточно условно, и при дальнейшем совершенствовании технологии выплавки и легирования стали коэффициент в формуле (4.63) будет расти. Для идеально однородного материала ( $K = 1$ )  $\varphi_2 \varphi_3$ , по-видимому, может достигать сотен или даже тысяч.

Типичная зависимость коэффициента  $\varphi_5$  от безразмерной толщины  $\Lambda$  смазочного слоя приведена на рис. 4.4. Параметр

$$\Lambda = \frac{h}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}},$$

где  $h$  – средняя толщина смазочного слоя в контакте;  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  – средние квадратические отклонения рабочих поверхностей дорожки и тела качения.

Значение  $\varphi_5 = 1$  соответствует  $\Lambda \approx 1,2$ . Это и есть "средний" режим смазывания, для которого получены формулы, аналогичные (4.17). При  $\Lambda \ll 1$  фактическая долговечность может быть намного ниже расчетной, вычисленной по формуле (4.17). При  $\Lambda > 3$  дальнейшее увеличение  $\Lambda$  не приводит к повышению долговечности, так как смазочный слой достаточно толст для того, чтобы почти полностью исключить непосредственный контакт наиболее высоких неровностей. Функцию, представленную на рис. 4.4, можно аппроксимировать выражением

$$\varphi_5 \approx 1,65 [\operatorname{th}(2\Lambda - 2,8) + 1].$$

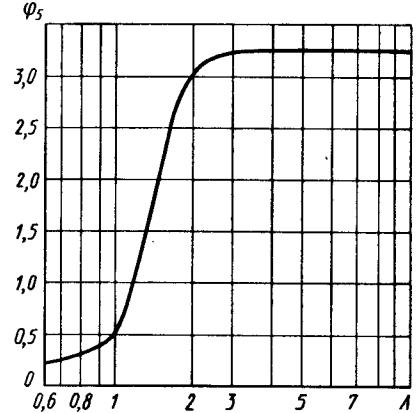


Рис. 4.4

Ниже приведены приближенные значения  $\varphi_5$  в некоторых точках в зависимости от безразмерного параметра  $\Lambda$ :

$\Lambda$	0,60	1,00	1,40	2,00	10,00
$\varphi_5$	0,13	0,53	1,65	3,10	3,30

Окончательная формула для расчета долговечности кольца имеет вид

$$L_S = \varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 \varphi_4 \varphi_5 \left( \frac{P_c}{P_e} \right)^q,$$

или

$$L_S = \left[ \frac{\ln(1/S)}{\ln(1/0,9)} \right]^{1/e_*} 26 \left\{ 1 + \left[ \frac{(K-1)^c}{\sqrt{2\pi c \ln K}} \right]^3 \right\}^{-1/e_*} \times \\ \times \left( \frac{HRC}{58} \right)^{9,3} 1,65 \left[ \operatorname{th} \left( \frac{2h}{\sigma} - 2,8 \right) + 1 \right] \left( \frac{P_c}{P_e} \right)^q,$$

где  $\sigma = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$ ;  $K^2 = \tau_{* \max} / \tau_{* \min}$  [см. формулу (4.62)];  $P_c$  и  $P_e$  определяют по формулам (4.13) и (4.16); номинальные значения  $e_*$ ,  $c$  и  $q$  соответственно равны 10/9, 31/3 и 3.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие . . . . .	3
Введение . . . . .	7
<b>Глава 1. Подшипниковые узлы машин и приборов . . . . .</b>	13
1.1. Некоторые конструкции подшипниковых узлов . . . . .	13
1.2. Принципиальная схема подшипникового узла . . . . .	25
1.3. Уровни моделирования и эксплуатационные характеристики узла . . . . .	27
<b>Глава 2. Механика контакта . . . . .</b>	32
2.1. Теория Герца . . . . .	32
2.2. Контакт упругих тел по узкой области . . . . .	44
2.3. Перемещения и микропроскальзывание в контакте . . . . .	49
2.4. Напряженное состояние в области контакта . . . . .	61
<b>Глава 3. Статический и динамический расчет подшипникового узла . . . . .</b>	84
3.1. Конструктивные, технологические и режимные параметры узла . . . . .	84
3.2. Статический силовой расчет узла . . . . .	87
3.3. Учет упругости вала при расчете осевой и радиальной жесткостей ротора на двух шариковых подшипниках . . . . .	132
3.4. Расчет параметров контакта торца ролика с бортиком кольца . . . . .	137
3.5. Трение в подшипниках . . . . .	142
3.6. Динамика ротора на подшипниках . . . . .	169
3.7. Динамика сепараторов в комплекте с шариками . . . . .	188
3.8. Плоское движение сепаратора . . . . .	226
<b>Глава 4. Долговечность подшипниковых узлов . . . . .</b>	235
4.1. Надежность деталей . . . . .	235
4.2. Динамическая несущая способность и долговечность при постоянном нагружении шарика . . . . .	240
4.3. Долговечность при переменном нагружении шарика . . . . .	247
4.4. Долговечность подшипника при нагружении, медленно меняющемся во времени . . . . .	250
4.5. Практические методы расчета долговечности подшипников . . . . .	251
4.6. Долговечность подшипника при периодическом ступенчатом нагружении . . . . .	260
4.7. Расчет долговечности по эквивалентным осевой и радиальной нагрузкам на подшипник . . . . .	264
4.8. Влияние различных факторов на циклическую долговечность подшипников . . . . .	267

## **ПРОИЗВОДСТВЕННОЕ ИЗДАНИЕ**

**Михаил Алексеевич Галахов,  
Александр Николаевич Бурмистров**

## **РАСЧЕТ ПОДШИПНИКОВЫХ УЗЛОВ**

*Редактор Н.А. Фетисова  
Художественный редактор В.В. Лебедев  
Обложка художника В.Д. Еланевшикова  
Технический редактор С.Ю. Синякова*

**ИБ № 4806**

Сдано в набор 8.10.87.

Подписано в печать 13.06.88.

Т – 11228.

Формат 60 × 88 1/16. Бумага офсетная № 2. Гарнитура Пресс Роман. Печать офсетная.  
Усл. печ. л. 16,66. Усл. кр.-отт. 16,66.

Уч.-изд. л. 17,22.

Тираж 20 000 экз.

Заказ № 444.

Цена 1 р. 20 к.

**Ордена Трудового Красного Знамени издательство "Машиностроение",  
107076, Москва, Стромынский пер., 4**

**Отпечатано в московской типографии № 8 Союзполиграфпрома  
при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии  
и книжной торговли 101898, Москва, Хохловский пер., 7,  
с оригинала-макета, изготовленного в издательстве "Машиностроение"  
на на борно-пишущих машинах**