

М. И. ЛЮБОШИЦ, Г. М. ИЦКОВИЧ

# СПРАВОЧНИК ПО СОПРОТИВЛЕНИЮ МАТЕРИАЛОВ

М. И. ЛЮБОШИЦ, Г. М. ИЦКОВИЧ

# СПРАВОЧНИК ПО СОПРОТИВЛЕНИЮ МАТЕРИАЛОВ

Издание второе,  
исправленное и дополненное

ИЗДАТЕЛЬСТВО «ВЫШЕЙШАЯ ШКОЛА»  
МИНСК 1969

**Любошиц М. И., Ицкович Г. М**

**Л93** Справочник по сопротивлению материалов.  
Изд. 2-е, исправл. и доп. Минск, «Высшэйш.  
школа», 1969.  
464 с. с илл.

Справочное пособие для учащихся средних специальных учебных заведений по курсу «Сопротивление материалов». Содержит теоретические сведения и расчетно-справочный материал для расчета элементов конструкций и деталей машин на прочность, жесткость и устойчивость. Справочник может быть использован также студентами вузов с сокращенной программой обучения и инженерно-техническими работниками проектных организаций и предприятий, занимающимися расчетами на прочность.

**3-1-4**  
**61-69**

**6.05**

*Любошиц Моисей Ильич, Ицкович Георгий Михайлович.*  
Справочник по сопротивлению материалов

Редактор *С. Липец*  
Худож. редактор *В. Валентинович*  
Техн. редактор *П. Фрайман*  
Корректоры *А. Белянкина, Г. Вагабова*

АТ 04239. Сдано в набор 11/III-1969 г. Подписано к печати 22/IX-1969 г.  
Бумага 84×108<sup>1/2</sup> типогр. № 3. Печ. л. 14,5 (24,36). Уч.-изд. л. 30,16. Изд.  
№ 68-01. Зак. 2020. Тираж 80 000 экз. Цена 1 руб. 66 коп.

Издательство «Высшэйшая школа» Государственного комитета Совета Министров БССР по печати. Редакция учебников и учебно-методической литературы для средних специальных и профессионально-технических учебных заведений. Тем. план 1969 г. № 61. Минск, ул. Кирова, 24.

Отпечатано полиграфкомбинатом им. Я. Коласа Государственного комитета Совета Министров БССР по печати (Минск, ул. Красная, 23) с матриц, изготовленных книжной фабрикой им. М. Фрунзе Государственного комитета Совета Министров УССР по печати (Харьков, ул. Донец-Захаржевская, 6/8).

**3-1-4**  
**61-69**

## ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

В новом издании книги сохранены основные принципы построения и характер изложения, принятые в первом издании. Справочник дополнен новыми материалами: введены расчеты статически неопределимых балок и рам по методу сил, расчеты тонкостенных сосудов и толстостенных труб, расчеты по предельным нагрузкам.

Глава 7 дополнена вычислением интеграла Мора для прямого бруса ступенчато-переменного сечения способом перемножения моментных факторов. Устранены опечатки, обнаруженные в основном тексте и в таблицах первого издания, внесены некоторые изменения, главным образом редакционного характера. В целом материал первого издания не подвергся каким-либо существенным изменениям; исключения составляют лишь расчеты на прочность при напряжениях, переменных во времени: определения, терминология и обозначения приведены в соответствие с новым ГОСТ 2860—65 «Металлы. Методы испытания на усталость».

Номера ГОСТов, в которые внесены изменения, отмечены звездочками; например, взамен ГОСТ 8239—56 дан ГОСТ 8239—56\*.

В справочнике приведены краткие сведения о Международной системе единиц измерения (СИ) и ее применении в сопротивлении материалов. Механические характеристики различных материалов даны как в старых, так и в новых единицах измерения. Некоторые примеры решены с использованием Международной системы единиц (СИ).

Включение нового материала позволяет рассчитывать на некоторое расширение круга лиц, пользующихся справочником, и большую его полезность в качестве учебно-справочного пособия для студентов вузов.

Главы 2, 5—8, 14 написаны кандидатом технических наук, доцентом *М. И. Любошцем*, главы 1, 3, 4, 9—12 — доцентом *Г. М. Ицковичем*. Глава 13 написана авторами совместно. Для нового издания главу 15 написал кандидат технических наук, доцент *Ю. А. Раковщик*; § 12.2 написан при участии кандидата технических наук, доцента *С. В. Рабиновича*.

Авторы считают своим приятным долгом выразить искреннюю признательность инженеру *Н. Н. Колтеву* и доценту *А. И. Рожде-*

ственскому, приславшим ряд замечаний по первому изданию справочника, а также доктору технических наук Р. М. Шнейдеровичу за советы и замечания по рукописи второго издания книги.

Замечания и пожелания читателей следует направлять в адрес издательства (Минск, ул. Кирова, 24).

*Авторы*

## ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

Справочник содержит расчетно-справочные сведения по расчетам элементов конструкций, имеющих форму прямого бруса, на прочность, жесткость и устойчивость.

Справочник не претендует на роль учебника для систематического изучения курса сопротивления материалов; как следствие расчетные формулы приведены без выводов и подробных обоснований. Вместе с тем авторы стремились дать основные теоретические сведения с такой степенью подробности и в такой форме, чтобы лица, пользующиеся книгой, могли вполне сознательно выполнять те расчеты, методы которых освещены в ней. Излагая теоретический материал несколько по-иному и более подробно, чем это принято в справочной литературе, авторы имели в виду создать книгу, которая могла бы служить не только справочником для инженеров и техников при выполнении расчетов в конструкторских бюро и на предприятиях, а также для студентов и учащихся старших курсов, изучавших сопротивление материалов, но и учебно-справочным пособием, используемым при изучении этой дисциплины. В частности, можно полагать, что книга окажется полезной учащимся (в первую очередь заочникам) при повторении теоретического материала, ранее изученного по учебнику и конспекту лекций.

Рассматриваемые в книге методы расчетов изложены достаточно подробно с обстоятельными пояснениями, содержащими указания по выполнению расчетов в различных частных случаях и практические рекомендации по применению наиболее целесообразных расчетных приемов. Такой подход к изложению практических приемов расчета и их иллюстрация на большом количестве подробно разобранных числовых примеров существенно отличают данный справочник от обычных справочников по сопротивлению материалов. В отборе примеров и методике изложения их решений также отразилось стремление авторов придать книге характер не только справочного, но в известной мере и учебного пособия.

К книге приложен довольно большой список литературы. В него включены как те источники, которые были непосредственно использованы при составлении справочника (порядковые номера источников

по списку литературы при ссылках даны в тексте **цифрами** в квадратных скобках), так и целый ряд справочных, специальных и учебных изданий, представляющих интерес для конструкторов и расчетчиков, а также для преподавателей, ведущих курсы сопротивления материалов. Для удобства читателей многие ссылки на литературу содержат конкретные указания о том, какие именно частные вопросы освещены в упоминаемых источниках.

Авторы считают своей приятной обязанностью выразить признательность рецензенту книги доктору технических наук, профессору Г. К. Татуру, давшему ряд ценных советов и замечаний, а также кандидату технических наук, доценту Н. В. Барановскому, сделавшему большую работу по научному редактированию книги.

## ГЛАВА I

### ВВЕДЕНИЕ

#### § 1.1. ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ. ТИПЫ НАГРУЗОК

Сопротивление материалов является одной из ветвей механики деформируемого тела. Используя при исследовании напряженного и деформированного состояния твердых тел большее число упрощающих допущений и существенно более простой математический аппарат, чем смежные ветви той же науки — математическая и прикладная теории упругости и пластичности, *сопротивление материалов дает практические, широко доступные методы расчета элементов конструкций на прочность, жесткость и устойчивость.*

В сопротивлении материалов в основном рассматриваются расчеты *бруса* (стержня), т. е. тела, длина которого существенно больше его поперечных размеров. Расчеты пластин и оболочек относятся в основном к области прикладной теории упругости, но в сравнительно полных учебных и справочных руководствах по сопротивлению материалов некоторые из этих расчетов все же излагаются. Такое положение свидетельствует главным образом о том, что границы между отдельными ветвями механики деформируемого тела в значительной мере условны.

Нагрузки, действие которых на элементы конструкций рассматривается в сопротивлении материалов, классифицируют по условиям приложения и по характеру изменения во времени.

По первому из указанных признаков различают нагрузки *поверхностные* и *объемные*.

Нагрузку, распределенную по весьма малой площадке поверхности детали, для целей расчета, как правило, представляют *сосредоточенной* в одной точке. Сосредоточенные силы измеряют в килограмм-силах (*кг*) или при применении Международной системы единиц измерения (СИ) в ньютонах (*н*);  $1 \text{ н} \approx 0,102 \text{ кг}$ ;  $1 \text{ кг} \approx 9,81 \text{ н}$ . Для практического применения ньютона зачастую оказывается слишком мелкой единицей; удобнее кратные единицы, в частности  $1 \text{ кн} = 10^3 \text{ н}$  и  $1 \text{ Мн} = 10^6 \text{ н}$ .

Интенсивность нагрузок, равномерно или неравномерно распределенных по некоторой поверхности (например, давление жидкости или газа на стенки сосуда), измеряют в  $\text{кг/см}^2$  или (при применении СИ) в  $\text{н/м}^2$  и соответствующих кратных единицах, например  $\text{кн/м}^2$ ,  $\text{Мн/м}^2$ . Иногда применяют внесистемную единицу давления — бар ( $1 \text{ бар} = 10^5 \text{ н/м}^2$ ).

При расчете брусьев поверхностные силы в ряде случаев могут рассматриваться как равномерно или неравномерно распределенные по длине бруса (всей или части). Интенсивность такой погонной нагрузки измеряется в  $\text{кг/м}$ ,  $\text{кг/см}$ ,  $\text{н/м}$ ,  $\text{кн/м}$ ,  $\text{Мн/м}$ .



Объемные силы распределены равномерно или неравномерно по всему объему элемента конструкции (например, силы инерции, силы тяжести, магнитные воздействия); интенсивность этих сил измеряется в  $\text{кг}/\text{м}^3$ ,  $\text{кГ}/\text{см}^3$ ,  $\text{н}/\text{м}^3$ ,  $\text{кн}/\text{м}^3$ ,  $\text{Мн}/\text{м}^3$ .

По характеру изменения во времени различают: а) *статические нагрузки*, нарастающие медленно и плавно от нуля до своего конечного значения, а затем остающиеся постоянными (например, центробежные силы в период разгона и при последующем равномерном вращении какого-либо ротора); б) *повторные нагрузки*, многократно изменяющиеся во времени по тому или иному закону (в этой книге в гл. 13 рассматривается лишь действие нагрузок установившихся режимов — такие нагрузки изменяются по последовательно повторяющимся циклам); в) *нагрузки малой продолжительности*, прикладываемые к конструкции сразу в полную величину или даже с начальной скоростью в момент контакта (эти нагрузки часто называют *ударными* или *динамическими*).

### § 1.2. ОСНОВНЫЕ ДОПУЩЕНИЯ

В сопротивлении материалов принимают следующие допущения о свойствах материалов рассчитываемых элементов конструкций:

1) *материал однороден*, т. е. свойства любых сколь угодно малых его частиц совершенно тождественны;

2) *материал тела полностью заполняет весь объем тела без каких-либо пустот*, т. е. тело рассматривается как сплошная среда. Допущение о сплошности тела можно рассматривать как следствие допущения об однородности материала;

3) *материал изотропен*, т. е. физико-механические свойства его по всем направлениям одинаковы;

4) *в известных пределах нагружения материал обладает идеальной (совершенной) упругостью*.

В отношении характера деформаций конструкций приняты следующие допущения:

1) *перемещения точек конструкции, обусловленные ее упругими деформациями, весьма малы по сравнению с размерами элементов конструкции*. Следствием этого допущения, называемого иногда *принципом начальных размеров*, является, в частности, возможность не учитывать при составлении уравнений равновесия изменения в расположении и направлении сил, происходящие вследствие деформации конструкции;

2) *перемещения точек элементов конструкции прямо пропорциональны силам, вызвавшим эти перемещения*. Конструкции, обладающие указанным свойством, называются *линейно деформируемыми*.

Линейно деформируемые конструкции (системы) подчиняются принципу независимости действия сил — *результат действия группы сил равен сумме результатов действия каждой силы в отдельности*. Из сказанного следует, что результат действия группы сил не зависит от порядка (последовательности) нагружения ими конструкции.

## § 1.3. МЕТОД СЕЧЕНИЙ. ВНУТРЕННИЕ СИЛОВЫЕ ФАКТОРЫ

Метод сечений служит для установления зависимостей между внешними силами, действующими на конструкцию или отдельный ее элемент, и возникающими при этом внутренними силами. В результате применения метода сечений силы, являющиеся внутренними для тела в целом, переводятся в разряд внешних для каждой из частей тела, образовавшихся вследствие мысленно проведенного сечения. В результате составления и решения уравнений равновесия для сил, действующих на оставленную после проведения сечения (в некоторых случаях — нескольких сечений) часть тела, определяют силы, заменяющие действие отброшенной части тела на оставленную. Это и есть внутренние силы, возникающие в рассматриваемом сечении тела при нагружении последнего данной системой внешних сил.<sup>1</sup> Говоря об определении внутренних сил с помощью метода сечений, имеют в виду лишь определение *статического эквивалента* (главного вектора и главного момента или в отдельных случаях равнодействующей) системы внутренних сил, возникающих в данном сечении. Распределение внутренних сил по сечению (т. е. определение их величин и направлений в отдельных точках сечения) не может быть установлено с помощью метода сечений без рассмотрения характера возникающих деформаций. Иными словами, *задача о распределении внутренних сил по сечению статически неопределима*.

При расчете бруса (стержня) и стержневых систем метод сечений применяют в первую очередь для определения статических эквивалентов внутренних сил, возникающих в *поперечных* сечениях бруса.

Брус, находящийся в равновесии под действием некоторой системы внешних сил (рис. 1.1, а), рассекают плоскостью, перпендикулярной к его продольной оси, т. е. совпадающей с поперечным сечением. Одну из частей бруса отбрасывают, а ее действие на оставшуюся часть заменяют искомыми главным вектором и главным моментом внутренних сил, возникающих в рассматриваемом сечении при заданном нагружении. Практически отыскание величин и направлений главного вектора и главного момента оказывается целесообразным заменить нахождением их составляющих по осям выбранной системы координат. Начало этой системы совмещено с центром тяжести поперечного сечения, ось  $z$  направлена по продольной оси бруса, оси  $x$  и  $y$  совпадают с главными центральными осями<sup>2</sup> данного поперечного сечения. Таким образом, в общем случае действие отброшенной части бруса на оставленную заменяется тремя составляющими главного вектора и тремя составляющими главного момента внутренних сил (рис. 1.1, б). Эти шесть величин (три силы и три пары сил или,

<sup>1</sup> Внутренние силы, имеющиеся в ненагруженном теле, не принимаются во внимание. Поэтому в сопротивлении материалов, не оговаривая этого каждый раз специально, под внутренними силами понимают лишь дополнительные внутренние силы, обусловленные действием на тело внешних сил. Это положение иногда называют *гипотезой о начальном (естественном) ненапряженном состоянии тела*.

<sup>2</sup> В случае, если поперечное сечение имеет ось симметрии, она и является одной из главных центральных осей; вторая главная центральная ось проходит через центр тяжести сечения перпендикулярно к первой. Сведения об определении направлений главных центральных осей в общем случае несимметричного сечения приведены в гл. 5.

как обычно говорят, три момента) носят название *внутренних силовых факторов* в поперечном сечении бруса:

$N_z$  — продольная (или нормальная) сила;

$Q_x$  и  $Q_y$  — поперечные (или перерезывающие) силы;

$M_z$  — крутящий момент;

$M_x$  и  $M_y$  — изгибающие моменты.

Каждое из шести уравнений равновесия, составляемых для сил, действующих на оставленную часть бруса, позволяет определить один из внутренних силовых факторов.

В общем случае каждый из внутренних силовых факторов по длине бруса переменен, т. е. его величина и направление в различных поперечных сечениях неодинаковы. Закон изменения внутрен-

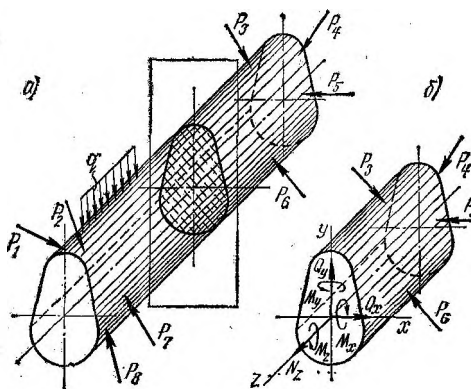


РИС. 1.1

него силового фактора по длине бруса удобно представлять в виде графика — *эпюры* данного внутреннего силового фактора (построение эпюр продольных сил, крутящих моментов, поперечных сил и изгибающих моментов дано соответственно в гл. 2, 6, 7).

Случаи деформации бруса, при которых в его поперечных сечениях возникает лишь какой-либо один внутренний силовой фактор, относят к простым видам деформации. При растяжении или сжатии бруса возникает продольная сила; при срезе (сдвиге) — поперечная сила;<sup>1</sup> при кручении — крутящий момент; при чистом прямом изгибе — изгибающий момент ( $M_x$  или  $M_y$ ). Нередки случаи, когда нельзя говорить о виде деформации бруса в целом, а следует гово-

<sup>1</sup> Направление поперечной силы во многих случаях не играет роли, т. е. безразлично, возникает ли  $Q_x$  или  $Q_y$ , или  $Q = \sqrt{Q_x^2 + Q_y^2}$ ; иными словами, если при работе бруса на срез направление возникающей в сечении поперечной силы не совпадает ни с одной из главных центральных осей, нет необходимости в разложении этой силы на составляющие.

В общем случае изгиба бруса (см. гл. 7—9) направление поперечной силы может иметь значение, и тогда ее раскладывают на составляющие по главным центральным осям.

речь о виде деформации отдельного участка или элемента бруса, так как тот или иной внутренний силовой фактор, отличный от нуля в поперечных сечениях какой-либо части бруса, оказывается равным нулю в поперечных сечениях другой его части.

Если в поперечных сечениях бруса (отдельного участка) два (или более) внутренних силовых фактора отличны от нуля и их одновременно учитывают при расчете, то иногда говорят, что брус (участок бруса) работает на сложное сопротивление (см. гл. 9,10).

#### § 1.4. НАПРЯЖЕНИЕ

*Напряжением* в данной точке сечения называется предел отношения элементарной внутренней силы к площади выделенной в сечении площадки (рис. 1.2) при стремлении последней к нулю («стягиванию» этой площадки в точку):

$$p = \lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta F}. \quad (1.1)$$

Напряжение является величиной, характеризующей интенсивность внутренних сил в рассматриваемой точке данного сечения.

Через данную точку тела можно провести бесчисленное множество сечений, различно ориентированных в пространстве; в общем

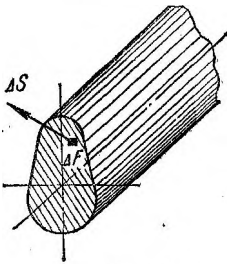


РИС. 1.2

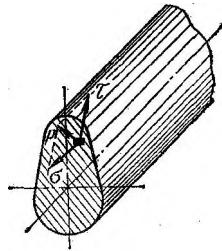


РИС. 1.3

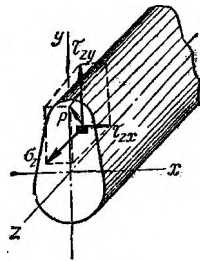


РИС. 1.4

случае напряжения, возникающие на соответствующих площадках, различны. Таким образом, *нельзя говорить о напряжении в данной точке тела, не указывая, о каком сечении, проходящем через эту точку, идет речь.*

Полное напряжение  $p$  можно разложить на две составляющие: по нормали к сечению — нормальное напряжение  $\sigma$  и составляющую, лежащую в плоскости сечения, — касательное напряжение  $\tau$  (рис. 1.3).

Касательное напряжение в свою очередь можно разложить на две составляющие, направленные параллельно выбранным осям координат. Таким образом, вектор напряжения в данной точке по данной площадке дает три составляющие (рис. 1.4). Индексы у составляющих (компонентов напряжения) ставят по следующим правилам: первый индекс указывает, какой оси параллельна нормаль к пло-

щадке, второй — какой оси параллельно само напряжение. В обозначениях нормальных напряжений один из двух индексов опускают, т. е. вместо  $\sigma_{zz}$  и т. п. пишут  $\sigma_z$  и т. д.

По месту, занимаемому в расчетах, и по методу определения следует различать предельные (или опасные), допускаемые и рабочие (расчетные) напряжения.

*Предельные напряжения* определяют экспериментально при механических испытаниях материалов обычно в условиях линейного напряженного состояния (см. гл. 2). При статическом нагружении роль предельного нормального напряжения ( $\sigma_{\text{пред}}$ ) играет предел текучести (физический  $\sigma_T$  или условный  $\sigma_{0,2}$ ) или предел прочности  $\sigma_{\text{пл}}$  (иногда его называют временным сопротивлением). Таким образом, при достижении напряжением предельного значения возникают заметные остаточные деформации или появляются признаки хрупкого разрушения.<sup>1</sup> При напряжениях, переменных во времени, роль предельного напряжения играет предел выносливости (см. гл. 13).

*Допускаемые напряжения* назначают как некоторые доли от соответствующих предельных напряжений, т. е.

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{\text{пред}}}{[n]}, \quad (1.2)$$

где  $[n]$  — требуемый (заданный, допускаемый) коэффициент запаса прочности. Указания по выбору  $[n]$  можно найти, например, в справочниках [32, 56] и учебнике [6].

*Рабочие напряжения* зависят от нагрузок, действующих на конструкцию, и от ее размеров. В большинстве случаев в расчетные зависимости входят так называемые *номинальные* напряжения, определяемые по основным формулам сопротивления материалов без учета влияния концентрации напряжений, состояния поверхности детали и прочих факторов, влияющих на прочность детали (подробнее см. в гл. 13).

### § 1.5. КЛАССИФИКАЦИЯ ВИДОВ И МЕТОДОВ РАСЧЕТА ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ

Основным видом расчета на прочность является *расчет по опасной точке*, называемый также *расчетом по допускаемым напряжениям*. При этом виде расчета достижение рабочим напряжением (в общем случае имеется в виду эквивалентное напряжение, определяемое по той или иной гипотезе прочности, — см. гл. 10) предельного значения хотя бы в одной точке конструкции отождествляется с нарушением прочности всей конструкции. Нарушением прочности считается не только возникновение признаков разрушения (т. е. достижение напряжением в опасной точке значения предела прочности или предела выносливости), но и возникновение пластических

<sup>1</sup> Указанные механические характеристики относятся к испытаниям при нормальной комнатной температуре; если рассчитывают элементы, предназначенные для работы при высоких температурах, в качестве предельного напряжения принимают либо предел ползучести, либо предел длительной прочности (см. [21 и 56]).

деформаций (т. е. равенство расчетного напряжения пределу текучести). Условие прочности записывается в виде

$$n = \frac{\sigma_{\text{пред}}}{\sigma} \geq [n] \quad (1.3)$$

или чаще при использовании понятия «допускаемое напряжение»

$$\sigma \leq [\sigma], \quad (1.4)$$

где  $\sigma$  — расчетное (в общем случае эквивалентное) напряжение для опасной точки;

$n$  — фактический (расчетный) коэффициент запаса для опасной точки.

В некоторых случаях напряжения, возникающие в элементах конструкций, возрастают непропорционально нагрузкам. Такое положение имеет место, например, при изгибе и осевом нагружении бруса малой жесткости; в этом случае брус рассчитывают на продольно-поперечный изгиб (см. § 12. 3). В этих случаях коэффициент запаса прочности должен определяться как отношение предельной нагрузки  $P_{\text{пред}}$  к фактически действующей  $P$ , и условие прочности записывается в виде

$$n = \frac{P_{\text{пред}}}{P} \geq [n]. \quad (1.5)$$

В указанном частном случае в качестве предельной принимается нагрузка, при которой в опасной точке элемента конструкции напряжение достигает предельного значения (например, предела текучести).

Следует подчеркнуть, что, хотя оценка прочности выполняется путем сопоставления рабочей нагрузки с предельной, а не путем сопоставления напряжений, расчет по условию (1.5) все же является расчетом по опасной точке.

При статическом нагружении конструкций из пластичных материалов находит применение расчет по предельной нагрузке (другие названия: расчет по состоянию предельного равновесия, расчет по несущей способности, расчет по допускаемым нагрузкам). В этом методе расчета на прочность в качестве предельной принимается нагрузка, при которой несущая способность конструкции оказывается исчерпанной, т. е. конструкция обращается в геометрически изменяемую систему, не способную сопротивляться возрастанию нагрузки. Указанное состояние конструкции наступает при возникновении текучести не в отдельных ее точках, а при охвате текучестью определенных областей, — в зависимости от конкретных особенностей конструкции это могут быть отдельные составляющие ее стержни или отдельные поперечные сечения стержней. Условие прочности (1. 5) принципиально отлично от указанного для продольно-поперечного изгиба. Расчет по предельным нагрузкам изложен в гл. 15.

Расчеты на жесткость служат для определения (или проверки) таких размеров элементов конструкций, при которых упругие перемещения, возникающие при действии на конструкцию эксплуатационных нагрузок, не превышают допустимых перемещений. Значения

ния последних для некоторых конструкций (например, мостов, элементов промышленных и гражданских сооружений, подъемных кранов) нормированы, для других — устанавливаются на основе опыта проектирования и эксплуатации аналогичных конструкций.

Многие элементы конструкций, помимо расчета на прочность, должны быть рассчитаны на жесткость. При этом нередко из расчета на жесткость требуемые размеры поперечных сечений стержней получаются большими, чем из расчета на прочность, т. е. расчет на жесткость оказывается решающим. В большинстве случаев расчеты на жесткость более трудоемки, чем расчеты на прочность; поэтому иногда ограничиваются расчетом на прочность, выполняемым по заданному заниженным допускаемым напряжениям (с повышенными коэффициентами запаса). Очевидно, такой расчет дает размеры сечений большие действительно требуемых по условиям прочности, т. е. жесткость конструкции оказывается выше, чем в случае выполнения ее расчета по обычным (не пониженным) допускаемым напряжениям. Такой косвенный путь обеспечения жесткости конструкции можно применять либо в не особенно ответственных случаях, либо при наличии достаточного опыта проектирования конструкций, аналогичных рассчитываемой, когда на основе этого опыта можно судить о требуемой величине снижения допускаемого напряжения.

Расчеты на устойчивость служат для определения (или проверки) таких размеров элементов конструкций, при которых обеспечивается устойчивость исходной (заданной) формы их равновесия. Этим расчетам подлежат, в частности, сравнительно длинные и тонкие сжатые стержни, цилиндрические оболочки, нагруженные внешним давлением или испытывающие осевое сжатие, пластины при действии сжимающих сил. Потеря устойчивости связана со скачкообразным качественным изменением характера деформации элемента конструкции и переходом к новой, отличающейся от исходной, устойчивой форме равновесия, сопровождаемым резким возрастанием напряжений и перемещений.<sup>1</sup> Значение нагрузки, при которой происходит переход от одной формы устойчивого равновесия к другой (разветвление форм равновесия), называется *критическим*. Практически достижение нагрузкой критического значения означает выход конструкции из строя и непригодность ее к дальнейшей эксплуатации, т. е. критическая нагрузка должна рассматриваться как предельная. В гл. 12 даны расчеты на устойчивость центрально сжатых прямолинейных стержней. Другие случаи расчетов на устойчивость приведены в работах [13, 16, 32, 43, 56, 59, 67, 71].

Все три вида расчетов (на прочность, жесткость, устойчивость) в зависимости от конкретных особенностей задачи, стоящей перед расчетчиком, могут быть либо *проектными*, либо *проверочными*. Последние имеют две основные разновидности: а) проверка соблюдения условия прочности (жесткости, устойчивости); б) определение из условия прочности (жесткости, устойчивости) допускаемого значения нагрузки.

Расчеты строительных конструкций выполняют в соответствии со строительными нормами и правилами (СНиП), предусматривающими применение расчетов

<sup>1</sup> Здесь имеется в виду потеря устойчивости первого рода; о потере устойчивости второго рода см., например, в работах [16, 41, 67].

по предельным состояниям. Нормы предписывают учитывать три вида предельных состояний (см. [62]): по несущей способности;<sup>1</sup> по деформациям и перемещениям; по трещиностойкости.

Целью расчета по первому предельному состоянию является обеспечение несущей способности (прочности, устойчивости формы и положения, выносливости) и ограничение развития чрезмерных пластических деформаций конструкций в возможных неблагоприятных условиях их работы.

Целью расчета по второму предельному состоянию является ограничение деформаций или перемещений (в том числе при колебаниях) конструкций.

Целью расчета по третьему предельному состоянию является недопущение трещин или ограничение величины раскрытия трещин.

Расчет конструкций по первому предельному состоянию на прочность по ограничению пластических деформаций или на устойчивость формы производится по расчетным нагрузкам, которые определяются как произведения нормативных нагрузок на коэффициенты перегрузки.

При расчетах на прочность по напряжениям в опасной точке взамен допускаемого напряжения вводится так называемое расчетное сопротивление материала, представляющее собой произведение нормативного сопротивления (например, предела текучести) на коэффициенты однородности и условий работы.

### § 1.6. КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ О МЕЖДУНАРОДНОЙ СИСТЕМЕ ЕДИНИЦ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИИ В СОПРОТИВЛЕНИИ МАТЕРИАЛОВ

Международная система единиц (ГОСТ 9867—61) введена в СССР с 1/1 1963 г. для предпочтительного применения во всех областях науки, техники и народного хозяйства, а также в преподавании. Для этой системы принято сокращенное обозначение: русскими буквами СИ и латинскими SI.

Ниже (табл. 1.1—1.3) даны основные и дополнительные единицы СИ, приведены краткие общие сведения о Международной системе единиц, указания об образовании кратных и дольных единиц (в соответствии с ГОСТ 7663—55), относящиеся к сопротивлению материалов производные единицы СИ и данные для перевода единиц систем СГС, МКГСС и внесистемных в единицы СИ. Учитывая, что ГОСТ 9867—61 не отменяет прочие ГОСТы на системы единиц (в частности, ГОСТ 7664—61 «Механические единицы») и что ряд используемых в расчетах ГОСТов (например, на сортамент прокатной стали, на материалы) построен без использования единиц СИ, приводимые в настоящем справочнике расчеты даны с применением как единиц измерения по ГОСТ 7664—61, так и единиц СИ. В некоторых примерах расчеты выполнены параллельно в двух системах единиц. Кроме того, в расчетах использованы внесистемные единицы, регламентированные проектом нового ГОСТа на единицы измерения, который во время подготовки рукописи справочника к печати находился в стадии утверждения.

В ряде случаев при практических расчетах удобнее пользоваться кратными или дольными единицами измерения, которые образуются путем умножения основных или производных единиц на соответствующую степень числа 10.

Наименования кратных единиц получают путем присоединения к простым наименованиям единиц (за исключением единиц времени и угла) соответствующих приставок, некоторые из которых указаны в табл. 1.4.

<sup>1</sup> Здесь понятие несущей способности не совпадает с используемым при расчетах по предельным нагрузкам (см. стр. 13 и гл. 15).



Таблица 1.1

## Основные и дополнительные единицы СИ

Наименования величин	Единицы измерения	Сокращенные обозначения
<b>Основные</b>		
Длина	метр	<i>м</i>
Масса	килограмм	<i>кг</i>
Время	секунда	<i>сек</i>
Сила электрического тока	ампер	<i>а</i>
Термодинамическая температура	градус Кельвина	$^{\circ}\text{К}$
Сила света	свеча	<i>св</i>
<b>Дополнительные</b>		
Плоский угол	радиан	<i>рад</i>
Телесный угол	стерадиан	<i>стер</i>

Примечание. Допускается применение единицы температуры Международной практической температурной шкалы — градус Цельсия ( $^{\circ}\text{C}$ ).

Таблица 1.2

## Производные единицы пространства и времени и механические единицы СИ

Наименования величин	Единицы измерения	Сокращенные обозначения
Площадь	квадратный метр	$\text{м}^2$
Статический момент и момент сопротивления плоского сечения	кубический метр	$\text{м}^3$
Момент инерции плоского сечения	метр в четвертой степени	$\text{м}^4$
Объем	кубический метр	$\text{м}^3$
Линейная скорость	метр в секунду	$\text{м}/\text{сек}$
Угловая скорость	радиан в секунду	$\text{рад}/\text{сек}$
Линейное ускорение	метр на секунду в квадрате	$\text{м}/\text{сек}^2$
Угловое ускорение	радиан на секунду в квадрате	$\text{рад}/\text{сек}^2$
Сила	ньютон	<i>н</i>
Момент силы, пары сил	ньютон-метр	<i>н · м</i>
Напряжение	ньютон на квадратный метр	$\text{н}/\text{м}^2$
Работа и энергия	джоуль	<i>дж</i>
Удельная энергия	джоуль на кубический метр	$\text{дж}/\text{м}^3$
Мощность	ватт	<i>вт</i>
Удельная сила тяжести (удельный вес)	ньютон на кубический метр	$\text{н}/\text{м}^3$

Таблица 1.3.

Некоторые единицы систем МКГСС, СГС и внесистемные  
и их перевод в единицы СИ

Наименования величин	Единицы измерения МКГСС или СГС или внесистемные	Сокращенные обозначения	Размеры единиц (перевод единиц МКГСС, СГС и внесистемных в единицы СИ)
Площадь	квадратный сантиметр	см <sup>2</sup>	1 см <sup>2</sup> = 10 <sup>-4</sup> м <sup>2</sup>
Статический момент и момент сопротивления плоского сечения	кубический сантиметр	см <sup>3</sup>	1 см <sup>3</sup> = 10 <sup>-6</sup> м <sup>3</sup>
Момент инерции плоского сечения	сантиметр в четвертой степени	см <sup>4</sup>	1 см <sup>4</sup> = 10 <sup>-8</sup> м <sup>4</sup>
Объем	кубический сантиметр	см <sup>3</sup>	1 см <sup>3</sup> = 10 <sup>-6</sup> м <sup>3</sup>
Сила	килограмм-сила	кгс, кг	1 кг = 9,80665 ≈ 9,81 н
Момент силы, пары сил	килограмм-сила-метр;	кг · м	1 кг · м = 9,80665 ≈ 9,81 н · м
	килограмм-сила-сантиметр	кг · см	1 кг · см = 0,0980665 ≈ 0,0981 н · м
Напряжение	килограмм-сила на квадратный сантиметр;	кг/см <sup>2</sup>	1 кг/см <sup>2</sup> = 98066,5 ≈ 9,81 · 10 <sup>4</sup> н/м <sup>2</sup>
	килограмм-сила на квадратный миллиметр	кг/мм <sup>2</sup>	1 кг/мм <sup>2</sup> = 980,665 · 10 <sup>4</sup> ≈ 9,81 · 10 <sup>6</sup> н/м <sup>2</sup>
Работа, энергия	килограмм-сила-метр	кг · м	1 кг · м = 9,80665 ≈ 9,81 дж
Удельная энергия	килограмм-сила на квадратный сантиметр	кг/см <sup>2</sup>	1 кг/см <sup>2</sup> = 98066,5 ≈ 9,81 · 10 <sup>4</sup> н/м <sup>2</sup>
Мощность	килограмм-сила-метр в секунду;	кг · м/сек	1 кг · м/сек = 9,80665 ≈ 9,81 вт
	лошадиная сила	л. с.	1 л. с. = 75 кг · м/сек ≈ 735,5 вт
Удельная сила тяжести (удельный вес)	килограмм-сила на кубический метр	кг/м <sup>3</sup>	1 кг/м <sup>3</sup> = 9,80665 ≈ 9,81 н/м <sup>3</sup>

Таблица 1.4

Некоторые приставки для образования кратных  
и дольных единиц (ГОСТ 7663—55)

Приставка	Числовое значение	Сокращенное обозначение (русскими буквами)	Примеры кратных единиц	
			наименование	сокращенное обозначение (русскими буквами)
Мега	10 <sup>6</sup>	М	мегаграмм	Мг
Кило	10 <sup>3</sup>	к	килоньютон	кн
Сант	10 <sup>-2</sup>	с	сантиметр	см
Милли	10 <sup>-3</sup>	м	миллиметр	мм
Микро	10 <sup>-6</sup>	мк	микрометр	мкм

Для каждой физической величины следует применять ограниченное число целесообразно выбранных кратных и дольных единиц. Приставок санти, деци, дека, гекто надо избегать (за исключением укоренившихся случаев). При выборе кратных и дольных единиц надо стремиться к тому, чтобы при переходе на Международную систему единиц сохранить привычные представления о масштабах и часто встречающихся значениях соответствующих величин.

В частности, для сосредоточенных сил целесообразно указание их величин в килоньютонах ( $кн$ ) и в виде исключения (при больших нагрузках) в меганьютонах ( $Мн$ ). В ряде случаев оказывается более удобным выражать силы в ньютонах ( $н$ ), не вводя кратных единиц.

Для интенсивности распределенной нагрузки в тех случаях, когда производная единица ньютон на метр ( $н/м$ ) мала, следует применять килоньютон на метр ( $кн/м$ ) или меганьютон на метр ( $Мн/м$ ).

Для моментов в большинстве случаев нет надобности вводить кратные единицы, наиболее удобной оказывается единица ньютон-метр ( $н \cdot м$ ). При больших внешних моментах можно применять кратную единицу килоньютон-метр ( $кн \cdot м$ ).

Для напряжений удобна внесистемная единица ньютон на квадратный миллиметр ( $н/мм^2$ ), применение которой разрешено проектом нового ГОСТа на единицы измерения. Указанная единица имеет ту же величину, что и кратная единица меганьютон на квадратный метр ( $1 Мн/м^2 = 1 н/мм^2$ ). Полезно помнить, что  $н/мм^2$  примерно в 10 раз более крупная единица, чем  $кг/см^2$ , и примерно в 10 раз более мелкая, чем  $кг/мм^2$ .

При расчетах с применением единицы  $н/мм^2$  силы в расчетные формулы должны быть подставлены в ньютонах ( $н$ ), а все линейные размеры — в миллиметрах ( $мм$ ). Таким образом, величины моментов следует подставлять в  $н \cdot мм$ , площадей — в  $мм^2$ , моментов сопротивления и статических моментов сечений — в  $мм^3$ , моментов инерции сечений — в  $мм^4$ .

ЦЕНТРАЛЬНОЕ РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ ПРЯМОГО БРУСА

§ 2.1. ВНУТРЕННИЕ УСИЛИЯ В ПОПЕРЕЧНЫХ СЕЧЕНИЯХ БРУСА

*Растяжением* или *сжатием* называется такой вид нагружения бруса, при котором в его поперечных сечениях возникают только нормальные внутренние силы, приводящиеся к равнодействующей силе, направленной вдоль оси  $z$  бруса. Эта равнодействующая называется *продольной силой* и обозначается  $N_z$  (или просто  $N$ , как принято в дальнейшем).

При растяжении продольная сила направлена по внешней нормали к сечению, а при сжатии — по внутренней.

Из условия равновесия отсеченной части бруса следует, что продольная сила в данном поперечном сечении численно равна алгебраической сумме проекций на ось  $z$  бруса всех внешних сил, действующих по одну сторону от рассматриваемого сечения.

Продольную силу, соответствующую растяжению, считают положительной, а сжатую — отрицательной.

Брус, подвергающийся деформации растяжения или сжатия, часто называют *стержнем*.<sup>1</sup>

Эпюра продольных сил представляет собой диаграмму, выражающую изменения величины продольной силы по длине бруса при заданных по величине и положению нагрузках.

**Пример 2.1.** Построить эпюру продольных сил  $N$  для бруса (рис. 2.1, а), пренебрегая влиянием его собственной массы.

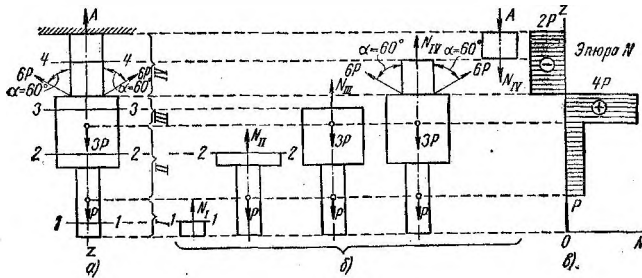


РИС. 2.1

**Решение.** Реакцию в защемлении обозначим через  $A$ . Ее величину определим из уравнения равновесия:

$$\sum Z = 0; P + 3P - 6P \cos 60^\circ \cdot 2 - A = 0; A = -2P.$$

<sup>1</sup> Во многих учебных и справочных пособиях термин «стержень» используют взамен термина «брус» при всех видах деформаций.

Реакция  $A$  получилась отрицательной, это значит, что она действует не вверх, как предполагалось, а, наоборот, вниз.

Силы, действующие на брус, разделяют его на четыре участка ( $I, II, III, IV$ ), в пределах которых продольные силы имеют постоянные значения.

Рассекая брус произвольным поперечным сечением  $1-1$  в пределах первого участка, отбрасывая верхнюю его часть и заменяя ее действие на нижнюю неизвестной продольной силой  $N_I$ , из уравнения равновесия  $\Sigma Z = 0$  получим (рис. 2.1, б)  $N_I = 0$ .

Аналогично для остальных участков:

$$\begin{aligned} -N_{II} + P &= 0; & N_{II} &= P; \\ -N_{III} + 3P + P &= 0; & N_{III} &= 4P; \\ -N_{IV} + 3P + P - 6P \cos 60^\circ \cdot 2 &= 0; & N_{IV} &= -2P. \end{aligned}$$

Продольную силу в сечении  $4-4$  четвертого участка можно получить проще, отбросив нижнюю часть бруса; тогда

$$N_{IV} + A = 0 \text{ и } N_{IV} = -A = -2P.$$

По полученным данным построена эпюра продольных сил с учетом их знаков (рис. 2.1, в).

Участок  $I$  бруса не деформируется, участки  $II$  и  $III$  испытывают деформацию растяжения, а участок  $IV$  — деформацию сжатия.

## § 2.2. НАПРЯЖЕНИЯ В ПОПЕРЕЧНЫХ СЕЧЕНИЯХ БРУСА

Для сплошного бруса постоянного поперечного сечения при центральном растяжении или сжатии нормальные напряжения в произвольном поперечном сечении, достаточно удаленном от места приложения нагрузки,<sup>1</sup> распределены по сечению равномерно (рис. 2.2), и их величина определяется по формуле



РИС. 2.2

$$\sigma_z = \frac{N}{F}, \quad (2.1)$$

где  $\sigma_z$  — нормальное напряжение в любой точке исследуемого поперечного сечения (в дальнейшем в большинстве случаев индекс  $z$  опускаем);

$N$  — продольная сила в исследуемом сечении;

$F$  — площадь рассматриваемого поперечного сечения бруса.

При растяжении нормальные напряжения считают положительными, а при сжатии — отрицательными.

<sup>1</sup> В сечениях, расположенных близко к месту приложения нагрузки, нормальные напряжения распределены неравномерно по весьма сложному закону. Как показывают теоретические исследования и опыт, неравномерность распределения напряжений быстро затухает по мере удаления от места приложения нагрузки, и уже на расстоянии, равном наибольшему размеру поперечного сечения от места нагрузки, отклонение от равномерного распределения не превышает 3%, и формула (2.1) вполне применима. Подробнее о местных напряжениях см. в гл. 13.

Касательные напряжения в поперечных сечениях отсутствуют.

Если брус ослаблен отверстием, выточкой и т. п., то в этом случае *средние* нормальные напряжения по ослабленному поперечному сечению определяют по формуле

$$\sigma = \frac{N}{F_{\text{нетто}}}. \quad (2.2)$$

Здесь  $F_{\text{нетто}}$  — фактическая площадь поперечного сечения в месте ослабления.

Очевидно,

$$F_{\text{нетто}} = F_{\text{брутто}} - F_{\text{ослабл}},$$

где  $F_{\text{брутто}}$  — площадь поперечного сечения бруса без учета ослабления.

### § 2.3. ДЕФОРМАЦИИ И ПЕРЕМЕЩЕНИЯ

На рис. 2.3 показан участок бруса длиной  $l$  постоянного поперечного сечения, подвергающийся деформации растяжения. Размеры участка после деформации показаны штриховыми линиями.

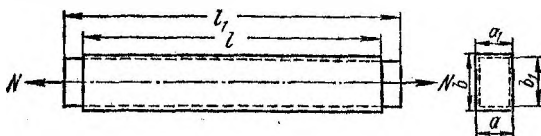


РИС. 2.3

Продольная деформация. Закон Гука

Абсолютное удлинение или укорочение участка бруса

$$\Delta l = l_1 - l.$$

Относительное удлинение или укорочение участка бруса

$$\epsilon = \frac{\Delta l}{l}. \quad (2.3)$$

Эту величину называют также *относительной продольной деформацией* или просто *линейной деформацией*.

В известных пределах нагружения между нормальным напряжением  $\sigma$  и относительной продольной деформацией  $\epsilon$  при растяжении (сжатии) существует линейная зависимость, называемая *законом Гука*:

$$\sigma = E\epsilon, \quad (2.4)$$

где  $E$  — модуль продольной упругости.

Модуль продольной упругости характеризует жесткость материала при деформации растяжения (сжатия).

Размерность  $E$  и  $\sigma$  одинакова.

Значения  $E$ ,  $G$  и  $\mu$  для некоторых материалов (при комнатной температуре)

Наименование материалов	Модуль продольной упругости $E$		Модуль сдвига $G$		Коэффициент Пуассона $\mu$
	$кг/см^2$	$Мн/м^2$	$кг/см^2$	$Мн/м^2$	
Сталь	$(1,9 \div 2,2) \cdot 10^8$	$(1,87 \div 2,16) \cdot 10^8$	$(7,95 \div 8,5) \cdot 10^8$	$(7,80 \div 8,34) \cdot 10^8$	$0,25 \div 0,33$
Чугун серый (СЧ12-28, СЧ15-32 и др.)	$(0,8 \div 1,5) \cdot 10^8$	$(0,785 \div 1,47) \cdot 10^8$	$4,5 \cdot 10^8$	$4,42 \cdot 10^8$	$0,23 \div 2,7$
Чугун серый модифицированный (СЧ-28-48, СЧ32-52, СЧ35-56, СЧ38-60)	$(1,2 \div 1,6) \cdot 10^8$	$(1,18 \div 1,57) \cdot 10^8$	$(5,2 \div 7,0) \cdot 10^8$	$(5,1 \div 6,88) \cdot 10^8$	—
Медь техническая	$(1,1 \div 1,3) \cdot 10^8$	$(1,08 \div 1,28) \cdot 10^8$	$4,9 \cdot 10^8$	$4,81 \cdot 10^8$	—
Бронза оловянная (Бр.ОЦС6-6-3, Бр.ОФ10-1 и др.)	$(0,75 \div 1,24) \cdot 10^8$	$(0,736 \div 1,22) \cdot 10^8$	—	—	$0,32 \div 0,35$
Бронза безоловянная (Бр.АЖ9-4Л, Бр.АЖН10-4-4Л)	$(1,05 \div 1,2) \cdot 10^8$	$(1,03 \div 1,18) \cdot 10^8$	—	—	[—
Латунь алюминиевая (ЛАН59-3-2, ЛАЖ60-1-1)	$(1,0 \div 1,05) \cdot 10^8$	$(0,98 \div 1,03) \cdot 10^8$	$(3,7 \div 4,0) \cdot 10^8$	$(3,63 \div 3,92) \cdot 10^8$	$0,32 \div 0,34$
Алюминиевые сплавы	$(0,7 \div 0,72) \cdot 10^8$	$(0,687 \div 0,706) \cdot 10^8$	$2,7 \cdot 10^8$	$2,65 \cdot 10^8$	$0,33$
Магниеые сплавы (МА1, МА2 и др.)	$(0,40 \div 0,45) \cdot 10^8$	$(0,392 \div 0,442) \cdot 10^8$	—	—	$0,34$
Никель технический	$2,1 \cdot 10^8$	$2,06 \cdot 10^8$	$7,5 \cdot 10^8$	$7,46 \cdot 10^8$	$0,33$
Свинец технический	$(0,15 \div 0,2) \cdot 10^8$	$0,147 \div 0,196) \cdot 10^8$	$0,7 \cdot 10^8$	$0,69 \cdot 10^8$	$0,42$
Цинк технический	$0,8 \cdot 10^8$	$0,78 \cdot 10^8$	$3,2 \cdot 10^8$	$3,14 \cdot 10^8$	$0,27$
Кладка из кирпича	$(0,025 \div 0,030) \cdot 10^8$	$(2,45 \div 2,94) \cdot 10^8$	—	—	—
Бетон при пределе прочнос- ти 100 — 200 $кг/см^2$	$(0,15 \div 0,23) \cdot 10^8$	$(0,147 \div 0,226) \cdot 10^8$	—	—	$0,16 \div 0,18$
Железобетон обычный, сжа- тые элементы	$(0,18 \div 0,43) \cdot 10^8$	$(0,177 \div 0,422) \cdot 10^8$	—	—	—
Железобетон обычный, из- гибаемые элементы	$(0,11 \div 0,27) \cdot 10^8$	$(0,108 \div 0,265) \cdot 10^8$	—	—	—
Древесина всех пород вдоль волокон	$(9 \div 16) \cdot 10^4$	$(8,83 \div 15,7) \cdot 10^8$	} $(4,5 \div 6,5) \cdot 10^8$	} $(4,41 \div 6,38) \cdot 10^8$	—
Древесина всех пород попе- рек волокон	$(0,4 \div 1,0) \cdot 10^4$	$(0,39 \div 0,98) \cdot 10^8$			—
Фанера авиационная 1-го сор- та вдоль волокон	$13 \cdot 10^4$	$1,8 \cdot 10^8$	—	—	—
Фанера авиационная 1-го сор- та поперек волокон	$6,5 \cdot 10^4$	$6,38 \cdot 10^8$	—	—	—
Фанера авиационная 1-го сор- та под углом $45^\circ$ к направле- нию волокон	$3,0 \cdot 10^4$	$2,94 \cdot 10^8$	$45 \cdot 10^8$	$44,1 \cdot 10^8$	—
Текстолит (ПТ, ПТК, ПТ-1)	$(6 \div 10^4) \cdot 10^4$	$(5,88 \div 9,81) \cdot 10^8$	—	—	—
Гетинакс	$(10 \div 18) \cdot 10^4$	$(9,81 \div 17,7) \cdot 10^8$	—	—	—
Винипласт листовой	$0,4 \cdot 10^4$	$0,392 \cdot 10^8$	—	—	—
Стекло	$(50 \div 60) \cdot 10^4$	$(49,1 \div 58,9) \cdot 10^8$	$(21 \div 23) \cdot 10^8$	$(20,6 \div 22,6) \cdot 10^8$	$0,24 \div 0,27$
Органическое стекло	$(2,9 \div 4,1) \cdot 10^4$	$(2,84 \div 4,02) \cdot 10^8$	—	—	$0,35 \div 0,38$
Бакелит без наполнителей	$(2 \div 6) \cdot 10^4$	$(1,96 \div 5,89) \cdot 10^8$	$(7 \div 21) \cdot 10^8$	$(6,87 \div 20,6) \cdot 10^8$	$0,35 \div 0,38$
Целлулоид	$(1,5 \div 2,5) \cdot 10^4$	$(1,47 \div 2,45) \cdot 10^8$	$(7 \div 10) \cdot 10^8$	$(6,87 \div 9,81) \cdot 10^8$	$0,4$
Каучук	$0,008 \cdot 10^4$	$0,00785 \cdot 10^8$	—	—	$0,47$
Стеклопласт (СВАМ 1:1) вдоль волокон	$35 \cdot 10^4$	$34,3 \cdot 10^8$	—	—	—
Капрон	$(1,4 \div 2,0) \cdot 10^4$	$(1,37 \div 1,96) \cdot 10^8$	—	—	—
Фторопласт-4	$(0,47 \div 0,85) \cdot 10^4$	$(0,461 \div 0,834) \cdot 10^8$	—	—	—

Для каждого материала величину  $E$  определяют экспериментально; соответствующие значения приведены в табл. 2.1.

С учетом зависимостей (2.1) и (2.3) получают формулу для определения изменения длины участка бруса

$$\Delta l = \frac{Nl}{EF}. \quad (2.5)$$

Произведение  $EF$  называется *жесткостью сечения* при растяжении (сжатии).

Для брусев с несколькими участками, в пределах которых  $E$ ,  $N$  и  $F$  имеют постоянные значения, полное удлинение (укорочение) бруса определяют алгебраическим суммированием удлинений (укорочений) всех его участков:

$$\Delta l = \sum \frac{Nl}{EF}. \quad (2.6)$$

Если величины  $N$  и  $F$  (или одна из них) переменны по длине участка бруса, то полное абсолютное удлинение определяется по формуле

$$\Delta l = \sum \frac{1}{E} \int \frac{N}{E} dz. \quad (2.7)$$

При пользовании формулой (2.7) интегрирование производят в пределах каждого участка, а суммирование — по всем участкам бруса.

Вследствие изменения длины отдельных участков нагруженного бруса его поперечные сечения получают линейные перемещения вдоль оси  $z$ .

Понятия деформации и перемещения нельзя отождествлять, так как перемещающаяся часть бруса может быть недеформированной. Так, например, участок  $I$  бруса, рассмотренного в примере 2.1 (см. рис. 2.1), не деформируется, но перемещается по вертикали вследствие деформации остальных участков. Перемещение любого поперечного сечения  $I-I$  этого участка численно равно полному удлинению бруса.

Взаимное перемещение двух поперечных сечений численно равно изменению длины участка бруса, заключенного между этими сечениями.

#### Поперечная деформация. Коэффициент Пуассона

Изменение поперечного размера (см. рис. 2.3)

$$\Delta a = a_1 - a.$$

Относительная поперечная деформация

$$\epsilon' = \frac{\Delta a}{a} = \frac{\Delta b}{b}. \quad (2.8)$$

При растяжении  $\epsilon > 0$ ,  $\epsilon' < 0$ ; при сжатии  $\epsilon < 0$ ,  $\epsilon' > 0$ .

В границах применимости закона Гука существует зависимость

$$\epsilon' = -\mu\epsilon, \quad (2.9)$$



т. е. относительная поперечная деформация пропорциональна относительной продольной деформации и обратна ей по знаку. Здесь  $\mu$  — коэффициент Пуассона:

$$\mu = \left| \frac{\epsilon'}{\epsilon} \right|.$$

Коэффициент Пуассона размерности не имеет, и его величина (см. табл. 2.1) для изотропных материалов колеблется в пределах  $0 \leq \mu \leq 0,5$ .

**Объемная деформация**

Изменение объема бруса при растяжении или сжатии определяется по формуле

$$\Delta V = F\epsilon(1 - 2\mu),$$

где  $V = Fl$  — первоначальный объем бруса до деформации.

Относительное изменение объема

$$\epsilon_V = \frac{\Delta V}{V} = \epsilon(1 - 2\mu). \tag{2.10}$$

**Пример 2.2.** Для заданного бруса (рис. 2.4, а) построить эпюры продольных сил, нормальных напряжений и перемещений поперечных сечений.

**Решение.** Величина опорной реакции  $A$  в защемлении определяется из уравнения равновесия:

$$\Sigma Z = 0; \quad A - 3P - 2,4P + 2,4P = 0; \quad A = 3P.$$

Реакция  $A$  получилась положительной, следовательно, ее направление было выбрано правильно.

Рассматриваемый брус состоит из 4 участков, границами которых являются сечения, где приложены внешние силы, и места изменения размеров поперечного сечения.

Проводя произвольные поперечные сечения в пределах каждого участка бруса и рассматривая левую часть его, определяем величины продольных сил:

$$N_I = N_{II} = -A = -3P;$$

$$N_{III} = -3P + 3P = 0;$$

$$N_{IV} = 2,4P.$$

По полученным данным на рис. 2.4, б построена эпюра  $N$ .

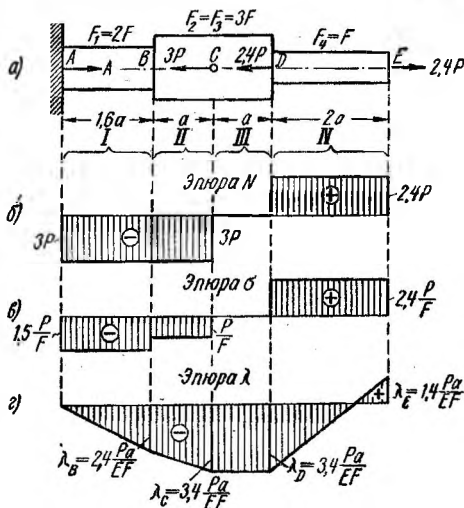


РИС. 2.4

Нормальные напряжения в поперечных сечениях каждого из участков находим по формуле (2.1):

$$\begin{aligned}\sigma_I &= \frac{N_I}{F_1} = -\frac{3P}{2F} = -1,5 \frac{P}{F}; \\ \sigma_{II} &= \frac{N_{II}}{F_2} = -\frac{3P}{3F} = -\frac{P}{F}; \\ \sigma_{III} &= 0; \quad \sigma_{IV} = \frac{N_{IV}}{F_4} = \frac{2,4P}{F}.\end{aligned}$$

Эпюра нормальных напряжений показана на рис. 2.4, в.

Эпюрой перемещений  $\lambda$  называется график, показывающий зависимость величин перемещений поперечных сечений бруса от абсцисс этих сечений (их расстояний от сечения, принятого за начало отсчета). Для построения эпюры  $\lambda$  определяем перемещения характерных сечений, начиная с зашпемленного сечения, для которого  $\lambda_A = 0$ .

Перемещение сечения  $B$  равно укорочению  $I$  участка бруса и определяется по формуле (2.5):

$$\lambda_B = \Delta l_I = \frac{N_I \cdot 1,6a}{EF_1} = -\frac{3P \cdot 1,6a}{E2F} = -\frac{2,4Pa}{EF}.$$

Знак минус показывает, что сечение  $B$  перемещается влево. Аналогично находим

$$\lambda_C = \Delta l_I = \Delta l_{II} = -\frac{2,4Pa}{EF} - \frac{3Pa}{3EF} = -\frac{3,4Pa}{EF}.$$

$III$  участок бруса не деформируется, следовательно,

$$\lambda_D = \lambda_C = -\frac{3,4Pa}{EF}.$$

Перемещение сечения  $E$  равно алгебраической сумме изменений длин всех участков, взятых с их знаками:

$$\lambda_E = \Delta l_I + \Delta l_{II} + \Delta l_{III} + \Delta l_{IV} = -\frac{3,4Pa}{EF} + \frac{2,4P \cdot 2a}{EF} = \frac{1,4Pa}{EF}.$$

Изменение длины бруса равно перемещению его свободного конца:

$$\Delta l = \lambda_E = \frac{1,4Pa}{EF}.$$

При действии на брус только сосредоточенных сил эпюра  $\lambda$  в пределах каждого участка линейна (рис. 2.4, г).

По эпюре  $\lambda$  можно определить взаимное перемещение двух сечений. Так, например, взаимное перемещение сечений  $E$  и  $D$

$$\lambda_{E, D} = \lambda_E - \lambda_D = \frac{1,4Pa}{EF} - \left(-\frac{3,4Pa}{EF}\right) = \frac{4,8Pa}{EF}.$$

**Пример 2.3.** Найти удлинение стальной полосы переменной ширины (рис. 2.5) при растяжении ее силой  $P = 30$  кн. Принять  $E = 2,0 \cdot 10^5$  Мн/м<sup>2</sup>.

Решение. Ширина полосы на расстоянии  $z$  от ее левого конца определяется из соотношения

$$\frac{b_z - b_1}{b_2 - b_1} = \frac{z}{l},$$

откуда

$$b_z = \frac{b_2 - b_1}{l} z + b_1$$

и

$$F_z = b_z \delta = \left( \frac{b_2 - b_1}{l} z + b_1 \right) \delta.$$

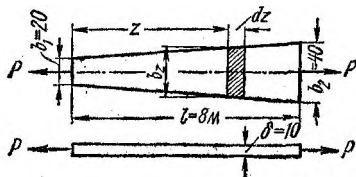


РИС. 2.5

$N = P = \text{const}$ , а  $F_z = f(z)$  — величина переменная.

Удлинение полосы определяем по формуле (2.7):

$$\begin{aligned} \Delta l &= \frac{N}{E} \int_0^l \frac{dz}{F_z} = \frac{P}{E\delta} \int_0^l \frac{dz}{\left( \frac{b_2 - b_1}{l} \right) z + b_1} = \\ &= \frac{Pl}{E\delta(b_2 - b_1)} \left| \ln \left( \frac{b_2 - b_1}{l} z + b_1 \right) \right|_0^l = \frac{Pl}{E\delta(b_2 - b_1)} \ln \frac{b_2}{b_1}. \end{aligned}$$

Подставляя числовые данные, получаем

$$\Delta l = \frac{30 \cdot 10^3 \cdot 8 \cdot 0,693}{2 \cdot 10^{11} \cdot 10 \cdot 10^{-3} (40 - 20) \cdot 10^{-3}} = 0,42 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 4,2 \text{ мм}.$$

**Пример 2.4.** Для шарнирно-стержневой системы (рис. 2.6, а) определить вертикальную и горизонтальную составляющие перемещения узла А.

Решение. Вырезаем узел А (рис. 2.6, б) и, составляя для него два уравнения равновесия, определяем продольные силы  $N_1$  и  $N_2$ , возникающие в стержнях:

$$\sum m_C = 0; \quad N_1 l_2 \sin(\alpha_1 + \alpha_2) - P l_2 \sin \alpha_2 = 0,$$

откуда

$$N_1 = P \frac{\sin \alpha_2}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)}. \quad (I)$$

$$\sum m_B = 0; \quad -N_2 l_1 \sin(\alpha_1 + \alpha_2) + P l_1 \sin \alpha_1 = 0,$$

откуда

$$N_2 = P \frac{\sin \alpha_1}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)}. \quad (II)$$

Абсолютные удлинения стержней:

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{E_1 F_1}; \quad \Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{E_2 F_2}. \quad (III)$$

Для определения перемещения узла  $A$  строим диаграмму перемещений (рис. 2.6,  $a$  и  $b$ ). Для этого мысленно разводим стержни  $1$  и  $2$  в узле  $A$  и по направлениям их осей в произвольном масштабе откладываем удлинения  $\Delta l_1$  и  $\Delta l_2$  с учетом их знаков. Из неподвижных точек  $B$  и  $C$  радиусами  $BA_1$  и  $CA_2$  следовало бы провести дуги, точка пересечения которых ( $A_3'$ ) определяет новое положение узла. (Точка  $A_3'$  и построение на рисунке не даны.)

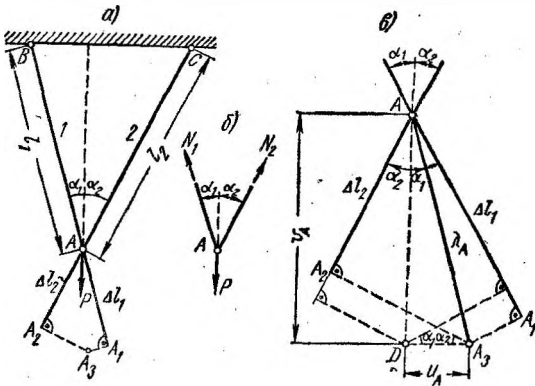


РИС. 2.6

Так как упругие деформации стержней весьма малы по сравнению с их первоначальными длинами, то дуги могут быть заменены прямыми, и новое положение узла  $A$  определяется с достаточной точностью точкой  $A_3$  пересечения перпендикуляров, восстановленных к осям стержней в точках  $A_1$  и  $A_2$ .

Отрезок  $AA_3$  дает полное перемещение узла  $A$  (рис. 2.6,  $b$ ), а отрезки  $AD$  и  $DA_3$  — вертикальную ( $v_A$ ) и горизонтальную ( $u_A$ ) составляющие полного перемещения ( $\lambda_A$ ).

Проектируя ломаную  $ADA_3$  на направления стержней, получим зависимости между удлинениями стержней и составляющими перемещениями  $v_A$  и  $u_A$ :

$$\Delta l_1 = v_A \cos \alpha_1 + u_A \sin \alpha_1;$$

$$\Delta l_2 = v_A \cos \alpha_2 - u_A \sin \alpha_2.$$

Решив полученную систему уравнений, найдем:

$$v_A = \frac{\Delta l_1 \sin \alpha_2 + \Delta l_2 \sin \alpha_1}{\sin (\alpha_1 + \alpha_2)}; \quad (IV)$$

$$u_A = \frac{\Delta l_1 \cos \alpha_2 - \Delta l_2 \cos \alpha_1}{\sin (\alpha_1 + \alpha_2)}. \quad (V)$$

Полное перемещение

$$\lambda_A = \sqrt{v_A^2 + u_A^2}.$$

В частном случае, когда  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ ;  $F_1 = F_2 = F$ ;  $l_1 = l_2 = l$  и  $E_1 = E_2 = E$ , как следует из формул (I) — (V):

$$\begin{aligned} N_1 = N_2 &= P \frac{\sin \alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{P}{2 \cos \alpha}; \\ \Delta l_1 &= \Delta l_2 = \Delta l; \\ v_A &= \frac{2\Delta l \sin \alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{\Delta l}{\cos \alpha}; \quad u_A = 0. \end{aligned}$$

Если диаграмма перемещений построена отдельно в крупном масштабе, то по ней легко с достаточной точностью определить полное перемещение узла и составляющие этого перемещения графическим способом.

#### § 2.4. ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ УПРУГОЙ ДЕФОРМАЦИИ

*Потенциальной энергией упругой деформации* называется энергия, накопленная в теле вследствие упругих деформаций, вызванных действием внешних сил.

Потенциальная энергия при статическом осевом растяжении или сжатии бруса численно равна работе внешних сил и определяется по формуле

$$U = \sum \int \frac{N^2 dz}{2EF}. \quad (2.11)$$

В формуле (2.11) интегрирование производится в пределах каждого участка, а суммирование — по всем участкам.

Если по длине  $l$  стержня величины  $N$ ,  $F$  и  $E$  постоянны, то для этого стержня

$$U = \frac{N^2 l}{2EF} \quad (2.12)$$

или

$$U = \frac{\Delta l^2 EF}{2l}.$$

*Удельной потенциальной энергией деформации ( $u$ )* называется величина потенциальной энергии деформации, отнесенная к единице объема бруса.

Объем бруса постоянного сечения

$$V = Fl$$

и

$$u = \frac{\sigma^2}{2E} = \frac{E\varepsilon^2}{2} = \frac{\sigma\varepsilon}{2}. \quad (2.13)$$

Размерность  $U$  —  $\text{кг} \cdot \text{см}$  (или  $\text{н} \cdot \text{м}$ ), а  $u$  —  $\text{кг} \cdot \text{см}/\text{см}^3$  (или  $\text{н} \cdot \text{м}/\text{м}^3$ ).

### § 2.5. ОСНОВНЫЕ МЕХАНИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ МАТЕРИАЛОВ ПРИ СТАТИЧЕСКИХ НАГРУЗКАХ

#### Диаграмма растяжения

При проектировании и расчете элементов инженерных сооружений необходимо знание механических свойств применяемых материалов.

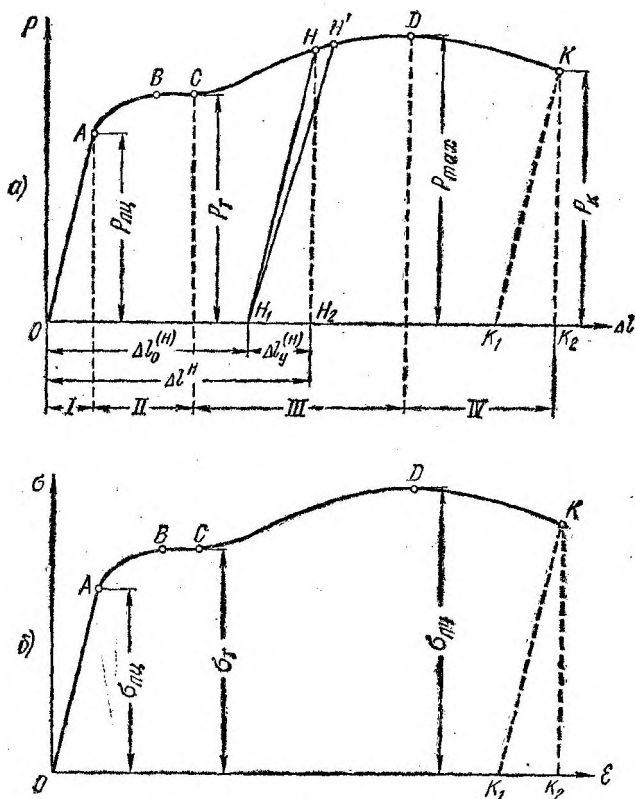


РИС. 2.7

Механические свойства материалов определяют опытным путем на стандартных образцах из исследуемых материалов, которые испытывают на специальных машинах.

Основным видом механических испытаний материалов являются статические испытания на растяжение и сжатие.

Современные испытательные машины имеют специальный диаграммный аппарат, при помощи которого в течение всего процесса

испытания автоматически вычерчивается кривая зависимости между нагрузкой ( $P$ ), действующей на образец, и его абсолютным удлинением ( $\Delta l$ ). Эта кривая называется *диаграммой растяжения (сжатия) образца* (или *характеристикой образца*).

На рис. 2.7, а показана типичная диаграмма растяжения образца из малоуглеродистой стали. Она характеризует поведение данного конкретного образца с его определенными размерами. Для того чтобы получить механические характеристики исследуемого материала, необходимо исключить влияние абсолютных размеров образца. С этой целью диаграмму перестраивают в координатах

$$\sigma = \frac{N}{F_0} = \frac{P}{F_0} \quad \text{и} \quad \varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0},$$

где  $F_0$  и  $l_0$  — соответственно начальная площадь поперечного сечения и начальная расчетная длина образца (рис. 2.7, б).

Характер диаграммы после такой перестройки сохраняется, изменяется лишь ее масштаб. Эта диаграмма называется *диаграммой растяжения материала* или *диаграммой напряжений*;<sup>1</sup> ее ординаты дают величины механических характеристик исследуемого материала.

#### Характеристики прочности

1. *Предел пропорциональности*  $\sigma_{\text{пц}} = \frac{P_{\text{пц}}}{F_0}$  — наибольшее напря-

жение растяжения, при котором еще справедлив закон Гука. Здесь  $P_{\text{пц}}$  — нагрузка, определяемая по отклонению диаграммы растяжения образца (см. рис. 2.7, а) от первоначального прямолинейного участка.

2. *Предел текучести (физический)*  $\sigma_T = \frac{P_T}{F_0}$  — напряжение, при котором образец пластически деформируется без заметного увеличения нагрузки.

3. *Предел текучести (условный)*  $\sigma_{0,2} = \frac{P_{0,2}}{F_0}$  — напряжение, при котором остаточная деформация образца достигает 0,2%. В справочных таблицах (в частности, в приведенных здесь) условный и физический пределы текучести обозначены одинаково через  $\sigma_T$ .

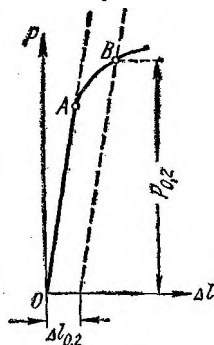


РИС. 2.8

Условный предел текучести определяют в том случае, если диаграмма растяжения для исследуемого пластичного материала не имеет площадки текучести.

На рис. 2.8 показано определение величины  $P_{0,2}$  по диаграмме растяжения.

<sup>1</sup> Ее называют также *условной характеристикой материала*.

4. *Предел прочности (или временное сопротивление)*  $\sigma_{пч} = \frac{P_{\max}}{F_0}$  —

условное напряжение, соответствующее наибольшей нагрузке  $P_{\max}$ , предшествующей разрушению образца.

5. *Истинное сопротивление разрыву*  $S_k = \frac{P_k}{F_k}$  — напряжение,

определяемое отношением нагрузки  $P_k$  в момент разрыва к площади поперечного сечения образца в месте разрыва. Для пластичных материалов  $S_k$  значительно больше  $\sigma_{пч}$ .

Напряжения  $\sigma_{пч}$ ,  $\sigma_T$  и  $\sigma_{пч}$  являются условными, так как они определяются по отношению к первоначальной площади поперечного сечения образца без учета уменьшения этой площади в процессе роста нагрузки.

Величины условных напряжений  $\sigma_{пч}$  и  $\sigma_T$  практически не отличаются от истинных напряжений, отнесенных к фактической площади сечения.

Если процесс испытания приостановить где-либо при нагрузке  $P > P_{пч}$ , например в состоянии, определяемом на диаграмме точкой  $H$  (см. рис. 2.7, а), то при полном разгрузке образца линия разгрузки пойдет по прямой  $HN_1$ , практически параллельной линии  $OA$ , характеризующей нагружение образца в пределах справедливости закона Гука. При этом  $ON_1$  — остаточное,  $H_1H_2$  — упругое и  $OH_2$  — полное удлинение образца при нагрузке, соответствующей точке  $H$  диаграммы:

$$\Delta l^{(H)} = \Delta l_0^{(H)} + \Delta l_y^{(H)}.$$

При повторном нагружении образца диаграмма растяжения сначала пойдет по прямой линии  $H_1H'$ , почти совпадающей с линией разгрузки  $HN_1$ , а затем — по кривой  $H'DK$ .

Явление повышения нагрузки, соответствующей пределу пропорциональности, с одновременным уменьшением пластичности при повторных нагружениях за пределом пропорциональности называется *наклепом*.

Диаграмма растяжения имеет две важные области деформирования. Первая — упругая область, она охватывает участок диаграммы  $I$ , вторая — упруго-пластичная область, охватывающая все остальные участки диаграммы —  $II$ ,  $III$  и  $IV$ , где полное удлинение складывается из упругого и остаточного удлинений.

#### Характеристики пластичности

##### 1. Относительное остаточное удлинение после разрыва

$$\delta_n = \frac{\Delta l_0}{l_0} \cdot 100\% = \frac{l_k - l_0}{l_0} \cdot 100\%,$$

где  $l_0$  и  $l_k$  — соответственно длина исследуемой части образца первоначальная и после разрыва.



Индекс при  $\delta$ , равный отношению  $\frac{l_0}{a_0}$ , называется *кратностью образца*. Для стандартных образцов  $\frac{l_0}{a_0}$  равно 5 или 10. Для всех материалов  $\delta_5 > \delta_{10}$ .

## 2. Относительное остаточное сужение после разрыва

$$\psi = \frac{\Delta F}{F_0} \cdot 100\% = \frac{F_0 - F_K}{F_0} \cdot 100\%,$$

где  $F_0 = \frac{\pi d_0^2}{4}$  — начальная площадь поперечного сечения образца;  
 $F_K$  — площадь поперечного сечения образца в месте разрыва (в шейке).

## Характеристика статической вязкости

*Вязкостью* материала называется его способность, не разрушаясь, поглощать механическую энергию деформации.

Статическая вязкость материала характеризуется удельной работой деформации при разрыве:

$$a = \frac{A}{V_0} = \frac{A}{F_0 l_0},$$

где  $A$  — полная работа деформации, затраченная на разрушение образца.

$V_0$  — первоначальный объем расчетной части образца.

Полная работа  $A$ , затраченная на разрушение образца, численно равна площади  $OABCDK_2O$  (рис. 2.7, а) диаграммы растяжения образца, а удельная работа — площади  $OABCDK_2O$  (рис. 2.7, б) диаграммы растяжения материала.

Величина удельной работы  $a$  является важной механической характеристикой энергоемкости материала, и ее необходимо учитывать, оценивая прочность материала при динамической нагрузке, так как, чем меньше вязкость материала, тем он слабее сопротивляется динамическим нагрузкам.

На рис. 2.9 для сравнения показаны диаграммы растяжения различных материалов: серого чугуна и сталей марок Ст. 3 и Ст. 6. Чугун разрушается без образования шейки при весьма малых остаточных относительных удлинениях (порядка  $0,02 \pm 0,5\%$ ).

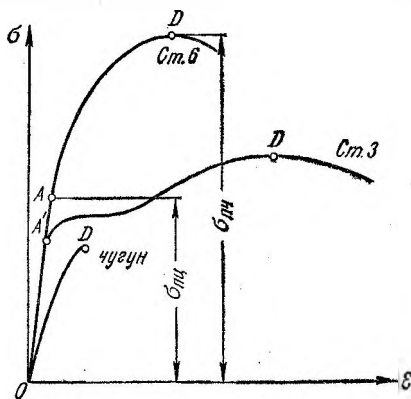


РИС. 2.9

Уже в начале испытания диаграмма растяжения чугуна значительно отклоняется от прямой линии, т. е. деформации чугуна не следуют закону Гука.

Механические характеристики сталей зависят от их химического состава и термообработки. Как следует из рис. 2.9, сталь Ст. 6 по сравнению со сталью Ст. 3 имеет значительно большую прочность и меньшую пластичность. Относительная остаточная деформация для нее при разрыве  $\delta \approx (11 + 13)\%$ , и шейка при разрыве выражена не так ярко, как у стали Ст. 3.

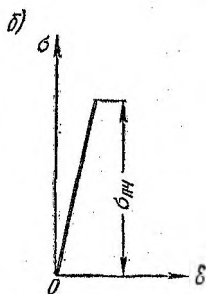
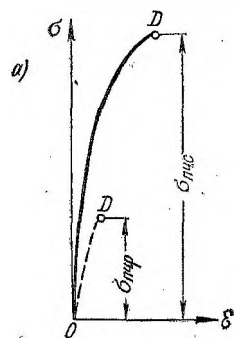


РИС. 2.10

Площадки текучести у среднеуглеродистых и легированных сталей или имеют очень незначительную протяженность, или совсем отсутствуют.

Материалы, встречающиеся в инженерной практике, обычно делят условно на две группы: пластичные и хрупкие. Первые разрушаются при значительных, а вторые — при весьма малых остаточных деформациях.

К пластичным материалам относятся малоуглеродистая сталь, цветные металлы и др., а к хрупким — чугун, кирпич, стекло, бетон и др.<sup>1</sup>

Свойства пластичности и хрупкости определяются не только природой материала, они в значительной степени зависят от ряда факторов, как-то: температуры, скорости деформирования, формы образца, характера нагружения и др. Поэтому более правильно говорить о пластичном или хрупком состоянии материала, так как один и тот же материал в различных условиях может проявлять или пластичные, или хрупкие свойства. Так, например, в условиях всестороннего сжатия камень ведет себя, как пластичный материал.

Наряду с испытанием на растяжение большое распространение имеет испытание материалов на сжатие, которое применяется главным образом для хрупких материалов.

На рис. 2.10, а и б показаны диаграммы сжатия чугуна и бетона. Разрушение хрупких материалов при сжатии, так же как и при растяжении, происходит при незначительных остаточных деформациях.

Для сопоставления на рис. 2.10, а штриховой линией показана диаграмма растяжения чугуна.

Для сопоставления на рис. 2.10, а штриховой линией показана диаграмма растяжения чугуна.

Для сопоставления на рис. 2.10, а штриховой линией показана диаграмма растяжения чугуна.

<sup>1</sup> Существует также более подробная классификация, согласно которой материалы подразделяют на:

- а) весьма пластичные (чистый свинец, отоженная медь и др.);
- б) пластичные (малоуглеродистая и среднеуглеродистая стали и др.);
- в) хрупко-пластичные (пружинная сталь, ковкий чугун и др.);
- г) хрупкие (серый литейный чугун);
- д) весьма хрупкие (инструментальная сильно закаленная сталь и др.).

Для чугуна, как и для других хрупких материалов, основной характеристикой прочности материала при растяжении и сжатии является предел прочности  $\sigma_{пч}$ .

Хрупкие материалы значительно лучше сопротивляются деформации сжатия, чем деформации растяжения, — для них всегда

$$\sigma_{пч.с} > \sigma_{пч.р}$$

Так, например, для серого чугуна

$$\sigma_{пч.с} \approx (3 \div 5) \sigma_{пч.р}$$

Механические характеристики большинства пластичных материалов при растяжении и сжатии примерно одинаковы, и они, как правило, определяются путем испытания на растяжение.

#### Понятие о твердости

Под твердостью понимают свойство материала оказывать при местных контактных воздействиях сопротивление пластической деформации или хрупкому разрушению в поверхностном слое при определенных условиях испытания.

Испытания на твердость получили широкое применение в технике благодаря своей простоте, дешевизне, малой трудоемкости и возможности проведения их непосредственно на детали без ее разрушения. Особенно важно определение твердости для деталей, работающих в качестве режущего инструмента или находящихся в условиях контактных нагрузок (шестерни, кольца шарикоподшипника и т. д.).

Из большого числа существующих способов испытания на твердость наиболее распространен в технике способ определения твердости по Бринеллю (ГОСТ 9012—59).

Измерение твердости по Бринеллю производится вдавливанием на специальном прессе стального закаленного шарика определенного диаметра  $D$  в испытуемый образец (рис. 2.11) при определенных условиях, регламентируемых ГОСТ 9012—59.

Число твердости по Бринеллю (НВ), или шариковая твердость, определяется отношением нагрузки  $P$  к площади поверхности остаточного сферического отпечатка:

$$HВ = \frac{P}{F} = \frac{2P}{\pi D (D - \sqrt{D^2 - d^2})}$$

где  $P$  — нагрузка, кг:  $P = 30D^2$ ;

$D$  — диаметр шарика, мм:  $D = 10$  мм (5 мм; 2,5 мм);

$d$  — диаметр отпечатка, мм.

Практически число твердости по Бринеллю в зависимости от  $D$ ,  $d$  и  $P$  значительно быстрее и легче определяют по специальным таблицам, прилагаемым к ГОСТ 9012—59.

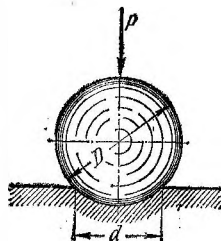


РИС. 2.11

При измерении твердости шариком диаметром ( $D$ ) 10,0 мм под нагрузкой ( $P$ ) 3000 кг с выдержкой ( $t$ ) 10 сек число твердости по Бринеллю сопровождается символом НВ, например НВ 420.

При других условиях измерения обозначение НВ дополняется индексом, указывающим условия измерения в следующем порядке: диаметр шарика, нагрузка и продолжительность испытания.

Например, НВ 5 (250) 30—245 означает: число твердости по Бринеллю (245) при испытании шариком диаметром 5,0 мм под нагрузкой 250 кг, приложенной в течение 30 сек.

Многочисленными экспериментами установлено, что для некоторых материалов предел прочности (временное сопротивление) при растяжении приблизительно пропорционален твердости по Бринеллю:

$$\sigma_{\text{пч}} \approx k\text{НВ},$$

где  $k$  — коэффициент, зависящий от испытываемого материала.

Значения коэффициента  $k$  для металлов приведены в табл. 2.2.

Основные механические свойства углеродистых и легированных сталей, чугунов и некоторых типов пластмасс даны в табл. 2.3—2.8

Таблица 2.2

Значения коэффициента  $k$  для сталей некоторых цветных металлов и сплавов

Материал	Твердость по Бринеллю	$k$
Стали:		
термически обработанные легированные	250 ÷ 400	0,33
термически обработанные углеродистые и легированные	250	0,34
среднеуглеродистые в прокатном, нормализованном и отожженном состоянии	120 ÷ 180	0,35
мягкие после прокатки, нормализации и обжига	120	0,36
Медь	—	0,48
Никель Нт	—	0,47
Латуни:		
Л90	—	0,49
Л62	—	0,62
ЛС59-1	—	0,56
Бронзы:		
Бр. 62	—	0,45
Бр. ОФ6,5-0,4	—	0,37
Бр. А5	—	0,63

Механические характеристики углеродистой качественной стали

Марка стали	$\sigma_B$ ( $\sigma_{ПЧ}$ ) не менее		$\sigma_T$ не менее		$\tau_T$ не менее		$\sigma_{-1}$		$\tau_{-1}$		$\sigma_{-1p}$	
	кг/мм <sup>2</sup>	Мн/м <sup>2</sup>	кг/мм <sup>2</sup>	Мн/м <sup>2</sup>	кг/мм <sup>2</sup>	Мн/м <sup>2</sup>	кг/мм <sup>2</sup>	Мн/м <sup>2</sup>	кг/мм <sup>2</sup>	Мн/м <sup>2</sup>	кг/мм <sup>2</sup>	Мн/м <sup>2</sup>
10	34	334	21	206	14	137	16—22	157—216	8—12	78—118	12—15	118—147
20	42	412	25	245	16	157	17—22	167—216	10—13	98—128	12—16	118—157
25	46	451	28	275	—	—	19—25	186—245	—	—	—	—
30	50	491	30	294	17	167	20—27	196—265	11—14	108—137	17—21	167—206
35	54	530	32	314	19	186	22—30	216—294	13—18	128—177	17—22	167—216
40	58	569	34	334	—	—	23—32	226—314	14—19	137—186	18—24	177—235
45	61	598	36	353	22	216	25—34	245—334	15—20	147—196	19—25	186—245
50	64	628	38	373	—	—	27—35	265—343	16—21	157—206	20—26	196—255
55	66	647	39	383	—	—	—	—	—	—	—	—
60	69	677	41	402	—	—	31—38	304—373	18—22	177—216	22—28	216—275
20Г	46	451	28	275	—	—	—	—	—	—	—	—
30Г	55	540	32	314	—	—	22—32	216—314	—	—	—	—
50Г	66	647	40	392	—	—	29—36	284—353	—	—	—	—

Примечание. Данные, приведенные для сталей в нормализованном состоянии, получены на образцах  $d = 6 \div 12$  мм с полированной поверхностью. База испытаний при определении пределов выносливости  $N = 10^7$  циклов (понятие о пределе выносливости см. в гл. 13). Значения пределов прочности и текучести соответствуют ГОСТ 1050—60.

При использовании сталей по ГОСТ 380—60 необходимо иметь в виду следующее примерное соответствие марок: сталь Ст. 3 соответствует стали 20, сталь Ст. 4 — стали 25, сталь Ст. 5 — стали 35, сталь Ст. 6 — стали 45.

## Механические характеристики легированной конструкционной стали

Марка стали	$\sigma_B$ ( $\sigma_{пч}$ ) не менее		$\sigma_T$ не менее		$\tau_T$ не менее		$\sigma_{-1}$		$\sigma_{-1p}$		$\tau_{-1}$	
	кг/мм <sup>2</sup>	Мн/м <sup>2</sup>	кг/мм <sup>2</sup>	Мн/м <sup>2</sup>	кг/мм <sup>2</sup>	Мн/м <sup>2</sup>	кг/мм <sup>2</sup>	Мн/м <sup>2</sup>	кг/мм <sup>2</sup>	Мн/м <sup>2</sup>	кг/мм <sup>2</sup>	Мн/м <sup>2</sup>
20X	80	785	65	638	—	—	31—38	304—373	—	—	17—23	167—226
40X	100	981	80	785	—	—	32—48	314—471	24—34	235—334	21—26	206—255
45X	105	1030	85	834	—	—	40—50	392—491	—	—	—	—
30XM	95	932	75	736	—	—	31—41	304—402	37	363	23	226
35XM	100	981	85	834	—	—	47—51	461—500	—	—	—	—
40XH	100	981	80	785	39	383	46—60	451—589	31—42	304—412	—	—
50XH	110	1080	90	883	—	—	55	540	—	—	—	—
40X ФА	90	883	75	736	—	—	38—49	373—481	—	—	—	—
38XMЮА	100	981	85	834	—	—	42—55	412—540	—	—	—	—
12X H3A	95	932	70	687	40	392	42—64	412—628	—	—	22—30	216—294
20XH3 A	95	932	75	736	—	—	43—65	422—638	—	—	24—31	235—304
30XH3A	100	981	80	786	—	—	52—70	510—687	—	—	32—40	314—392
40XHMA	110	1080	95	932	—	—	50—70	491—687	—	—	27—38	265—373
30XГСА	110	1080	85	834	—	—	48—70	471—687	—	—	28—40	275—392

Примечание. Значение пределов прочности и текучести определены на образцах, полученных из термически обработанных заготовок (ГОСТ4543—61).

Пределы выносливости получены на полированных образцах диаметром 6 ÷ 12 мм. База испытаний  $N = 5 \cdot 10^6 \div 10^7$  циклов. При отсутствии в таблице данных по пределам выносливости они могут приближенно определяться на основании соотношений, приведенных в гл. 13.

Таблица 2.5

Механические характеристики низколегированной стали  
(ГОСТ 5058—57)

Марка стали	$\sigma_B$ ( $\sigma_{пч}$ ) не менее		$\sigma_T$ не менее	
	кг/мм <sup>2</sup>	Мн/м <sup>2</sup>	кг/мм <sup>2</sup>	Мн/м <sup>2</sup>
15 ГС	50	490	35	343
10Г2СД	50	490	35	343
14ХГС	50	490	35	343
30ХГ2С	90	883	60	589
10ХСНД	51	500	37	363
15ХСНД	52	510	35	343
15ХГН	49	481	35	343
14Г2	47	461	33	324
10ГНД	50	490	38	373
35ГС	60	589	40	392

Таблица 2.6

Механические характеристики алюминиевых сплавов  
в термически обработанном состоянии [56]

Марка сплава	$\sigma_B$ ( $\sigma_{пч}$ )		$\sigma_T$		$\sigma_{-1}$	
	кг/мм <sup>2</sup>	Мн/м <sup>2</sup>	кг/мм <sup>2</sup>	Мн/м <sup>2</sup>	кг/мм <sup>2</sup>	Мн/м <sup>2</sup>
Д-16Т	47	461	32	314	15,0 <sup>1</sup>	147,0
Д-18	30	294	17	167	9,5	93,0
АВТ-1	33	324	28	274	7,5	73,6
АК-2	42	412	28	274	10,0	98,1
АК-8	49	481	38	373	11,5	113,0
АЛ-1	22—33	216—324	20—29	196—284	4,5—7	44,2—68,7

Примечание. Предел выносливости на базе  $5 \cdot 10^6$  циклов.

<sup>1</sup> Предел выносливости на базе  $N = 10^8$  циклов.

Механические характеристики

Марка	Предел прочности					
	растяжения $\sigma_{вр}$ ( $\sigma_{пч. р}$ )		сжатия $\sigma_{вс}$ ( $\sigma_{пч. с}$ )		изгибе $\sigma_{вн}$ ( $\sigma_{пч. и}$ )	
	кг/мм <sup>2</sup>	Мн/м <sup>2</sup>	кг/мм <sup>2</sup>	Мн/м <sup>2</sup>	кг/мм <sup>2</sup>	Мн/м <sup>2</sup>
СЧ 12-28	12	118	50	490	28	275
СЧ 15-32	15	147	65	638	32	314
СЧ 18-36	18	177	70	687	36	353
СЧ 21-40	21	206	95	932	40	392
СЧ 24-44	24	235	100	981	44	432
СЧ 28-48	28	275	110	1079	48	471
СЧ 32-52	32	314	120	1177	52	510
СЧ 35-56	35	343	120	1177	56	549
СЧ 38-60	38	373	140	1373	60	589
ВЧ 40-10	40—50	392—491	160—170	1570—1668	—	—
ВЧ 50-1,5	50—65	491—638	186—200	1825—1962	—	—
ВЧ 60-2	60—75	589—736	204—229	2001—2246	—	—

<sup>1</sup> На образцах  $d = 40$  мм.

Механические характеристики

Материал	Характеристика	Удельная сила тя- жести (удельный вес), Г/см <sup>3</sup>
Стеклоленты	На основе тканей	1,4—1,85
Текстолиты	На основе ориентированных нитей в двух взаимно перпендикулярных направлениях	1,7—1,9
Древесные пластики	На основе хлопчатобумажных тканей	1,3—1,4
Гетинаксы	На основе различных сортов древесины	1,2—1,4
Фибра	На основе сульфатной бумаги	1,3—1,4
Волокниты	На основе специальных сортов бумаги	1,1—1,25
Термоактивные пресспорошки	Наполнители: хлопковые очесы, асболокно, стекловолокно	1,35—1,9
Органическое стекло	Наполнители: древесная кварцевая мука, слюда	1,4—1,9
Термопласты	На основе полимеров и сополимеров метакриловой кислоты	1,18
Пенопласты	Линейные полимеры с различной степенью кристаллизации	0,92—2,10
Фторопласт-4	Неармированные	0,06—0,22
Капрон	Литье	2,1—2,3
Капрон (поликапро- дактам)	—	1,14
Полиамид 68	—	1,14
Винилпласт	—	1,13
Полиэтилен НД	—	1,38—1,4
Полистирол блочный	—	1,38—1,4
	—	1,05—1,07

Таблица 2.7

при		Твердость по Бри- неллю НВ	Предел выносливости при				Предел текучес- тв $\sigma_T$	
кручения $\tau_{в}$			изгибе на гладком образце $\sigma_{-1}$		кручении на гладком образце $\tau_{-1}$		кг/мм <sup>2</sup>	Мн/м <sup>2</sup>
кг/мм <sup>2</sup>	Мн/м <sup>2</sup>		кг/мм <sup>2</sup>	Мн/м <sup>2</sup>	кг/мм <sup>2</sup>	Мн/м <sup>2</sup>		
—	—	143—229	—	—	—	—	—	—
24	235	163—229	7	69	5	49	—	—
—	—	170—229	—	—	—	—	—	—
28	275	180—207	10	98,1	8	78,5	—	—
30	294	187—217	12	118	10	98,1	—	—
35	343	170—241	14	137	11	108	—	—
39	383	170—241	14	137	11	108	—	—
40	392	197—255	15	147	11,5	113	—	—
46	451	197—255	15	147	11,5	113	—	—
48—51	471—500	156—197	15—17 <sup>1</sup>	147—167 <sup>1</sup>	19,8	194	30	294
74—79	726—775	269—285	23—27 <sup>1</sup>	226—265 <sup>1</sup>	17—21	167—206	38	373
66—81	647—795	255—321	17—23 <sup>1</sup>	167—226 <sup>1</sup>	15—16	147—157	42	412

Таблица 2.8

основных типов пластмасс							$\sigma_{-1}$ пч. р
$\sigma_{пч. р}$	$\sigma_{пч. с}$	$\sigma_{пч. и}$	$E_p$	G	НВ	кг/мм <sup>2</sup>	
26—40	10—30	13—45	1800—2200	350—400	27—38		0,22—0,25
30—50	—	23—46	2400—3500	—	28—52	0,25—0,28	
6—11	13—15	9—16	600—1000	250	30	0,2—0,25	
14—22	12—15,5	16,5—22	1200—3400	80—250	18—20	0,25—0,3	
7,0—10,0	—	8—14	1000—1800	80—250	25—30	0,20—0,3	
6,5—10,0	8—14	6—9,5	700	—	10	0,2—0,3	
3,0—13,0	11—13	4,0—10,0	500—850	—	18—35	0,25—0,3	
3,5—6,0	15—18	5,0—8,0	—	—	30—45	0,3—0,4	
7,1—9,2	—	9,9—15,3	290—410	—	22—24	0,1—0,16	
1,2—3,0	—	1,2—10,0	15—70	—	3—16	0,15—0,2	
0,04—0,42	0,017—0,45	0,07—0,50	3,7—20,0	1,5—1,9	—	—	
1,4—2,5	2,0	1,1—1,4	47—85	—	3—6	—	
3,5—7	6—8	4,5—7	140—200	45—48	5—10	—	
6—8	7—8	9	70—105	—	10—12	—	
4,5—5	7—9	7—9	120	—	14—15	—	
4—6	8—16	9	300—400	—	13—16	—	
2,5—3,5	2,8—4	3	55—88	—	70—120	—	
3—5	10	9,5—10	120—320	—	18—20	—	



§ 2.6. ДОПУСКАЕМЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ ПРИ СТАТИЧЕСКОМ  
ДЕЙСТВИИ НАГРУЗОК И РАСЧЕТЫ НА ПРОЧНОСТЬ  
ПРИ РАСТЯЖЕНИИ (СЖАТИИ)

*Предельным или опасным напряжением*  $\sigma_{\text{пред}}$  называется напряжение, при котором образец из данного материала разрушается или в нем возникают недопустимые пластические деформации.

За предельные напряжения принимают:  
для пластичных материалов — предел текучести

$$\sigma_{\text{пред}} = \sigma_{\text{T}} \text{ или } \sigma_{\text{пред}} = \sigma_{0,2};$$

для хрупко-пластичных — условный предел текучести, различный в ряде случаев при растяжении и при сжатии,

$$\sigma_{\text{пред}} = \sigma_{0,2} (\sigma_{0,2p} \text{ или } \sigma_{0,2c});$$

для хрупких — предел прочности

$$\sigma_{\text{пред}} = \sigma_{\text{пч}} (\sigma_{\text{пч. p}} \text{ или } \sigma_{\text{пч. с}}).$$

*Допускаемым напряжением* называется заранее назначенное безопасное максимальное напряжение.

В отличие от действующих (рабочих) напряжений допускаемое напряжение обозначается теми же символами, но заключенными в квадратные скобки, например:

[ $\sigma$ ] — допускаемое нормальное напряжение;

[ $\tau$ ] — допускаемое касательное напряжение.

Допускаемое напряжение всегда меньше предельного:

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{\text{пред}}}{[n]}, \quad (2.14)$$

где [n] — требуемый или заданный (или нормативный) коэффициент запаса прочности.

Величина [n], а следовательно, и [ $\sigma$ ] зависит от многих факторов: физико-механических свойств материала; разброса в величине предельного напряжения, определяемого из опыта; точности применяемого метода расчета; характера конструкции и условий и срока ее работы; характера и достоверности определения действующих нагрузок и ряда других. При выборе требуемого коэффициента запаса прочности необходимо учитывать имеющийся опыт эксплуатации ранее выполненных аналогичных конструкций (сооружений и машин). Рациональный выбор коэффициента запаса прочности является чрезвычайно важным и сложным вопросом, которому посвящена обширная литература.

Величины [ $\sigma$ ] и [n] для строительных конструкций нормируются в общесоюзном масштабе, а для некоторых отраслей машиностроения — отдельными ведомствами и крупными проектными организациями и заводами.

Фактический коэффициент запаса прочности

$$n = \frac{\sigma_{\text{пред}}}{\sigma_{\text{max}}}, \quad (2.15)$$

где  $\sigma_{\text{max}}$  — наибольшее рабочее напряжение.

По условию прочности фактический коэффициент запаса прочности должен быть не меньше требуемого, т. е.

$$n \geq [n].$$

Для рассмотренных трех групп материалов формула (2.14) принимает следующий вид.

1. Для пластичных материалов

$$\sigma_{т.р} \approx \sigma_{т.с} \text{ или } \sigma_{0,2р} \approx \sigma_{0,2с}, \text{ поэтому } [\sigma_p] = [\sigma_c] = [\sigma]$$

и

$$[\sigma] = \frac{\sigma_T}{[n_T]} \text{ или } [\sigma] = \frac{\sigma_{0,2}}{[n_T]}. \quad (2.14a)$$

2. Для хрупко-пластичных материалов при растяжении

$$[\sigma_p] = \frac{\sigma_{0,2р}}{[n_T]}; \quad (2.14б)$$

при сжатии

$$[\sigma_c] = \frac{\sigma_{0,2с}}{[n_T]}. \quad (2.14в)$$

3. Для хрупких материалов при растяжении

$$[\sigma_p] = \frac{\sigma_{пч.р}}{[n_{пч}]}; \quad (2.14г)$$

при сжатии

$$[\sigma_c] = \frac{\sigma_{пч.с}}{[n_{пч}]}. \quad (2.14д)$$

В приведенных формулах  $[n_T]$  и  $[n_{пч}]$  — нормативные коэффициенты запаса прочности соответственно по отношению к пределу текучести и пределу прочности.

В обычных расчетах величины коэффициентов запаса принимают в следующих пределах:

$$[n_T] = 1,4 \div 2,0;$$

$$[n_{пч}] = 3,0 \div 5,0.$$

Расчеты на прочность при растяжении и сжатии

Условие прочности при осевом растяжении или сжатии имеет вид

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma] \quad (2.16)$$

или

$$n = \frac{\sigma_{\text{пред}}}{\sigma_{\max}} \geq [n], \quad (2.16a)$$

где  $\sigma_{\max}$  — напряжение, возникающее в опасном поперечном сечении бруса (см. стр. 44).

Для хрупко-пластичных и хрупких материалов в правой части выражения (2.16) следует взять  $[\sigma_p]$  — при растяжении и  $[\sigma_c]$  — при сжатии.

Отметим, что если наибольшее нормальное напряжение превышает допустимое не более чем на 5%, то прочность элемента считается достаточной, так как допустимое напряжение значительно меньше предельного.

Различают три вида расчетов на прочность.

1. Проверка прочности (проверочный расчет):

$$\sigma_{\max} = \frac{N}{F} \leq [\sigma]. \quad (2.17)$$

По этой формуле можно установить, обеспечена ли прочность бруса, если  $N$ ,  $F$  и  $[\sigma]$  известны.

2. Подбор сечения (проектный расчет).

При заданных нагрузках и допустимом напряжении определяют необходимую площадь поперечного сечения бруса по формуле

$$F \geq \frac{N}{[\sigma]}. \quad (2.17a)$$

3. Определение допустимой нагрузки.

Если известны размеры поперечного сечения бруса и допустимое напряжение, то допустимое значение продольной силы определяют по формуле

$$[N] = [\sigma]F. \quad (2.17б)$$

По найденному значению  $N$ , используя метод сечений, определяют допустимые значения нагрузок.

**Примечания 1.** Расчет по приведенным формулам производится для опасного сечения. *Опасным* называется сечение, для которого коэффициент запаса прочности имеет наименьшее значение.

2. При расчетах на сжатие приведенными формулами можно пользоваться только для жестких брусков, для которых исключена опасность потери устойчивости. Если это условие не удовлетворяется, то необходимо произвести расчет бруса на устойчивость (см. гл. 10).

**Пример 2.5.** Груз  $P = 4$  т перемещается по горизонтальному абсолютно жесткому брусу, поддерживаемому вертикальным стержнем 1 и двумя симметрично расположенными наклонными стержнями 2 и 3 (рис. 2.12, а).

Площади поперечных сечений стержней

$$F_1 = 2,5 \text{ см}^2; \quad F_2 = F_3 = 2,2 \text{ см}^2; \quad \alpha = 30^\circ.$$

Проверить прочность стержней, если допустимые напряжения для их материала  $[\sigma_p] = 1500 \text{ кг/см}^2$ ;  $[\sigma_c] = 1100 \text{ кг/см}^2$ ; расстояние  $z$  может изменяться в пределах от 0 до  $l$ .

**Решение.** Пременив метод сечений, разрежем стержни и рассмотрим равновесие бруса  $AB$  под действием заданной силы  $P$  и продольных сил  $N_1$ ,  $N_2$ ,  $N_3$ , заменяющих действие отброшенной части системы на рассматриваемую (рис. 2.12, б).

Продольные силы, возникающие в стержнях в зависимости от положения груза, определяем из уравнений равновесия:

$$\Sigma m_B = 0; \quad N_1 l - P(l - z) = 0,$$

откуда

$$N_1 = P \frac{l - z}{l}; \quad (1)$$

$$\Sigma Z = 0; \quad N_2 \sin \alpha - N_3 \sin \alpha = 0 \text{ и } N_2 = N_3; \quad (2)$$

$$\Sigma Y = 0; \quad N_1 - P + N_2 \cos \alpha + N_3 \cos \alpha = 0. \quad (3)$$

Из уравнений (1) — (3) следует, что

$$N_2 = N_3 = \frac{Pz}{2l \cos \alpha}.$$

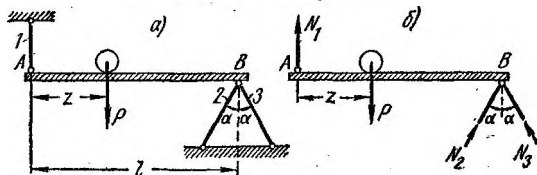


РИС. 2.12

Все продольные силы получились положительными. Это значит, что их направления на рис. 2.12, б показаны правильно и стержень 1 растянут, а стержни 2 и 3 сжаты.

Очевидно:

при  $z = 0$   $\max N_1 = P = 4 \text{ т} = 4000 \text{ кг}$ ;

при  $z = l$   $\max N_2 = \frac{P}{2 \cos 30^\circ} = \frac{4000}{\sqrt{3}} \approx 2310 \text{ кг}$ .

Наибольшее растягивающее напряжение в стержне 1

$$\max \sigma_I = \frac{\max N_1}{F_1} = \frac{4000}{2,5} = 1600 \text{ кг/см}^2;$$

оно превышает допускаемое на

$$\frac{\max \sigma_I - [\sigma_p]}{[\sigma_p]} = \frac{1600 - 1500}{1500} \cdot 100 = 6,7\%.$$

Так как максимальное рабочее напряжение превышает допускаемое больше чем на 5%, то для обеспечения требуемой прочности стержня 1 площадь его поперечного сечения должна быть увеличена.

Наибольшие сжимающие напряжения в стержнях 2 и 3

$$\max \sigma_{II} = \max \sigma_{III} = \frac{\max N_2}{F_2} = \frac{2310}{2,2} = 1050 \text{ кг/см}^2,$$

т. е. несколько меньше допускаемого  $1100 \text{ кг/см}^2$ , и прочность их обеспечена.

Пониженное допускаемое напряжение на сжатие по сравнению с растяжением связано с необходимостью обеспечения устойчивости сжатых стержней.

**Пример 2.6.** Определить требуемую площадь поперечного сечения стержня  $OA$  системы, показанной на рис. 2.13, *a*, а также вертикальное и горизонтальное перемещение точки  $A$ .

Кривой бруса  $AB$ , осевая линия которого представляет часть дуги окружности радиусом  $r = 50$  см, считать абсолютно жестким. Дано:  $P = 960$  кгГ;  $E = 2 \cdot 10^6$  кгГ/см<sup>2</sup>;  $[\sigma] = 1600$  кгГ/см<sup>2</sup>.

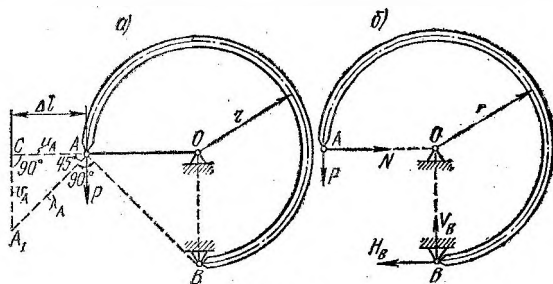


РИС. 2.13

**Решение.** Разрежем стержень  $OA$  и покажем все силы, действующие на кривой брус  $AB$  (рис. 2.13, *b*).

Продольную силу  $N$  в поперечном сечении стержня  $OA$  определим из уравнения равновесия:

$$\sum m_B = 0; \quad Nr - Pr = 0,$$

откуда

$$N = P = 960 \text{ кгГ}.$$

Площадь поперечного сечения стержня найдем по формуле (2.17 б):

$$F = \frac{N}{[\sigma]} = \frac{960}{1600} = 0,6 \text{ см}^2.$$

Удлинение стержня  $OA$  составит

$$\Delta l = \frac{Nr}{EF} = \frac{960 \cdot 50}{2 \cdot 10^6 \cdot 0,6} = 0,04 \text{ см}.$$

Отложим отрезок  $AC = \Delta l$  по направлению оси стержня  $OA$ . Точка  $A_1$  пересечения перпендикуляров, восставленных к линиям  $OC$  и  $BA$  в точках  $C$  и  $A$ , определяет новое положение точки  $A$  вследствие удлинения стержня  $OA$ .

Отрезки  $AA_1$ ,  $A_1C$  и  $AC$  дают соответственно полное ( $\lambda_A$ ), вертикальное ( $v_A$ ) и горизонтальное ( $u_A$ ) перемещения точки  $A$ .

Непосредственно из рис. 2.13, *a* следует, что

$$v_A = u_A = \Delta l = 0,04 \text{ см}.$$



Сумма проекций всех сил на горизонтальную ось:

$$\Sigma U = 0;$$

$$-N_1 \cos \alpha - N_2 \cos \beta - N_3 \cos \alpha = 0.$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{a - 0,5(a - b)}{c} = \frac{640 - 120}{320} = 1,63; \quad \beta = 58^\circ 30';$$

$$\cos \beta = 0,522.$$

$$N_2 = -\frac{(N_1 + N_3) \cos \alpha}{\cos \beta} = \frac{(-0,64P + 0,936P) 0,936}{0,522} = 0,531P.$$

Составляем условия прочности стержней; площади их поперечных сечений принимаем по ГОСТ 8509-57 (см. стр. 112):

$$\sigma_I = \frac{N_1}{F_1} = \frac{0,64P}{F_1} \leq [\sigma];$$

$$\sigma_{II} = \frac{N_2}{F_2} = \frac{0,531P}{F_2} \leq [\sigma];$$

$$\sigma_{III} = \frac{N_3}{F_3} = \frac{0,936P}{F_3} \leq [\sigma].$$

Отсюда

$$[P]_I = \frac{F_1 [\sigma]}{0,64} = \frac{2 \cdot 4,38 \cdot 10^{-4} \cdot 150 \cdot 10^6}{0,64} = 205 \cdot 10^3 \text{ н};$$

$$[P]_{II} = \frac{F_2 [\sigma]}{0,531} = \frac{2 \cdot 3,89 \cdot 10^{-4} \cdot 150 \cdot 10^6}{0,531} = 220 \cdot 10^3 \text{ н};$$

$$[P]_{III} = \frac{F_3 [\sigma]}{0,936} = \frac{2 \cdot 7,28 \cdot 10^{-4} \cdot 150 \cdot 10^6}{0,936} = 235 \cdot 10^3 \text{ н}.$$

Допускаемой нагрузкой конструкции будет меньшая из определяемых прочностью каждого стержня, т. е.  $[P] = [P]_I = 205 \cdot 10^3 \text{ н} = 205 \text{ кн}$ . При такой нагрузке стержень  $AC$  будет недогружен на 6,82%, а стержень  $CD$  — на 12,7%.

**Пример 2.8.** Построить эпюры продольных сил, напряжений, относительных удлинений и перемещений для бруса по рис. 2.15,  $a$  и составить условие прочности. Учесть влияние собственной массы бруса (удельная сила тяжести равна  $\gamma$ ).

**Решение.** Продольная сила  $N$  в произвольном поперечном сечении  $n-n$  бруса на расстоянии  $z$  от его свободного конца (рис. 2.15,  $b$ )

$$N = P + G_z = P + \gamma Fz, \quad (I)$$

где  $G_z$  — сила тяжести части бруса длиной  $z$ .

Нормальное напряжение в произвольном поперечном сечении

$$\sigma = \frac{N}{F} = \frac{P}{F} + \gamma z, \quad (II)$$

где  $\gamma z$  — нормальное напряжение в сечении  $n-n$ , вызванное силой тяжести части бруса, расположенной ниже сечения  $n-n$ .

Относительное удлинение

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{P}{EF} + \frac{\gamma z}{E}. \quad (III)$$

На рис. 2.15, в, г, д показаны эпюры  $N$ ,  $\sigma$  и  $\epsilon$ , построенные по уравнениям (I), (II) и (III).

В защемлении (опасном сечении) при  $z = l$ , как следует из уравнения (II), нормальные напряжения достигают максимальной величины:

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{F} + \gamma l.$$

Условие прочности с учетом силы тяжести бруса имеет вид

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{F} + \gamma l \leq [\sigma]. \quad (2.18)$$

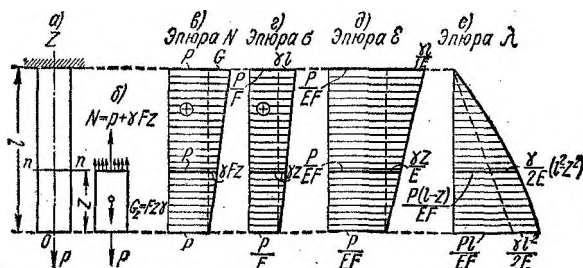


РИС. 2.15

Отсюда требуемая площадь поперечного сечения бруса

$$F \geq \frac{P}{[\sigma] - \gamma l}. \quad (2.18a)$$

Допускаемое значение силы определяется по формуле

$$[P] = F([\sigma] - \gamma l). \quad (2.18 б)$$

Перемещение сечения  $n-n$  ( $\lambda_{n-n}$ ) относительно защемления равно удлинению верхнего участка бруса длиной  $(l - z)$  и определяется по формуле (2.7):

$$\lambda_{n-n} = \Delta l = \frac{1}{EF} \int_z^l (P + \gamma Fz) dz = \frac{P(l-z)}{EF} + \frac{\gamma(l^2 - z^2)}{2E}.$$

Эпюра перемещений, представляющая собой параболу, дана на рис. 2.15, е.

Наибольшее перемещение ( $\lambda_{\max}$ ) равно полному удлинению бруса:

$$\Delta l = \lambda_{\max} = \frac{Pl}{EF} + \frac{\gamma l^2}{2E}. \quad (2.19)$$



Каждая из эпюр  $N$ ,  $\sigma$  и  $\lambda$  штриховой линией разбита на две части, одна из которых дает соответственно эпюру от сосредоточенной силы  $P$ , а другая — от силы тяжести.

В металлических конструкциях напряжения и деформации от собственной массы обычно незначительны, и ими большей частью пренебрегают, за исключением тех случаев, когда рассчитываемые брусья имеют большую длину, например канаты шахтных подъемников и т. п. В бетонных и каменных конструкциях допускаемые напряжения невелики, и напряжения от собственной массы конструкции по сравнению с напряжениями от заданных внешних сил могут быть довольно значительны и, следовательно, должны быть учтены.

### § 2.7. СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫЕ СИСТЕМЫ С ЭЛЕМЕНТАМИ, РАБОТАЮЩИМИ НА РАСТЯЖЕНИЕ (СЖАТИЕ)

#### Понятие о статически неопределимой системе

Стержневая система, в которой все или часть внутренних силовых факторов не могут быть определены при помощи только уравнений статики, называется *статически неопределимой*.

В статически неопределимых системах число неизвестных усилий превышает число уравнений статики твердого тела. Недостающие уравнения, необходимые для решения задачи, могут быть получены из рассмотрения схемы деформации системы.

Система называется  $n$  раз статически неопределимой, если число неизвестных превышает число независимых уравнений статики на  $n$  единиц.

Метод решения статически неопределимых задач и их особенности покажем на примерах.

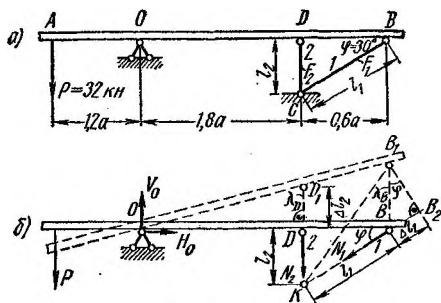


РИС. 2.16

**Пример 2.9.** Определить усилия, возникающие в поперечных сечениях стальных стержней  $CB$  и  $CD$ , поддерживающих абсолютно жесткую балку  $AB$  (рис. 2.16, а). Найти требуемые площади поперечных сечений стержней, если  $[\sigma] = 160 \text{ Мн/м}^2$ ,  $F_{BC} = F$ ,  $F_{CD} = 2F$ .

**Решение.** Балка находится в равновесии (рис. 2.16, б) под действием пяти сил, из которых четыре неизвестны. Статика для

плоской системы сил дает три уравнения равновесия, следовательно, заданная система один раз статически неопределима.

Так как определять реакции шарнира по условию задачи не требуется, то используем следующее уравнение равновесия:

$$\Sigma m_O = 0; \quad N_1 \cdot 2,4a \sin 30^\circ + N_2 \cdot 1,8a - P \cdot 1,2a = 0,$$

откуда

$$2N_1 + 3N_2 = 2P. \quad (1)$$

Второе уравнение, связывающее те же неизвестные  $N_1$  и  $N_2$ , получим, рассмотрев новое положение балки после ее поворота около шарнира  $O$  вследствие деформации стержней.

Новое положение балки указано штриховыми линиями на рис. 2.16, б. Здесь же дана диаграмма перемещений, на которой перемещения шарниров и удлинения стержней показаны с большим преувеличением.

Действительные перемещения точек  $D$  и  $B$  балки по дугам заменяем перемещениями по вертикальным прямым  $BB_1 = \lambda_B$  и  $DD_1 = \lambda_D$  (см. пример 2.4).

Из диаграммы перемещений имеем:

$$\lambda_B = \frac{\Delta l_1}{\sin 30^\circ} = 2\Delta l_1; \quad \lambda_D = \Delta l_2.$$

Из подобия треугольников  $ODD_1$  и  $OBB_1$  следует

$$\frac{\lambda_B}{\lambda_D} = \frac{2,4a}{1,8a} = \frac{4}{3}$$

или

$$\frac{2\Delta l_1}{\Delta l_2} = \frac{4}{3} \quad \text{и} \quad \Delta l_1 = \frac{2}{3} \Delta l_2.$$

Выразив по закону Гука абсолютные удлинения через усилия, получим

$$\frac{N_1 l_1}{E_1 F_1} = \frac{2}{3} \frac{N_2 l_2}{E_2 F_2}$$

или

$$\frac{N_1}{C_1} = \frac{2}{3} \frac{N_2}{C_2} \quad (2)$$

(величина  $C = \frac{EF}{l}$  называется жесткостью стержня).

Решив систему уравнений (1) и (2), найдем

$$N_1 = \frac{4P \frac{C_1}{C_2}}{4 \frac{C_1}{C_2} + 9}; \quad (I)$$

$$N_2 = \frac{6P}{4 \frac{C_1}{C_2} + 9}. \quad (II)$$

Из выражений (I) и (II) следует, что распределение усилий в стержнях статически неопределимой системы зависит от соотношения их жесткостей и с увеличением жесткости стержня увеличивается возникающее в нем усилие.

В нашем примере

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{E_1}{E_2} \cdot \frac{F_1}{F_2} \cdot \frac{l_2}{l_1} = 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

и

$$N_1 = 0,1P = 0,1 \cdot 32 = 3,2 \text{ кН}; \quad N_2 = 0,6P = 0,6 \cdot 32 = 19,2 \text{ кН}.$$

Из условия прочности наиболее напряженного второго стержня определяем площадь его поперечного сечения:

$$F_{CD} = \frac{N_2}{[\sigma]} = \frac{19,2 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^8} = 1,2 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = 1,2 \text{ см}^2;$$

$$F_{BC} = \frac{F_{CD}}{2} = \frac{1,2}{2} = 0,6 \text{ см}^2.$$

Рабочие напряжения в стержнях:

$$\sigma_I = \frac{N_1}{F_1} = \frac{3,2 \cdot 10^3}{0,6 \cdot 10^{-4}} = 5,33 \cdot 10^7 \text{ н/м}^2 = 53,3 \text{ Мн/м}^2;$$

$$\sigma_{II} = [\sigma] = 160 \text{ Мн/м}^2.$$

Стержень 1 недогружен на 66,7%. Для лучшего использования материала стержней следует задаться другим, более рациональным соотношением жесткостей  $C_1 : C_2$ .

**Пример 2.10.** Определить коэффициент запаса прочности стержневой конструкции (рис. 2.17, а), если стержни изготовлены из стали, для которой  $\sigma_T = 2400 \text{ кг/см}^2$ .

**Решение.** Узел  $O$  находится в равновесии под действием четырех сил, лежащих в одной плоскости и пересекающихся в одной точке (рис. 2.17, б).

Рассматриваемая система один раз статически неопределима, так как для определения трех неизвестных ( $N_1$ ,  $N_2$  и  $N_3$ ) статика дает два уравнения равновесия:

$$\Sigma X = 0; \quad -N_1 \sin \alpha + N_3 \sin \alpha = 0; \quad N_1 = N_3. \quad (1)$$

$$\Sigma Y = 0; \quad N_1 \cos \alpha + N_3 \cos \alpha + N_2 - P = 0; \\ N_2 + 2N_1 \cos \alpha = P. \quad (2)$$

Недостающее третье уравнение получим, рассматривая деформацию системы.

На диаграмме перемещений (рис. 2.17, в) дано новое положение узла  $O$  после деформации стержней.

Как видно из рисунка,

$$\Delta l_1 = \Delta l_2 \cdot \cos \alpha. \quad (a)$$

По закону Гука

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{EF} = \frac{N_1 l_2}{EF \cos \alpha}; \quad \Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{EF},$$

и равенство (а) запишется в таком виде:

$$\frac{N_1 l_2}{EF \cos \alpha} = \frac{N_2 l_2}{EF} \cos \alpha$$

или

$$N_1 = N_2 \cos^2 \alpha. \quad (3)$$

Решив систему трех уравнений с тремя неизвестными, найдем

$$N_1 = N_3 = \frac{P \cos^2 \alpha}{1 + 2 \cos^3 \alpha}; \quad (A') \quad N_2 = \frac{P}{1 + 2 \cos^3 \alpha}. \quad (B')$$

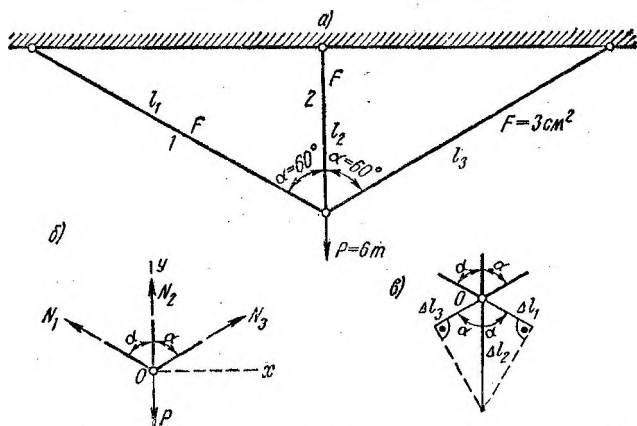


РИС. 2.17

Подставляя числовые данные, получаем:

$$N_2 = \frac{6000}{1 + 2 \cos^3 60^\circ} = 4800 \text{ кг};$$

$$N_1 = N_3 = \frac{6000 \cdot \cos^2 60^\circ}{1 + 2 \cos^3 60^\circ} = 1200 \text{ кг}.$$

С меньшим коэффициентом запаса работает стержень 2, в котором напряжение больше, чем в стержне 1, и равно

$$\sigma_{II} = \frac{N_2}{F} = \frac{4800}{3} = 1600 \text{ кг/см}^2.$$

Фактический коэффициент запаса системы равен коэффициенту запаса для стержня 2 и определяется по формуле (2.15):]

$$n = \frac{\sigma_{\text{пред}}}{\sigma_{\text{max}}} = \frac{\sigma_r}{\sigma_{\text{max}}} = \frac{2400}{1600} = 1,5.$$

## Напряжения в брус, вызываемые изменением температуры

Если брус не имеет возможности беспрепятственно изменять свои размеры, то при изменении температуры в нем возникают так называемые температурные напряжения.

Задача определения температурных напряжений является статически неопределимой.

В элементах статически определимой конструкции температурные напряжения не возникают.

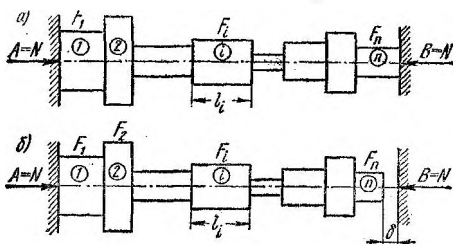


РИС. 2.18

Для ступенчатого бруса с защемленными концами (рис. 2.18, а) опорные реакции, возникающие при изменении температуры, определяются по формуле

$$N = B = A = - \frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i l_i \Delta t_i}{\sum_{i=1}^n \frac{l_i}{E_i F_i}}, \quad (2.20)$$

где для  $i$ -й ступени:

$\alpha_i$  — коэффициент линейного расширения материала;

$l_i$  — длина;

$\Delta t_i$  — изменение температуры: при нагревании берется со знаком плюс, а при охлаждении — минус;

$E_i$  — модуль продольной упругости материала;

$F_i$  — площадь поперечного сечения;

$n$  — число ступеней бруса.

Продольные силы во всех поперечных сечениях бруса одинаковы и равны опорным реакциям.

Из формулы (2.20) следует, что при повышении температуры продольная сила имеет знак минус и будет сжимающей, а при понижении температуры — растягивающей. Сказанное относится лишь к брус с защемленными концами; в некоторых статически неопределимых системах повышение температуры может вызывать в отдельных элементах напряжения растяжения.

Если между одним из концов бруса и неподатливой опорой имеется зазор  $\delta$  (рис. 2.18, б), то продольная сила

$$N = - \frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i l_i \Delta t_i - \delta}{\sum_{i=1}^n \frac{l_i}{E_i F_i}} \quad (2.21)$$

В этом случае сила  $N$  может быть только сжимающей или равняться нулю при

$$\delta \geq \sum_{i=1}^n \alpha_i l_i \Delta t_i.$$

Температурное напряжение в поперечном сечении любой ступени определяется по формуле

$$\sigma_{it} = \frac{N}{F_i} \quad (2.22)$$

Для однородного бруса постоянного поперечного сечения при значении  $\Delta t$ , одинаковом для всех участков бруса, формулы (2.20), (2.21) и (2.22) принимают следующий вид:

$$N = -EF\alpha\Delta t \quad (2.20')$$

$$\sigma_t = -E\alpha\Delta t; \quad (2.22')$$

$$N = -EF \left( \alpha\Delta t - \frac{\delta}{l} \right) \quad (2.21')$$

$$\sigma_t = -E \left( \alpha\Delta t - \frac{\delta}{l} \right). \quad (2.22'')$$

В табл. 2.9 приведены значения коэффициентов линейного расширения для некоторых материалов.

Таблица 2.9

Коэффициенты линейного расширения  $\alpha$  твердых тел  
для температур около 20° С, 1/град

Материал	$\alpha$
Алюминий	(24—26) · 10 <sup>-6</sup>
Бетон	(10—14) · 10 <sup>-6</sup>
Бронза	(17—19) · 10 <sup>-6</sup>
Гетинакс	20 · 10 <sup>-6</sup>
Дерево (вдоль волокон)	(2—5) · 10 <sup>-6</sup>
Сталь	(10—13) · 10 <sup>-6</sup>
Медь	(16,5—17,5) · 10 <sup>-6</sup>
Никель	13 · 10 <sup>-6</sup>
Текстолит	(33—41) · 10 <sup>-6</sup>
Чугун антифрикционный	12 · 10 <sup>-6</sup>
Чугун	10,4 · 10 <sup>-6</sup>

**Пример. 2.11.** Между железнодорожными рельсами длиной 12 м, установленными при температуре  $t_0 = 15^\circ$ , имеется зазор 3 мм.

Требуется определить:

1) напряжения, возникающие в поперечных сечениях рельса при повышении температуры до величины  $t = 45^\circ$ ;

2) необходимый зазор между рельсами, чтобы при  $t = 45^\circ$  рельсы касались друг друга без давления;

3) величину напряжения в поперечных сечениях рельса при отсутствии зазора при заданном повышении температуры.

$$\alpha = 12,5 \cdot 10^{-6} \text{ и } E = 2 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2.$$

**Решение. 1.** В нашем примере  $\Delta t = 45^\circ - 15^\circ = 30^\circ$ ;  $l = 1200 \text{ см}$  и  $\delta = 0,3 \text{ см}$ . По формуле (2.22') найдем

$$\sigma_t = -E \left( \alpha \Delta t - \frac{\delta}{l} \right) = -2 \cdot 10^6 \left( 12,5 \cdot 10^{-6} \cdot 30 - \frac{0,3}{1200} \right) = -250 \text{ кг/см}^2.$$

2. При отсутствии давления между рельсами  $\sigma_t = 0$  и из формулы (2.22') следует, что  $\alpha \cdot \Delta t - \frac{\delta}{l} = 0$ , откуда

$$\delta = \alpha \cdot l \cdot \Delta t = 12,5 \cdot 10^{-6} \cdot 1200 \cdot 30 = 0,45 \text{ см} = 4,5 \text{ мм}.$$

3. При отсутствии зазора по формуле (2.22')

$$\sigma_t = -E \cdot \alpha \cdot \Delta t = -2 \cdot 10^6 \cdot 12,5 \cdot 10^{-6} \cdot 30 = -750 \text{ кг/см}^2.$$

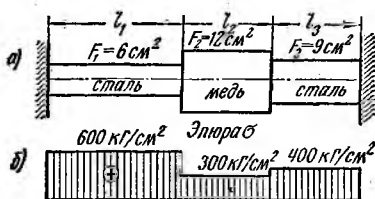


РИС. 2.19

**Пример 2.12.1** Определить допустимое понижение температуры  $\Delta t$  составного бруса (рис. 2.19, а) из условия, чтобы напряжения в медной части бруса  $\sigma_{\text{мед}}$  не превышали  $300 \text{ кг/см}^2$ , а в стальной  $\sigma_{\text{ст}} - 800 \text{ кг/см}^2$ . Построить эпюру  $\sigma$  по длине бруса при  $\Delta t = [\Delta t] \cdot l_1 = 150 \text{ см}$ ;  $l_2 = l_3 = 100 \text{ см}$ .

**Решение.** Брус имеет три участка:

$$\alpha_1 = \alpha_3 = \alpha_c = 12,5 \cdot 10^{-6}; \quad \alpha_2 = \alpha_m = 16,5 \cdot 10^{-6};$$

$$E_1 = E_3 = E_c = 2 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2; \quad E_2 = E_m = 1 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2.$$

Определяем величину продольной силы, при которой во второй (медной) ступени напряжения равны  $300 \text{ кг/см}^2$ :

$$N = \sigma_2 F_2 = \sigma_{\text{мед}} \cdot F_2 = 300 \cdot 12 = 3600 \text{ кг}.$$

<sup>1</sup> Условие задачи заимствовано из книги [22].

Учитывая, что  $\Delta t_i = \Delta t = \text{const}$ , по формуле (2.20) находим допускаемое изменение температуры:

$$\Delta t = [\Delta t] = - \frac{N \sum_{i=1}^3 \frac{l_i}{E_i F_i}}{\sum_{i=1}^3 \alpha_i l_i} = - \frac{N \left( \frac{l_1}{E_1 F_1} + \frac{l_2}{E_2 F_2} + \frac{l_3}{E_3 F_3} \right)}{\alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2 + \alpha_3 l_3} =$$

$$= - \frac{3600 \left( \frac{150}{2 \cdot 10^6 \cdot 6} + \frac{100}{1 \cdot 10^6 \cdot 12} + \frac{100}{2 \cdot 10^6 \cdot 9} \right)}{12,5 \cdot 10^{-6} \cdot 150 + 16,5 \cdot 10^{-6} \cdot 100 + 12,5 \cdot 10^{-6} \cdot 100} = -20^\circ.$$

Определяем напряжения в поперечных сечениях стальных частей бруса при понижении температуры на  $20^\circ$ :

$$\sigma_I = \frac{N}{F_1} = \frac{3600}{6} = 600 \text{ кг/см}^2;$$

$$\sigma_{III} = \frac{N}{F_3} = \frac{3600}{9} = 400 \text{ кг/см}^2.$$

Эпюра  $\sigma$  дана на рис. 2.19, б.

#### Начальные, или монтажные, напряжения

Неточность изготовления отдельных элементов статически неопределимой конструкции вызывает при сборке напряжения, которые называются *начальными* или *монтажными*.

**Пример 2.13.** Определить, какие начальные усилия появятся в стержнях после сборки, если средний стержень был изготовлен на  $\delta$  длиннее, чем требовалось. Материал стержней и площади их поперечных сечений одинаковы (рис. 2.20, а).

**Решение.** При сборке для соединения концов всех стержней в один узел  $O$  необходимо средний стержень укоротить на величину  $\Delta l_2$ , а крайние вытянуть на величину  $\Delta l_1 = \Delta l_3$ .

Из уравнений равновесия имеем:

$$N_1 = N_3 \text{ и } N_2 = 2N_1 \cos \alpha. \quad (1)$$

Абсолютные удлинения стержней связаны между собой следующей зависимостью (см. рис. 2.20, а):

$$\Delta l_2 + \frac{\Delta l_1}{\cos \alpha} = \delta.$$

Выразив по закону Гука абсолютные удлинения через усилия, получим

$$\frac{N_2 l}{EF} + \frac{N_1 l}{EF \cos^2 \alpha} = \delta, \quad (2)$$



Решив совместно уравнения (1) и (2), определим усилия в стержнях:

$$N_1 = N_2 = EF \frac{\cos^2 \alpha}{1 + 2 \cos^3 \alpha} \cdot \frac{\delta}{l}; \quad (A'')$$

$$N_2 = 2EF \frac{\cos^3 \alpha}{1 + 2 \cos^3 \alpha} \cdot \frac{\delta}{l}. \quad (B'')$$

Поставим перед собой задачу определить, на какую величину  $\delta$  длиннее проектной величины следует выполнить средний стержень (см. пример 2.10, рис. 2.17, а), чтобы после сборки конструкции и нагружения ее было обеспечено равенство продольных сил во всех стержнях.

С учетом знаков и величин начальных напряжений продольные силы в стержнях [см. формулы (A'), (B'), стр. 53 и (A''), (B'')] равны

$$N_1 = N_3 = N_1' + N_1'' = \frac{P \cos^2 \alpha}{1 + 2 \cos^3 \alpha} + EF \frac{\cos^2 \alpha}{1 + 2 \cos^3 \alpha} \times \frac{\delta}{l};$$

$$N_2 = N_2' - N_2'' = \frac{P}{1 + 2 \cos^3 \alpha} - 2EF \frac{\cos^3 \alpha}{1 + 2 \cos^3 \alpha} \cdot \frac{\delta}{l}.$$

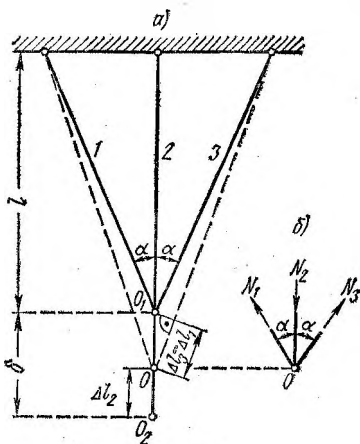


РИС. 2.20

По условию задачи  $N_1 = N_2$ , следовательно,

$$\frac{P \cos^2 \alpha}{1 + 2 \cos^3 \alpha} + EF \frac{\cos^2 \alpha}{1 + 2 \cos^3 \alpha} \cdot \frac{\delta}{l} = \frac{P}{1 + 2 \cos^3 \alpha} - 2EF \cdot \frac{\cos^3 \alpha}{1 + 2 \cos^3 \alpha} \cdot \frac{\delta}{l}.$$

Из полученного равенства искомая величина

$$\delta = \frac{Pl}{EF} \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha}{(1 + 2 \cos \alpha)} = \frac{\sigma l}{E} \operatorname{tg}^2 \alpha$$

$$\left( \text{так как } \frac{P}{F(1 + 2 \cos \alpha)} = \frac{N}{F} = \sigma \right).$$

Взяв числовые данные примера 2.10, получим:

$$N_1 = N_2 = N_3 = N = \frac{P}{1 + 2 \cos \alpha} = \frac{P}{1 + 2 \cos 60^\circ} = \frac{6000}{2} = 3000 \text{ кг};$$

$$\sigma_1 = \sigma_{II} = \sigma_{III} = \frac{N}{F} = \frac{3000}{3} = 1000 \text{ кг/см}^2$$

и

$$\delta = \frac{\sigma l}{E} \operatorname{tg}^2 60^\circ = \frac{1000l}{2 \cdot 10^6} 3 = 0,0015l.$$

Коэффициент запаса прочности для конструкции

$$n = \frac{\sigma_r}{\sigma_{\max}} = \frac{2400}{1000} = 2,4.$$

Если желательно сохранить коэффициент запаса прочности, полученный ранее ( $n = 1,5$ ), то нужно соответствующим образом уменьшить площади поперечных сечений стержней, а именно:

$$\sigma_{\max} = \frac{\sigma_r}{n} = \frac{2400}{1,5} = 1600 \text{ кг/см}^2 = [\sigma];$$

$$F = \frac{N}{[\sigma]} = \frac{3000}{1600} = 1,875 \text{ см}^2.$$

Для этого случая

$$\delta = \frac{[\sigma] l}{E} \operatorname{tg}^2 60^\circ = \frac{1600l}{2 \cdot 10^6} 3 = 0,0024l.$$

Экономия в материале составляет

$$\frac{3 - 1,875}{3} \cdot 100 = 37,5\%.$$

ТЕОРИЯ НАПРЯЖЕННОГО И ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ

§ 3.1. ОСНОВЫ ТЕОРИИ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ

Компоненты напряженного состояния. Закон парности касательных напряжений. Главные напряжения

Через любую точку тела может быть проведено бесчисленное множество площадок, различно ориентированных в пространстве. В общем случае нормальные и касательные напряжения, возникающие на этих площадках при нагружении тела, различны. Совокупность нормальных и касательных напряжений, возникающих на всем бесчисленном множестве площадок, которые можно провести через данную точку тела, характеризует *напряженное состояние* в этой точке. Напряженное состояние в точке является заданным (т. е. возможно найти напряжение на любой проходящей через эту точку площадке), если известны напряжения на любых трех взаимно перпендикулярных площадках, проходящих через данную точку.

Это, как принято говорить, *исходные* площадки и *исходные* напряжения.

В общем случае вектор полного напряжения на каждой из исходных площадок может быть разложен на три составляющие,

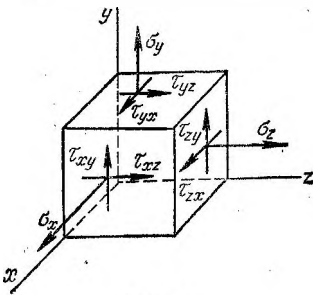


РИС. 3.1

параллельные выбранным осям координат (рис. 3.1). Правило индексов для напряжений приведено на стр. 12. Обычно изображают напряжения лишь на видимых гранях бесконечно малого параллелепипеда, выделенного в окрестности исследуемой точки (см. рис. 3.1). Показанные на рис. 3.1 девять напряжений называются *компонентами напряженного состояния* в данной точке тела. Из девяти компонентов независимыми являются лишь шесть, так как в силу закона парности касательных напряжений (на двух взаимно перпендикулярных площадках, проходящих через данную точку, составляющие касательных напряжений, перпендикулярные к линии пересечения указанных площадок, равны по величине)

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}; \tau_{yz} = \tau_{zy}; \tau_{zx} = \tau_{xz}. \quad (3.1)$$

Парные касательные напряжения направлены либо к линии пересечения площадок, либо от нее.

Среди бесчисленного множества площадок, которые можно провести через данную точку, есть три взаимно перпендикулярные площадки, на которых отсутствуют касательные напряжения. Эти площадки называют *главными*; возникающие на них нормальные напряжения также называют *главными*; их обозначают  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ . Ин-

дексы расставляют так, чтобы было соблюдено условие  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$  (неравенства алгебраические; напряжения растяжения считают положительными). Для данной точки  $\sigma_1$  наибольшее, а  $\sigma_3$  наименьшее (в алгебраическом смысле) нормальные напряжения.

Различают объемное (трехосное), плоское (двухосное) и линейное (одноосное) напряженные состояния. При первом из них все три

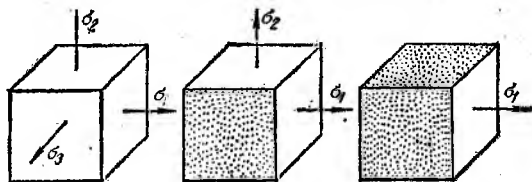


РИС. 3.2

главных напряжения отличны от нуля; при втором — одно из главных напряжений равно нулю; при третьем — лишь одно из главных напряжений не равно нулю.

Для случаев, когда исходными являются главные площадки, элементарные параллелепипеды для объемного, плоского и линейного напряженных состояний (при положительных главных напряжениях) представлены на рис. 3.2.

Если два (или все три) главных напряжения равны между собой, то главных площадок не три, а бесчисленное множество. Например, при  $\sigma_1 = \sigma_2$  любая площадка, параллельная  $\sigma_3$ , будет главной; на всех этих главных площадках напряжения одинаковы и равны  $\sigma_1 = \sigma_2$ .

Максимальное касательное напряжение  $\tau_{\max}$  возникает на площадке, параллельной вектору  $\sigma_2$  и делящей пополам угол между площадками действия  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$  (рис. 3.3);<sup>1</sup> его значение определяется по формуле

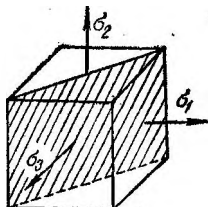


РИС. 3.3

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}. \quad (3.2)$$

#### Исследование напряженного состояния при исходных главных площадках

Напряжения на произвольной площадке, принадлежащей семейству<sup>2</sup> (серии) площадок, перпендикулярных к плоскости, в которой лежат векторы двух главных напряжений (например,  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ ), или, что то же самое, параллельных одному из главных напряжений (в приведенном примере — параллельных  $\sigma_3$ ), не зависят от этого

<sup>1</sup> На площадке, перпендикулярной к заштрихованной, возникает такое же по величине касательное напряжение.

<sup>2</sup> Семейством (серией) площадок называют совокупность бесчисленного множества площадок, перпендикулярных к одной и той же плоскости или, что то же самое, параллельных одной и той же оси.

последнего. На произвольной площадке указанного семейства, нормаль к которой составляет угол  $\alpha$  с направлением  $\sigma_1$  (рис. 3.4), нормальное и касательное напряжения определяют по формулам:

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\alpha; \quad (3.3)$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha. \quad (3.4)$$

$\sigma_1$  и  $\sigma_2$  должны быть подставлены со своими знаками (напряжения растяжения положительны). Положительные углы  $\alpha$  откладывают от оси  $z$  против хода часовой стрелки. Для рассматриваемого семейства площадок  $\sigma_1$  наибольшее, а  $\sigma_2$  наименьшее нормальные напряжения. Наибольшее для данного семейства площадок касательное напряжение

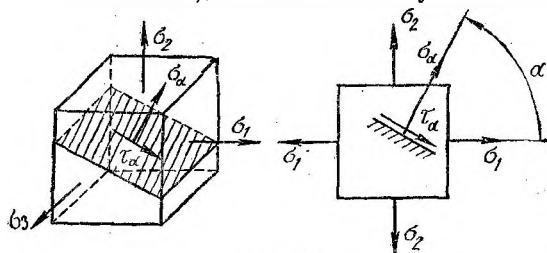


РИС. 3.4

от оси  $z$  против хода часовой стрелки. Для рассматриваемого семейства площадок  $\sigma_1$  наибольшее, а  $\sigma_2$  наименьшее нормальные напряжения. Наибольшее для данного семейства площадок касательное напряжение

$$\tau_{12} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}. \quad (3.5)$$

Формулы для определения напряжений в семействах площадок, параллельных  $\sigma_2$  (или  $\sigma_1$ ), аналогичны формулам (3.3)—(3.5).

Площадки, равно наклоненные ко всем трем главным площадкам, называют *октаэдрическими*, соответствующие нормальное и касательное напряжения также называют *октаэдрическими*. Для их определения служат формулы:

$$\sigma_{\text{окт}} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}; \quad (3.6)$$

$$\tau_{\text{окт}} = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}. \quad (3.7)$$

Нормальное и касательное напряжения на площадке общего положения (не параллельной ни одному из главных напряжений), нормаль к которой составляет углы  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  соответственно с  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\sigma_3$ , определяются по формулам:

$$\sigma_\nu = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \cos^2 \beta + \sigma_3 \cos^2 \gamma; \quad (3.8)$$

$$\tau_\nu = \sqrt{\sigma_1^2 \cos^2 \alpha + \sigma_2^2 \cos^2 \beta + \sigma_3^2 \cos^2 \gamma - (\sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \cos^2 \beta + \sigma_3 \cos^2 \gamma)^2}. \quad (3.9)$$

## Исследование плоского напряженного состояния

При плоском напряженном состоянии в окрестности точки всегда можно выделить элементарный параллелепипед таким образом, чтобы две его грани были свободны от напряжений (грань, свободную от напряжений, можно назвать *нулевой главной площадкой*), как показано на рис. 3.5. Ограничимся исследованием напряжений для семейства площадок, перпендикулярных к свободной от напряжений грани параллелепипеда (рис. 3.6). Нормальное и касательное напряжения на площадке, нормаль к которой составляет угол  $\alpha$  с осью  $z$ :

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_z + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_z - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_{zy} \sin 2\alpha; \quad (3.10)$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_z - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{zy} \cos 2\alpha. \quad (3.11)$$

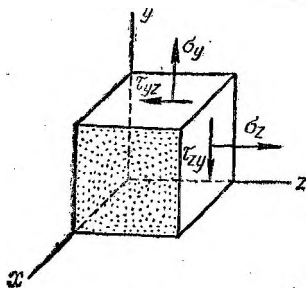


РИС. 3.5

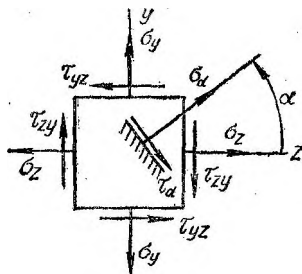


РИС. 3.6

Среди рассматриваемого семейства площадок есть две взаимно перпендикулярные главные площадки, нормали к которым составляют углы  $\alpha'_0$  и  $\alpha''_0 = \alpha'_0 + 90^\circ$  с осью  $z$ . Для определения этих углов служит формула

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = -\frac{2\tau_{zy}}{\sigma_z - \sigma_y}. \quad (3.12)$$

Какой из двух углов ( $\alpha'_0$  или  $\alpha''_0$ ), определяемых формулой (3.12), соответствует большему, а какой — меньшему из главных напряжений для исследуемого семейства площадок, устанавливают, как показано в примере 3.1.

Величины главных напряжений, возникающих на указанных площадках, находят по формуле

$$\sigma_{г.л} = \frac{\sigma_z + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_z - \sigma_y)^2 + 4\tau_{zy}^2}. \quad (3.13)$$

Индексы у главных напряжений устанавливают после вычисления этих напряжений (см. пример 3.1).

В частном случае может оказаться, что одно из главных напряжений, определенных по формуле (3.13), равно нулю. Такой результат укажет, что заданное напряженное состояние одноосное (линей-

ное). Если неравное нулю главное напряжение положительно, имеет место одноосное растяжение ( $\sigma_1 > 0$ ;  $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ ); если отрицательно, — одноосное сжатие ( $\sigma_3 < 0$ ;  $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$ ).

В формулы (3.10) — (3.13) исходные напряжения должны быть подставлены со своими знаками. Касательное напряжение считается положительным, если внешнюю нормаль  $\nu$  к площадке надо повернуть для совпадения с направлением  $\tau$  по часовой стрелке (рис. 3.7).

Формулы (3.10) — (3.13) применимы также и при объемном напряженном состоянии, но лишь при условии, что одна из исходных площадок главная (см. пример 3.1).

Особый практический интерес имеет частный случай плоского напряженного состояния, при котором отличные от нуля главные напряжения противоположны по знаку<sup>1</sup> (нулю равно промежуточное главное напряжение  $\sigma_2$ ). При этом виде напряженного состояния можно выделить элемент таким образом, чтобы на двух его ненулевых гранях были только касательные напряжения (рис. 3.8). На основе сопоставления рис. 3.5 и 3.8 напряженное состояние по рис. 3.8 иногда называют *упрощенным плоским*. Нормальные и касательные напряжения на площадках, перпендикулярных к нулевой грани элемента

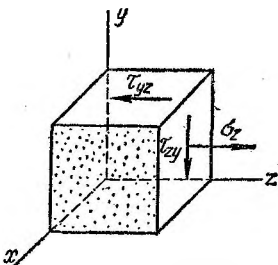


РИС. 3.8

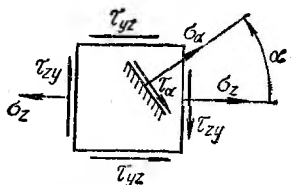


РИС. 3.9

(рис. 3.9), определяют по формулам (3.10), (3.11), полагая в них  $\sigma_y = 0$ . То же относится к формуле (3.12). Главные напряжения определяют из выражений:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{\sigma_z}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_z^2 + 4\tau_{zy}^2}; \\ \sigma_2 &= 0; \\ \sigma_3 &= \frac{\sigma_z}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_z^2 + 4\tau_{zy}^2}. \end{aligned} \right\} \quad (3.14)$$

<sup>1</sup> Такое напряженное состояние возникает в точках бруса в общем случае его нагружения.

Для определения  $\tau_{\max}$  наряду с формулой (3.2) в данном случае можно пользоваться формулой

$$\tau_{\max} = \tau_{13} = \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_z^2 + 4\tau_{zy}^2}. \quad (3.15)$$

Площадка, на которой возникает  $\tau_{\max}$ , принадлежит рассматриваемому семейству.

Частный случай плоского напряженного состояния, при котором отличные от нуля главные напряжения равны по модулю и противоположны по знаку ( $\sigma_1 = -\sigma_2$ ), называют *чистым сдвигом*. При чистом сдвиге можно выделить элемент таким образом, что две его грани будут свободны от напряжений, а на четырех остальных будут только равные между собой (по модулю) касательные напряжения (рис. 3.10).

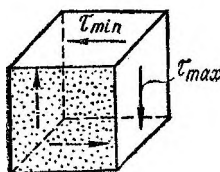


РИС. 3.10

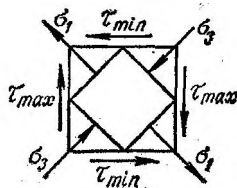


РИС. 3.11

Эти касательные напряжения экстремальны; их значения связаны с главными напряжениями соотношениями

$$\tau_{\max} = |\tau_{\min}| = \sigma_1 = -\sigma_2. \quad (3.16)$$

Взаимное расположение площадок, на которых возникают экстремальные касательные напряжения, и главных площадок показано на рис. 3.11.

При исследовании *линейного (одноосного) напряженного состояния*, как правило, известным (исходным) является главное напряжение ( $\sigma_1$  при одноосном растяжении или  $\sigma_2$  при одноосном сжатии). Для определения напряжений на площадке, нормаль к которой составляет угол  $\alpha$  с направлением главного напряжения, служат формулы (3.3) и (3.4). В этих формулах надо положить  $\sigma_3 = 0$ ; кроме того, при одноосном сжатии вместо  $\sigma_1$  следует подставить  $\sigma_2$  (при подстановке числовых значений необходимо учесть, что  $\sigma_2$  отрицательно).

#### Определение главных напряжений при объемном напряженном состоянии

При произвольных исходных площадках (см. рис. 3.1) главные напряжения находят как корни кубического уравнения:

$$\sigma_{\text{гл}}^3 - I_1 \sigma_{\text{гл}}^2 + I_2 \sigma_{\text{гл}} - I_3 = 0, \quad (3.17)$$

где

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \\ I_2 &= \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 \\ I_3 &= \sigma_x \sigma_y \sigma_z - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{zx}^2 - \sigma_z \tau_{yx}^2 + 2\tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx}. \end{aligned} \right\} \quad (3.18)$$



Величины  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_3$  не зависят от выбора исходных площадок, а потому носят название *инвариантов напряженного состояния*.

При пользовании формулами (3.18) для касательных напряжений следует применять правило знаков, отличное от приведенного выше, а именно: *касательное напряжение считают положительным, если на площадке, внешней нормали к которой совпадает с положительным направлением параллельной этой нормали координатной оси, само напряжение направлено в сторону положительного направления соответствующей координатной оси*. Согласно этому правилу, все касательные напряжения, показанные на рис. 3.1, положительны. Определение положения главных площадок дано в работах [43, 56].

После нахождения главных напряжений максимальное касательное напряжение определяют по формуле (3.2).

**Пример 3.1.** Для заданного напряженного состояния (рис. 3.12) определить величины главных напряжений, положение главных площадок, а также максимальное касательное напряжение.

**Решение.** Напряжение  $\sigma_2$  — одно из главных. Величины двух остальных главных напряжений, площадки действия которых принадлежат серии площадок, параллельных  $\sigma_2$  (рис. 3.13), определяют

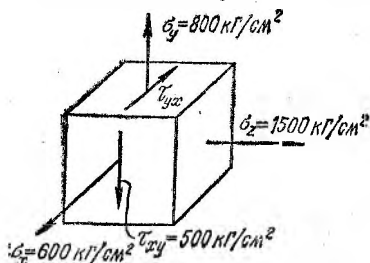


РИС. 3.12

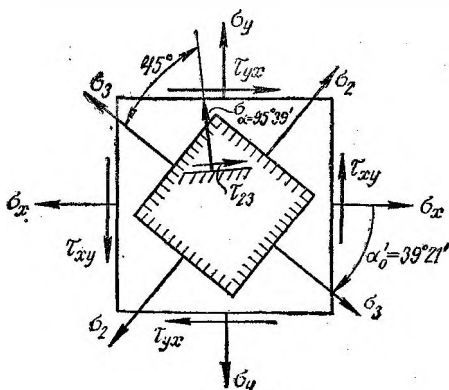


РИС. 3.13

по формуле (3.13) с заменой индексов в соответствии с рис. 3.12, 3.13:

$$\sigma_{гд} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} = \frac{600 + 800}{2} \pm \sqrt{(600 - 800)^2 + 4 \cdot 500^2} = 700 \pm 510;$$

$$\sigma'_{гд} = 1210 \text{ кг/см}^2; \quad \sigma''_{гд} = 190 \text{ кг/см}^2.$$

Сопоставляя величины всех трех главных напряжений, получаем:  $\sigma_1 = \sigma_2 = 1500 \text{ кг/см}^2$ ;  $\sigma_2 = \sigma'_{гд} = 1210 \text{ кг/см}^2$ ;  $\sigma_3 = \sigma''_{гд} = 190 \text{ кг/см}^2$ .

Применяя формулу (3.12), находим положение площадок действия  $\sigma_2$  и  $\sigma_3$  (учитываем, что  $\tau_{xy}$  отрицательно):

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = -\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{-2(-500)}{600 - 800} = -5,0,$$

откуда  $\alpha_0' = -39^\circ 21'$ ;  $\alpha_0'' = 129^\circ 21'$ .

Соответствующие площадки показаны на рис. 3.13. Так как  $\sigma_y > \sigma_x$ , то направление большего из главных напряжений (для рассматриваемой серии площадок)  $\sigma_2$  составляет меньший угол с направлением  $\sigma_y$ , чем с  $\sigma_x$ , т. е. угол  $\alpha_0''$  соответствует площадке действия  $\sigma_2$ .

Максимальное касательное напряжение

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{1500}{2} = 655 \text{ кг/см}^2.$$

Площадка действия  $\tau_{\max}$  не может быть показана на рис. 3.13 (не принадлежит к рассматриваемой серии).

Для семейства площадок, параллельных  $\sigma_1 = \sigma_2$ , наибольшее касательное напряжение

$$\tau_{23} = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} = \frac{1210 - 190}{2} = 510 \text{ кг/см}^2.$$

Площадка, на которой возникает  $\tau_{23}$ , показана на рис. 3.13.

**Пример 3.2.** Для заданного напряженного состояния (рис. 3.14), представляющего собой наложение трех чистых сдвигов во взаимно перпендикулярных плоскостях, определить главные напряжения и максимальные касательные напряжения, если  $\tau_{xy} = \tau_{zx} = 2\tau$  и  $\tau_{yz} = \tau = 40 \text{ н/мм}^2$ .

**Решение.** Поскольку ни одна из исходных площадок не является главной, для определения главных напряжений следует воспользоваться кубическим уравнением (3.17). Предварительно по формулам (3.18) определяем инварианты заданного напряженного состояния:

$$\begin{aligned} I_1 &= 0; \\ I_2 &= -\tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 = \\ &= -(2\tau)^2 - \tau^2 - (2\tau)^2 = -9\tau^2; \\ I_3 &= 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} = 2 \cdot 2\tau \cdot \tau \cdot 2\tau = 8\tau^3. \end{aligned}$$

Итак, получаем следующее кубическое уравнение:

$$\sigma_{\text{гл}}^3 - 9\tau^2\sigma_{\text{гл}} - 8\tau^3 = 0,$$

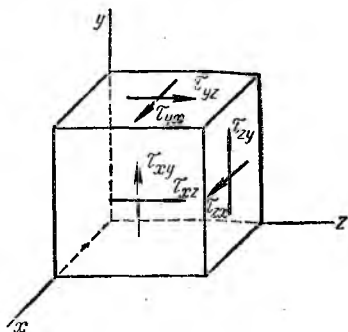


РИС. 3.14

что после подстановки значения  $\tau$  дает

$$\sigma_{\text{ГЛ}}^3 - 9 \cdot 40^2 \sigma_{\text{ГЛ}} - 8 \cdot 40^3 = 0$$

или

$$\sigma_{\text{ГЛ}}^3 - 14\,400 \sigma_{\text{ГЛ}} - 512\,000 = 0.$$

Левую часть последнего уравнения можно разложить на множители:

$$(\sigma_{\text{ГЛ}} + 40)(\sigma_{\text{ГЛ}}^2 - 40\sigma_{\text{ГЛ}} - 12\,800) = 0.$$

Приравнивая нулю первый сомножитель, находим один из корней уравнения:

$$\sigma'_{\text{ГЛ}} = -40 \text{ н/мм}^2.$$

Решив квадратное уравнение

$$\sigma_{\text{ГЛ}}^2 - 40\sigma_{\text{ГЛ}} - 12\,800 = 0,$$

найдем остальные два корня:

$$\sigma_{\text{ГЛ}} = 20 \pm \sqrt{400 + 12\,800} = (20 \pm 115) \text{ н/мм}^2$$

или

$$\sigma''_{\text{ГЛ}} = 135 \text{ н/мм}^2; \sigma'''_{\text{ГЛ}} = -95 \text{ н/мм}^2.$$

С учетом правила индексов для главных напряжений (см. стр. 61) окончательно получим:

$$\sigma_1 = 135 \text{ н/мм}^2; \sigma_2 = -40 \text{ н/мм}^2; \sigma_3 = -95 \text{ н/мм}^2.$$

Максимальное касательное напряжение

$$\tau_{\text{max}} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{135 - (-95)}{2} = 115 \text{ н/мм}^2.$$

В случаях, когда кубическое уравнение для определения  $\sigma_{\text{ГЛ}}$  не раскладывается на множители, его решают либо подбором, либо применяя специальные методы решения кубических уравнений, рассматриваемые в высшей алгебре.

### § 3.2. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ, СВЯЗЬ МЕЖДУ НАПРЯЖЕНИЯМИ И ДЕФОРМАЦИЯМИ. ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ ДЕФОРМАЦИИ

#### Линейные и угловые деформации

При нагружении упругого тела, закрепленного таким образом, что оно не может перемещаться как жесткое целое, перемещения отдельных точек тела являются следствием его деформаций. Удобно

представить тело в виде бесконечно большого числа элементарных параллелепипедов; в общем случае каждый из этих параллелепипедов деформируется различно (неоднородное деформированное состояние тела). Деформация элементарного параллелепипеда состоит в изменении длин его ребер и в искажении первоначально прямых углов

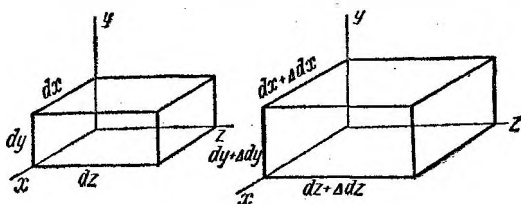


РИС. 3.15

между его гранями. Относительные удлинения (укорочения) ребер элементарного параллелепипеда (рис. 3.15)

$$\epsilon_x = \frac{\Delta dx}{dx}; \quad \epsilon_y = \frac{\Delta dy}{dy}; \quad \epsilon_z = \frac{\Delta dz}{dz}$$

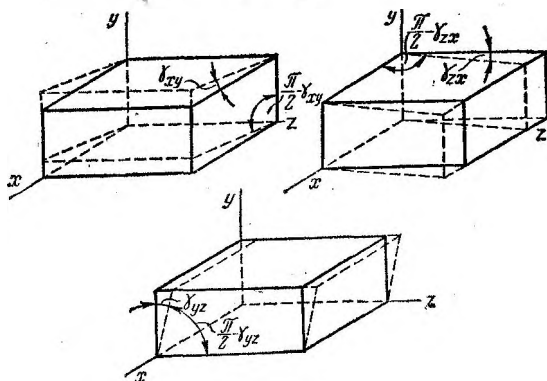


РИС. 3.16

носят название *линейных деформаций*<sup>1</sup> в данной точке (той точке, в окрестности которой выделен элементарный параллелепипед). Положительными считают *относительные удлинения*.

Угловая деформация характеризуется уменьшением (считается положительной) или увеличением угла между гранями элемента (рис. 3.16);  $\gamma_{xy}$ ,  $\gamma_{zx}$ ,  $\gamma_{yz}$  — *углы сдвига*.

<sup>1</sup> Встречающиеся в учебной литературе термины «относительная деформация» или «относительная линейная деформация» противоречат терминологии теории упругости, и их применение нежелательно.

Через любую точку тела можно провести три взаимно перпендикулярные оси, углы между которыми при деформации не изменяются, — это так называемые *главные оси деформации*.

Линейные деформации в направлениях указанных осей называют *главными деформациями*; их обозначают  $\epsilon_1 \geq \epsilon_2 \geq \epsilon_3$ . Для данной точки тела  $\epsilon_1$  наибольшая, а  $\epsilon_3$  — наименьшая (в алгебраическом смысле) линейные деформации. Для *изотропного* тела направления главных деформаций и главных напряжений совпадают.

Различают *трехосное* (все три главные деформации отличны от нуля), *двухосное* (одна из главных деформаций равна нулю) и *одноосное* (лишь одна из главных деформаций не равна нулю) деформированные состояния. Отметим, что при одноосном растяжении бруса возникает одноосное (линейное) напряженное состояние ( $\sigma_1 > 0$ ;  $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ ) и трехосное деформированное состояние ( $\epsilon_1 > 0$ ;  $\epsilon_2 = \epsilon_3 = -\mu\epsilon_1$ ).

Относительное изменение объема в окрестности данной точки тела (объемная деформация  $\theta$ ) связано с линейными деформациями зависимостью

$$\theta = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z. \quad (3.19)$$

При экспериментальном определении главных напряжений в точках поверхности нагруженного тела широко применяют проволочные тензодатчики: по показаниям электротензометрической установки определяют линейные деформации в направлениях баз датчиков, затем находят главные деформации и с помощью обобщенного

закона Гука (см. стр. 71) определяют главные напряжения. В общем случае, когда направления главных деформаций заранее неизвестны,<sup>1</sup> для нахождения их величин и направлений должны быть определены линейные деформации по трем направлениям, т. е. в исследуемом месте поверхности тела должны быть наклеены три датчика (розетка датчиков). В частности, для этой цели пользуются розеткой, в которой два датчика взаимно перпендикулярны, а третий составляет с ними углы по  $45^\circ$ .

Связь между деформациями  $\epsilon_z, \epsilon_y, \epsilon_{45^\circ}$  в направлениях баз датчиков (рис. 3.17) и главными деформациями

$$\epsilon_{гп} = \frac{\epsilon_z + \epsilon_y}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\epsilon_{45^\circ} - \epsilon_z)^2 + (\epsilon_{45^\circ} - \epsilon_y)^2}. \quad (3.20)$$

Знак плюс в формуле (3.20) определяет главную деформацию в направлении, для которого

$$\frac{\epsilon_z + \epsilon_y}{2 \cos 2\alpha_0} > 0.$$

<sup>1</sup> В подавляющем большинстве случаев ось, перпендикулярная к поверхности тела, является одной из главных осей деформации; таким образом, речь идет о направлениях двух главных осей, лежащих в плоскости, касательной к поверхности тела.

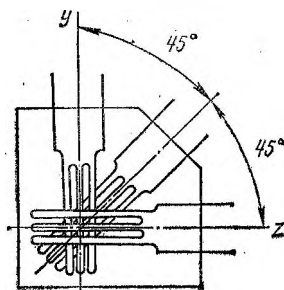


РИС. 3.17

Если обе найденные главные деформации положительны, их обозначают  $\epsilon_1$  и  $\epsilon_2$ , если отрицательны, —  $\epsilon_2$  и  $\epsilon_3$ , если одна положительна, а другая отрицательна, —  $\epsilon_1$  и  $\epsilon_3$ .<sup>1</sup>

Величины двух углов ( $\alpha'_0$  и  $\alpha''_0 = \alpha'_0 + 90^\circ$ ), дающих положение главных осей деформации, определяются на основании формулы

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2\epsilon_{45^\circ} - \epsilon_z - \epsilon_y}{\epsilon_z - \epsilon_y}. \quad (3.21)$$

Сведения по обработке показаний, получаемых с помощью равноугольной розетки датчиков (три датчика, составляющих друг с другом углы по  $120^\circ$ ), приведены в работе [43].

В случае необходимости по известным главным деформациям (например,  $\epsilon_1$  и  $\epsilon_2$ ) легко определить деформацию  $\epsilon_\alpha$  в произвольном направлении, составляющем угол  $\alpha$  с направлением  $\epsilon_1$ ,

$$\epsilon_\alpha = \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{2} + \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{2} \cos 2\alpha. \quad (3.22)$$

#### Зависимости между деформациями и напряжениями для упругого тела

Связь между линейными деформациями и нормальными напряжениями в направлениях этих деформаций выражается обобщенным законом Гука:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu (\sigma_y + \sigma_z)]; \\ \epsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu (\sigma_z + \sigma_x)]; \\ \epsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu (\sigma_x + \sigma_y)]. \end{aligned} \right\} \quad (3.23)$$

Углы сдвига (см. рис. 3.16) связаны с соответствующими касательными напряжениями следующими зависимостями (закон Гука при сдвиге):

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}; \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}; \quad \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}. \quad (3.24)$$

Между тремя упругими постоянными  $E$ ,  $G$  и  $\mu$  (числовые значения см. в табл. 2.1) для изотропного тела существует зависимость

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}. \quad (3.25)$$

<sup>1</sup> Строго говоря, индексы следовало бы устанавливать после сопоставления величин, определяемых по формуле (3.20), с величиной главной деформации, перпендикулярной к поверхности тела, но так как в большинстве случаев последнюю не определяют, то, условно принимая ее равной нулю, приходим к приведенному правилу индексов.

На основании формул (3.19) и (3.23) для объемной деформации получается зависимость

$$\theta = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3K}, \quad (3.26)$$

где

$$K = \frac{E}{3(1-2\mu)} \quad (3.27)$$

так называемый *объемный модуль упругости*.

Определение главных напряжений при плоском напряженном состоянии по известным из эксперимента (см. стр. 70) главным деформациям (например,  $\epsilon_1$  и  $\epsilon_2$ ) производят по формулам, вытекающим из выражений (3.23):

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{E(\epsilon_1 + \mu\epsilon_2)}{1 - \mu^2}; \\ \sigma_2 &= \frac{E(\epsilon_2 + \mu\epsilon_1)}{1 - \mu^2}. \end{aligned} \right\} \quad (3.28)$$

#### Потенциальная энергия деформации упругого тела

Удельная потенциальная энергия деформации (т. е. энергия, отнесенная к единице объема тела) для некоторой точки упругого тела определяется по формуле

$$u = \frac{1}{2E} [\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - 2\mu(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x)] + \frac{1}{2G} (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2). \quad (3.29)$$

Если известны главные напряжения, формула (3.29) упрощается

$$u = \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)]. \quad (3.30)$$

Полная удельная потенциальная энергия деформации может быть разделена на удельную энергию, обусловленную изменением объема элементарного параллелепипеда ( $u_{об}$ ) и изменением его формы ( $u_{\phi}$ ). Эти части полной удельной энергии определяют по формулам:

$$u_{об} = \frac{1-2\mu}{6E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2; \quad (3.31)$$

$$u_{\phi} = \frac{1+\mu}{6E} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]. \quad (3.32)$$

**ПРАКТИЧЕСКИЕ РАСЧЕТЫ НА СРЕЗ И СМЯТИЕ**

**§ 4.1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ. ОСНОВНЫЕ РАСЧЕТНЫЕ ЗАВИСИМОСТИ**

На срез рассчитывают в основном различные соединительные элементы конструкций, в частности штифты, болты (плотно вставленные в отверстия), заклепки, а также сварные соединения валиковыми (угловыми) швами (см. § 4.3) и соединения элементов деревянных конструкций (см. § 4.4).

Для соединительных элементов типа болтов, заклепок и т. п., разрушение которых от среза возможно по плоскости поперечного сечения, принимают, что в этом сечении возникает лишь один внутренний силовой фактор — поперечная сила  $Q$  — и соответствующие касательные напряжения распределены по сечению равномерно.

Условие прочности выражается формулой

$$\tau_{\text{ср}} = \frac{Q}{F_{\text{ср}}} \leq [\tau_{\text{ср}}], \quad (4.1)$$

где  $\tau_{\text{ср}}$  — расчетное напряжение среза (среднее касательное напряжение в сечении);

$Q$  — поперечная (сдвигающая) сила;

$F_{\text{ср}}$  — расчетная площадь среза;

$[\tau_{\text{ср}}]$  — допускаемое напряжение среза.

В соединениях, несущих осевую нагрузку, при нескольких ( $z$ ) одинаковых соединительных элементах

$$Q = \frac{P}{z},$$

где  $P$  — общая нагрузка соединения (см. примеры 4.1 и 4.3).

Для стальных болтов, штифтов и подобных элементов машиностроительных конструкций при статической нагрузке можно принимать  $[\tau_{\text{ср}}] = (0,25 \div 0,30) \sigma_T$ , где  $\sigma_T$  — предел текучести материала болта и т. п.

В некоторых случаях в формуле (4.1) под  $F_{\text{ср}}$  следует понимать площадь продольного сечения соединительной детали (см. пример 4.2).

Детали, рассчитываемые на срез, и соединяемые ими элементы конструкций во многих случаях должны рассчитываться также на смятие. При расчете на смятие принимают, что силы взаимодействия между соприкасающимися под нагрузкой деталями равномерно распределены по поверхности соприкосновения и в каждой точке нор-



мальны к этой поверхности. Силу взаимодействия, приходящуюся на единицу площади поверхности соприкосновения деталей, называют напряжением смятия. В тех случаях, когда контакт ненагруженных деталей происходит не по поверхности, а по линии (например, контакт зубьев зубчатых колес) или в точке (например, контакт шарика и кольца шарикового подшипника), вместо условных напряжений смятия определяют так называемые контактные напряжения по формулам, полученным методами теории упругости. Вопрос о контактных напряжениях и деформациях в настоящем справочнике не рассматривается; основные расчетные формулы даны в справочниках [32, 56, 59], полное изложение теории контактных напряжений и деформаций приведено в книге [43].

Расчет на смятие выполняется по формуле

$$\sigma_{\text{см}} = \frac{P}{zF_{\text{см}}} \ll [\sigma_{\text{см}}], \quad (4.2)$$

где  $\sigma_{\text{см}}$  — расчетное напряжение смятия;

$P$  — сила, передаваемая соединением;

$z$  — число одинаковых соединительных деталей, передающих силу  $P$ ;

$[\sigma_{\text{см}}]$  — допускаемое напряжение смятия.

Из принятого допущения о характере распределения сил взаимодействия по поверхности соприкосновения деталей следует, что если контакт деталей осуществляется по поверхности полуцилиндра, то расчетная площадь смятия ( $F_{\text{см}}$ ) равна площади проекции поверхности контакта на плоскость диаметрального сечения, т. е. равна произведению диаметра цилиндрической поверхности на длину ее образующей.

При работе на смятие пары деталей, материалы которых различны, расчет ведется по напряжению смятия для менее прочного материала.

Для болтовых, шпоночных и штифтовых соединений при постоянной нагрузке можно принимать: для стали 15, 20, 25, Ст. 3, Ст. 4  $[\sigma_{\text{см}}] = 1000 - 1200 \text{ кг/см}^2$ ; для стали 35, 40, 45, 50, Ст. 5, Ст. 6  $[\sigma_{\text{см}}] = 1400 - 1650 \text{ кг/см}^2$ ; для чугуна  $[\sigma_{\text{см}}] = 600 - 800 \text{ кг/см}^2$ .

**Пример 4.1.** Определить требуемый диаметр пальцев (2) в соединении сплошного (1) и трубчатого (3) стержней (рис. 4.1). Принять

$[\tau_{\text{ср}}] = 850 \text{ кг/см}^2$ ,  $[\sigma_{\text{см}}] = 1650 \text{ кг/см}^2$ . При принятом диаметре пальцев проверить прочность соединяемых стержней при  $[\sigma_p] = 1400 \text{ кг/см}^2$ .

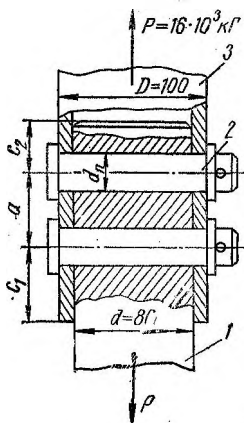


РИС. 4.1

Решение. 1. Условие прочности на срез при двух пальцах, каждый из которых работает на срез по двум плоскостям,

$$\tau_{\text{ср}} = \frac{P}{2 \left( 2 \frac{\pi}{4} d_{\text{п}}^2 \right)} \leq [\tau_{\text{ср}}],$$

откуда

$$d_{\text{п}} \geq \sqrt{\frac{P}{\pi [\tau_{\text{ср}}]}} = \sqrt{\frac{16 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 850}} = 2,46 \text{ см.}$$

2. Условие прочности на смятие

$$\sigma_{\text{см}} = \frac{P}{2 \cdot 2d_{\text{п}} \left( \frac{D-d}{2} \right)} \leq [\sigma_{\text{см}}],$$

откуда

$$d_{\text{п}} = \frac{P}{2 [\sigma_{\text{см}}] (D-d)} = \frac{16 \cdot 10^3}{2 \cdot 1650 (10-8)} = 2,42 \text{ см.}$$

С некоторым округлением принимаем  $d_{\text{п}} = 25 \text{ мм}$ .

3. Проверка на растяжение стержня 1 по ослабленному сечению:

$$\sigma_{\text{р1}} = \frac{P}{F_{\text{нетто}}} = \frac{P}{\frac{\pi d^2}{4} - dd_{\text{п}}} = \frac{16 \cdot 10^3}{\frac{3,14}{4} 8^2 - 8 \cdot 2,5} = 530 \text{ кг/см}^2 < [\sigma_{\text{р}}].$$

4. Проверка на растяжение стержня 3 по ослабленному сечению:

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{р3}} &= \frac{P}{F_{\text{Знетто}}} = \frac{P}{\frac{\pi}{4} (D^2 - d^2) - (D-d) d_{\text{п}}} = \\ &= \frac{16 \cdot 10^3}{\frac{3,14}{4} (10^2 - 8^2) - (10 - 8) \cdot 2,5} = 687 \text{ кг/см}^2 < [\sigma_{\text{р}}]. \end{aligned}$$

Примечание. Минимально допустимые значения размеров  $c_1$ ,  $a$ ,  $c_2$  (см. рис. 4.1) определяют из условия прочности на срез (по продольным сечениям) концевых частей стержней 1, 3 и их участков между пальцами. Расчетные зависимости:

$$\tau_{1\text{ср}} = \frac{0,5P}{2(c_1 - 0,5d_{\text{п}})(D-d)} \leq [\tau_{\text{ср}}];$$

$$\tau_{2\text{ср}} = \frac{0,5P}{2(c_2 - 0,5d_{\text{п}})d} \leq [\tau_{\text{ср}}];$$

$$\tau_{3\text{ср}} = \frac{0,5P}{2(a - d_{\text{п}})d} \leq [\tau_{\text{ср}}];$$

$$\tau_{4\text{ср}} = \frac{0,5P}{2(a - d_{\text{п}})(D-d)} \leq [\tau_{\text{ср}}].$$

Размер  $a$  принимается большим из получаемых по последним двум зависимостям. Допускаемые напряжения на срез здесь для обоих стержней предполагаются одинаковыми.

**Пример 4.2.** Определить из условия прочности штифтового соединения (рис. 4.2) при  $[\tau_{\text{ср}}] = 750 \text{ кг/см}^2$  и  $[\sigma_{\text{см}}] = 800 \text{ кг/см}^2$  допускаемое значение силы  $T$ , приложенной к вильчатому кривошипу.

**Решение.** Окружное усилие, передаваемое штифтом, связано с силой  $T$  соотношением

$$T = P \frac{0,5d_{\text{в}}}{h}.$$

Допускаемое значение силы  $P$  из условия прочности штифта на срез по продольному сечению

$$[P]_{\text{ср}} = dl [\tau_{\text{ср}}] = 1,2 \cdot 5 \cdot 750 = 4500 \text{ кг}.$$

Допускаемое значение силы  $P$  из условия прочности соединения на смятие (поверхность контакта, через которую передается сила  $P$ ,

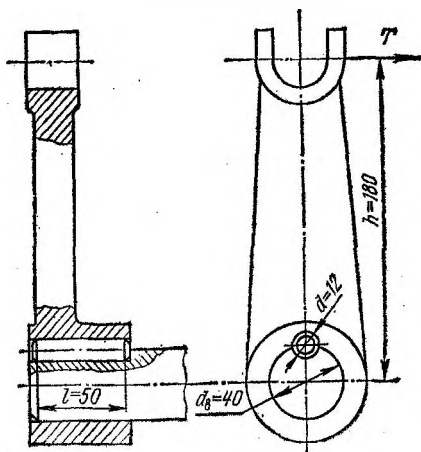


РИС. 4.2

представляет собой четвертую часть поверхности цилиндра размерами  $d$  и  $l$ ; для полуцилиндра, как указано на стр. 74, расчетная площадь смятия равна  $dl$ , следовательно, в данном случае эта площадь равна  $0,5dl$ );

$$[P]_{\text{см}} = \frac{dl}{2} [\sigma_{\text{см}}] = \frac{1,2 \cdot 5}{2} 800 = 2400 \text{ кг}.$$

Таким образом,  $[P] = [P]_{\text{см}} = 2400 \text{ кг}$

и

$$[T] = [P] \frac{0,5d_{\text{в}}}{h} = 2400 \frac{0,5 \cdot 4}{18} = 266 \text{ кг}.$$

## § 4.2. РАСЧЕТ ЗАКЛЕПОЧНЫХ СОЕДИНЕНИЙ ПРИ ОСЕВОМ НАГРУЖЕНИИ

Расчеты на срез и смятие основаны на предположениях, указанных в § 4.1. Соединяемые элементы рассчитывают на растяжение (сжатие) по сечениям, ослабленным заклепочными отверстиями; кроме того, сжатые элементы должны быть рассчитаны на устойчивость (см. гл. 12).

На основе формул (4.1), (4.2) и дополнительных указаний, приведенных в § 4.1, получаются следующие зависимости для расчета заклепочных соединений на срез и смятие:

$$\tau_{\text{ср}} = \frac{P}{zm \frac{\pi}{4} d^2} \leq [\tau_{\text{ср}}]; \quad (4.3)$$

$$\sigma_{\text{см}} = \frac{P}{zd\delta} \leq [\sigma_{\text{см}}]. \quad (4.4)$$

В формулах (4.3) и (4.4)

$P$  — общая нагрузка соединения;

$z$  — число заклепок, передающих усилие  $P$  (для соединений встык  $z$  — число заклепок по одну сторону стыка);

$m$  — число плоскостей среза одной заклепки;

$d$  — расчетный диаметр заклепки, равный диаметру отверстия под заклепку;

$\delta$  — наименьшая суммарная толщина элементов, сдвигаемых в одном направлении.

Для элементов строительных конструкций и стальных конструкций подъемно-транспортных сооружений допускаемые напряжения при постоянной нагрузке имеют следующие значения (материал соединяемых элементов и заклепок — сталь Ст. 3):

при продавленных (пробитых) отверстиях

$$[\tau_{\text{ср}}] = 1000 \text{ кг/см}^2; \quad [\sigma_{\text{см}}] = 2800 \text{ кг/см}^2;$$

при сверленных или рассверленных (после продавливания) отверстиях

$$[\tau_{\text{ср}}] = 1400 \text{ кг/см}^2; \quad [\sigma_{\text{см}}] = 3200 \text{ кг/см}^2.$$

При проектном расчете заклепочного соединения обычно задаются диаметром заклепок — принимают  $d = (1,5 \div 3) \delta_{\text{min}}$  с округлением по ГОСТ. Наиболее часто встречаются следующие стандартные диаметры заклепочных отверстий: 14, 17, 20, 23, 26 мм.

Указания о размещении заклепок и прочие данные по конструированию заклепочных соединений приведены, например, в справочном пособии [49].

Допускаемое усилие на одну заклепку:  
из условия прочности на срез

$$[Q_{\text{ср}}] = m \frac{\pi d^2}{4} [\tau_{\text{ср}}]; \quad (4.5)$$

из условия прочности на смятие

$$[Q_{\text{см}}] = d\delta [\sigma_{\text{см}}]. \quad (4.6)$$

По меньшему из допускаемых усилий определяется требуемое число заклепок соединения, передающего силу  $P$ :

$$z = \frac{P}{[Q]_{\min}}. \quad (4.7)$$

**Пример 4.3.** Определить требуемое число заклепок расчетного диаметра  $d = 14$  мм в соединении встык с двумя накладками двух швеллеров № 18 (рис. 4.3), нагруженных растягивающими силами  $P$ . Заклепочное соединение должно быть равнопрочным соединяемым швеллерам. Материал швеллеров и заклепок — сталь Ст. 3; допускаемое напряжение на растяжение для швеллеров  $[\sigma] = 1600$  кг/см<sup>2</sup>; заклепочные отверстия сверленные.

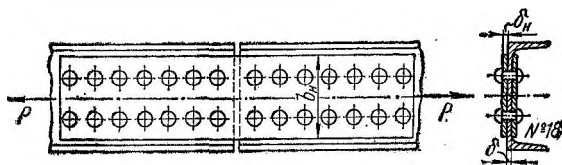


РИС. 4.3

**Решение.** Допускаемое по условию прочности на растяжение значение силы  $P$ :

$$[P] = F_{\text{нетто}} [\sigma].$$

При расположении заклепок по две в ряду (см. рис. 4.3) площадь ослабленного сечения швеллера

$$F_{\text{нетто}} = F - 2d\delta = 20,5 - 2 \cdot 1,4 \cdot 0,5 = 19,1 \text{ см}^2;$$

здесь  $F = 20,5 \text{ см}^2$  — площадь сечения швеллера № 18 по ГОСТ 8240—56\*.

$$[P] = 19,1 \cdot 1600 = 30\,600 \text{ кг}.$$

Приняв для накладок сталь Ст. 3 и по конструктивным соображениям ширину накладки  $b_n = 140$  мм, определим из условия прочности накладки на растяжение требуемую ее толщину:

$$(\delta_n b_n - 2\delta_n d) [\sigma] = \frac{[P]}{2},$$

откуда

$$\delta_n = \frac{[P]}{2[\sigma](b_n - 2d)} = \frac{30\,600}{2 \cdot 1600(14 - 2 \cdot 1,4)} = 0,853 \text{ см} \approx 9 \text{ мм}.$$

Допускаемое усилие для одной заклепки по формулам (4.5) и (4.6) при  $[\tau_{\text{ср}}] = 1400$  кг/см<sup>2</sup> и  $[\sigma_{\text{см}}] = 3200$  кг/см<sup>2</sup>:

$$[Q]_{\text{ср}} = m \frac{\pi d^2}{4} [\tau_{\text{ср}}] = 2 \frac{3,14 \cdot 1,4^2}{4} 1400 = 4300 \text{ кг};$$

$$[Q]_{\text{см}} = d\delta [\sigma_{\text{см}}] = 1,4 \cdot 0,5 \cdot 3200 = 2240 \text{ кг}.$$

Таким образом,

$$[Q]_{\min} = [Q]_{\text{см}} = 2240 \text{ кг}$$

и требуемое число заклепок по одну сторону стыка (см. формулу 4.7)

$$z = \frac{[P]}{[Q]_{\min}} = \frac{30\,600}{2240} \approx 14,$$

т. е. заклепки будут расположены в 7 рядов. Конструкция стыкового узла получается неудачной: во-первых, узел имеет большую длину; во-вторых, при большом числе рядов равномерность распределения усилия между заклепками (одна из основных расчетных предпосылок) существенно нарушается. Если принять заклепки диаметром 19 мм (диаметр отверстий 20 мм), то требуемое число заклепок уменьшится до 10 (5 рядов) и конструкция получится более рациональной. Правда, за счет несколько большего ослабления швеллеров допускаемая нагрузка понизится, но незначительно — всего на 3,27%.

#### §. 4.3. РАСЧЕТ СВАРНЫХ УГЛОВЫХ (ВАЛИКОВЫХ) ШВОВ В СОЕДИНЕНИЯХ, НАГРУЖЕННЫХ ОСЕВЫМИ СИЛАМИ

Угловые (валиковые) швы применяются в соединениях внахлестку. В зависимости от расположения шва по отношению к линии действия силы различают швы: лобовые (рис. 4.4, а); фланговые, или

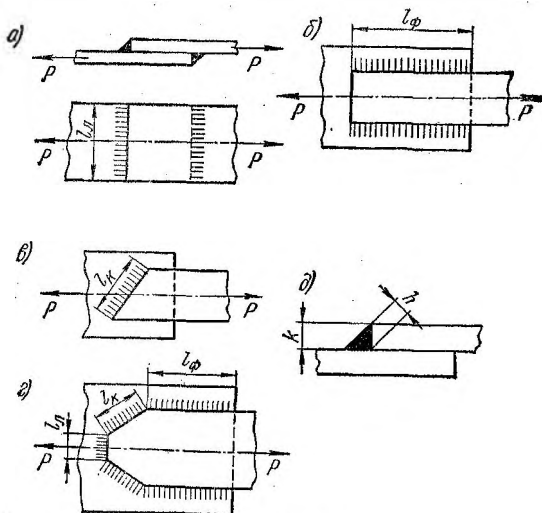


РИС. 4.4

фланговые (рис. 4.4, б); косые (рис. 4.4, в). Соединение, в котором применены одновременно все перечисленные типы швов (или хотя бы два из них), называют *комбинированным* (рис. 4.4, г).

В большинстве случаев сечение углового шва представляет собой равнобедренный прямоугольный треугольник (рис. 4.4, д). Катет шва ( $k$ ), называемый также *толщиной шва*, обычно равен (иногда несколько меньше) толщине привариваемого элемента. Швы с катетом  $k < 3$  мм применяют лишь для ненагруженных соединений или при очень малых толщинах свариваемых элементов. Толстые швы применять нецелесообразно, практически  $k_{\max} \leq 20$  мм.

Расчет всех угловых швов ведется в предположении возможности их разрушения по плоскости, проходящей через биссектрису прямого угла треугольного сечения шва, т. е. расчетная толщина шва  $h \approx 0,7k$  (см. рис. 4.4, д). Условие прочности для всех приведенных типов швов записывается одинаково (в предположении, что для всех швов соединения катет шва имеет одно и то же значение):

$$\tau = \frac{P}{0,7kl} \leq [\tau_3], \quad (4.8)$$

где  $l$  — длина периметра шва; для рассмотренных типов швов соответственно:  $l = 2l_{\text{л}}$  (по рис. 4.4, а);  $l = 2l_{\text{ф}}$  (по рис. 4.4, б);  $l = l_{\text{к}}$  (по рис. 4.4, в);  $l = 2(l_{\text{ф}} + l_{\text{к}}) + l_{\text{л}}$  для комбинированного соединения (по рис. 4.4, г).

Некоторые особенности имеет расчет швов для прикрепления элементов несимметричного сечения; расчет таких швов показан в примере 4.4.

Швы короче 30 мм не применяют. Максимальная длина флангового шва не должна превышать 50  $k$ .

Допускаемое напряжение на срез для сварных швов  $[\tau_3]$  при статической нагрузке принимается как некоторая часть от допускаемого напряжения на растяжение  $[\sigma]$  для основного металла конструкции.

При сварке на автоматах или полуавтоматах под слоем флюса, а также вручную электродами высшего качества (Э42А или Э50А)  $[\tau_3] = 0,65[\sigma]$ .

При сварке толстопокрытыми электродами обычного качества (Э42 или Э50)  $[\tau_3] = 0,6[\sigma]$ .

Данные по выбору  $[\tau_3]$  при переменных напряжениях приведены в работе [40].

**Пример 4.4.** Определить требуемые длины ( $l_{\text{ф1}}$  и  $l_{\text{ф2}}$ ) фланговых швов для прикрепления растянутого стержня, состоящего из двух неравнобоких уголков, к фасонному листу узла фермы (рис. 4.5). Учесть наличие лобового шва. Материал стержня — сталь Ст. 3,  $[\sigma] = 1600$  кг/см<sup>2</sup>; сварка выполнена на полуавтомате под слоем флюса. Сварное соединение должно быть равнопрочно привариваемому стержню.

**Решение.** Допускаемое значение растягивающего усилия

$$[N] = 2F_{\text{уг}}[\sigma] = 2 \cdot 12,6 \cdot 1600 = 40\,300 \text{ кг};$$

здесь площадь поперечного сечения одного уголка  $F_{\text{уг}} = 12,6$  см<sup>2</sup> принята по ГОСТ 8510 — 57.

Примем катет сварного шва равным толщине полки уголка  $k = 8$  мм. Допускаемое напряжение на срез для шва  $[\tau_s] = 0,65[\sigma] = 0,65 \cdot 1600 = 1040$  кг/см<sup>2</sup>.

Допускаемое усилие для лобового шва

$$[P_{л}] = 0,7kl_{л}[\tau_s] = 0,7 \cdot 0,8 \cdot 10 \cdot 1040 = 5830 \text{ кг.}$$

Усилие, которое должно быть воспринято фланговыми швами (для одного уголка),

$$P_{\Phi} = \frac{[N]}{2} - [P_{л}] = \frac{40300}{2} - 5830 = 14320 \text{ кг.}$$

Это усилие распределяется между фланговыми швами обратно пропорционально расстояниям от них до продольной оси уголка,

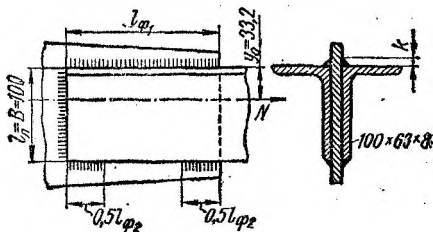


РИС. 4.5

проходящей, как известно, через центры тяжести его поперечных сечений:

$$P_{\Phi 1} = P_{\Phi} \frac{b - y_0}{b} = 14320 \frac{10 - 3,32}{10} = 9570 \text{ кг.};$$

$$P_{\Phi 2} = P_{\Phi} \frac{y_0}{b} = 14320 \frac{3,32}{10} = 4750 \text{ кг.}$$

Длины фланговых швов

$$l_{\Phi 1} = \frac{P_{\Phi 1}}{0,7k[\tau_s]} = \frac{9570}{0,7 \cdot 0,8 \cdot 1040} = 16,3 \text{ см.};$$

$$l_{\Phi 2} = \frac{P_{\Phi 2}}{0,7k[\tau_s]} = \frac{4750}{0,7 \cdot 0,8 \cdot 1040} = 8,1 \text{ см.}$$

#### §. 4.4. РАСЧЕТ СОЕДИНЕНИЙ ЭЛЕМЕНТОВ ДЕРЕВЯННЫХ КОНСТРУКЦИЙ

Расчетные напряжения скалывания (применительно к деревянным конструкциям принято говорить не срез, а скалывание) и смятия определяются, как правило, так же, как и в рассмотренных выше расчетах в предположении равномерного распределения напряжений по площадкам скалывания и смятия. Особенностью расчета на проч-



ность является необходимость учитывать при выборе допустимых напряжений ориентировку площадок скалывания и смятия по отношению к волокнам бруса.

Допускаемое напряжение смятия по направлению, составляющему угол  $\alpha$  с волокнами бруса (т. е. для площадки, нормаль к кото-

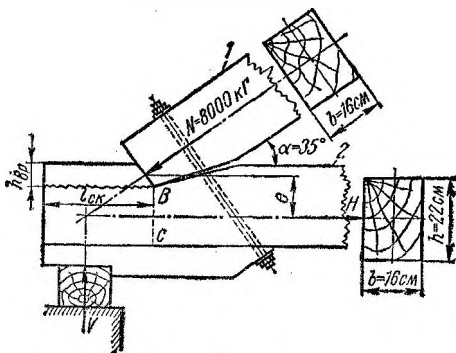


РИС. 4.6

рой составляет угол  $\alpha$  с волокнами), определяется по эмпирической формуле

$$[\sigma_{см}]_{\alpha} = \frac{[\sigma_{см}]}{1 + \left( \frac{[\sigma_{см}]}{[\sigma_{см}]_{90}} - 1 \right) \sin^3 \alpha}, \quad (4.9)$$

где  $[\sigma_{см}]$  — допускаемое напряжение смятия вдоль волокон;

$[\sigma_{см}]_{90}$  — то же перпендикулярно волокнам.

По аналогичной формуле определяется допускаемое напряжение скалывания при площадке скалывания, расположенной под углом  $\alpha$  к направлению волокон:

$$[\tau_{ск}]_{\alpha} = \frac{[\tau_{ск}]}{1 + \left( \frac{[\tau_{ск}]}{[\tau_{ск}]_{90}} - 1 \right) \sin^3 \alpha}, \quad (4.10)$$

где  $[\tau_{ск}]$  — допускаемое напряжение скалывания вдоль волокон;

$[\tau_{ск}]_{90}$  — то же поперек волокон.

Для древесины сосны и ели при влажности 15% допускаемые напряжения имеют следующие значения:

$$\begin{aligned} [\sigma_{см}] &= 130 \text{ кг/см}^2; & [\sigma_{см}]_{90} &= 18 \text{ кг/см}^2 \\ [\tau_{ск}] &= 24 \text{ кг/см}^2; & [\tau_{ск}]_{90} &= 12 \text{ кг/см}^2. \end{aligned}$$

При расчетах, в которых не учитываются временные нагрузки сооружения, указанные допускаемые напряжения должны быть снижены на 20%. Сведения о влиянии увлажнения древесины, особых

условий работы и расчета сооружений приведены в нормах расчета [64].

В некоторых типах соединений, например в лобовых врубках (рис. 4.6), касательные напряжения распределены по длине площадки скалывания весьма неравномерно. При расчете по средним скалывающим напряжениям следует снижать допускаемое напряжение  $[\tau_{ск}]$ , умножая его на коэффициент  $k_{ск} < 1$ , зависящий от отношения  $\frac{l_{ск}}{e}$ , где  $e$  — расстояние между точкой приложения силы  $N$  и линией действия силы (см. рис. 4.6):

$\frac{l_{ск}}{e}$	3 и менее	4	5	6	8	10
$k_{ск}$	0,57	0,50	0,44	0,40	0,33	0,29

**Пример 4.5.** Определить глубину вырубki  $h_{вр}$  стропильной ноги (1) в затяжку (2) и длину  $l_{ск}$  выступающей части затяжки (см. рис. 4.6). Влияние стяжной шпильки не учитывать.

**Решение.** Определяем размер  $h_{вр}$  из расчета на смятие. Расчет ведется для площадки смятия, принадлежащей затяжке, так как равная ей площадка смятия стропильной ноги перпендикулярна к волокнам и для нее допускаемое напряжение смятия выше:

$$F_{см} = \frac{h_{вр} b}{\cos \alpha} \geq \frac{N}{[\sigma_{см}]_{\alpha}}$$

или

$$h_{вр} \geq \frac{N \cos \alpha}{b [\sigma_{см}]_{\alpha}}.$$

По формуле (4.9) имеем:

$$[\sigma_{см}]_{\alpha} = \frac{[\sigma_{см}]}{1 + \left( \frac{[\sigma_{см}]}{[\sigma_{см}]_{90}} - 1 \right) \sin^2 \alpha} = \frac{130}{1 + \left( \frac{130}{18} - 1 \right) \sin^2 35^\circ} \approx 60 \text{ кг/см}^2;$$

$$h_{вр} \geq \frac{8000 \cos 35^\circ}{16 \cdot 60} = 6,82 \text{ см},$$

что не превышает максимально допускаемой по нормам проектирования глубины врубки  $\max h_{вр} = \frac{h}{3}$ .

Определяем размер  $l_{ск}$  из расчета на скалывание:

$$F_{ск} = b l_{ск} \geq \frac{N \cos \alpha}{k_{ск} [\tau_{ск}]}$$

или

$$l_{\text{ск}} \geq \frac{N \cos \alpha}{b k_{\text{ск}} [\tau_{\text{ск}}]}.$$

Приняв предварительно  $\frac{l_{\text{ск}}}{e} = 3,0$ , получим  $k_{\text{ск}} = 0,57$  и

$$l_{\text{ск}} = \frac{8000 \cos 35^\circ}{16 \cdot 0,57 \cdot 24} \approx 30 \text{ см.}$$

Считая, что линия действия силы  $N$  проходит через центр сечения  $BC$  затяжки, по чертежу получаем  $e \approx 11 \text{ см}$ . Следовательно,  $\frac{l_{\text{ск}}}{e} < 3,0$ , что соответствует предварительно принятому  $k_{\text{ск}}$ .

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ

§ 5.1. СТАТИЧЕСКИЕ МОМЕНТЫ И ЦЕНТРЫ ТЯЖЕСТИ ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ

Статическими моментами  $S_u$  и  $S_v$  площади плоской фигуры относительно осей  $u$  и  $v$  (рис. 5.1) называются интегралы вида:

$$S_u = \int_F v dF; \quad S_v = \int_F u dF. \quad (5.1)$$

Индекс  $F$  у знака интеграла показывает, что интегрирование распространяется на всю площадь сечения.

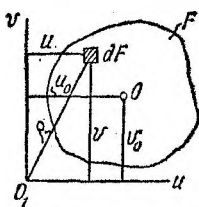


РИС. 5.1

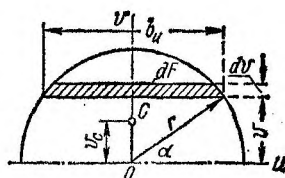


РИС. 5.2

Статический момент сечения измеряется единицами длины в третьей степени, обычно —  $см^3$  или в СИ —  $м^3$ .

Если известны положение центра тяжести сечения и его площадь, то статические моменты находят по формулам:

$$S_u = Fv_0; \quad S_v = Fu_0. \quad (5.2)$$

Из формул (5.2) следует, что статический момент плоской фигуры (сечения) относительно любой центральной оси равен нулю. Обратное положение также справедливо: если статический момент сечения относительно какой-либо оси равен нулю, то эта ось является центральной.

В зависимости от положения сечения относительно оси статический момент может быть положительным, отрицательным или равным нулю.

Статический момент сечения относительно некоторой оси равен алгебраической сумме статических моментов всех частей, на которые разбито сечение, относительно той же оси, т. е.

$$\left. \begin{aligned} S_u &= S_{1u} + S_{2u} + \dots + S_{nu} = F_1 v_1 + \\ &+ F_2 v_2 + \dots + F_n v_n = \sum_{i=1}^n F_i v_i; \\ S_v &= S_{1v} + S_{2v} + \dots + S_{nv} = F_1 u_1 + \\ &+ F_2 u_2 + \dots + F_n u_n = \sum_{i=1}^n F_i u_i. \end{aligned} \right\} \quad (5.3)$$

Координаты центра тяжести плоского сечения определяют по формулам:

$$\left. \begin{aligned} u_0 &= \frac{S_v}{F} = \frac{\sum_{i=1}^n F_i u_i}{\sum_{i=1}^n F_i}; \\ v_0 &= \frac{S_u}{F} = \frac{\sum_{i=1}^n F_i v_i}{\sum_{i=1}^n F_i}. \end{aligned} \right\} \quad (5.4)$$

Если сечение имеет ось симметрии, то центр тяжести лежит на этой оси и его положение определяется одной координатой.

Если сечение имеет две и более осей симметрии, то центр тяжести совпадает с точкой пересечения этих осей.

**Пример 5.1.** Определить статический момент полукруга радиуса  $r$  (рис. 5.2) относительно горизонтальной оси  $u$ , совпадающей с диаметром, и расстояние центра тяжести от этой оси.

**Решение.** По формуле (5.1)

$$S_u = \int_F v dF.$$

Как видно из рис. 5.2,  $v = r \sin \alpha$ ;  $dv = r \cos \alpha d\alpha$ ;  $b_u = 2r \cos \alpha$ ;  $dF = b_u dv = 2r^2 \cos^2 \alpha d\alpha$ .

Подставив найденные значения  $v$  и  $dF$  в выражение  $S_u$ , получим

$$S_u = \int_F v dF = 2r^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \alpha \sin \alpha d\alpha = \frac{2r^3}{3} \left| -\cos^3 \alpha \right|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3} r^3.$$

Расстояние  $v_c$  от центра тяжести до оси  $u$  определяется по формуле (5.4):

$$v_c = \frac{S_u}{F} = \frac{\left(\frac{2}{3} r^3\right)}{\left(\frac{\pi r^2}{2}\right)} = \frac{4r}{3\pi} \approx 0,424r.$$

**Пример 5.2.** Определить положение центра тяжести неравнобокого уголка  $160 \times 100 \times 10$ , пренебрегая закруглениями его полок, относительно осей  $u$  и  $v$ , совпадающих с наружными сторонами контура (рис. 5.3).

Найденные значения координат сравнить с табличными значениями по ГОСТ 8510—57.

**Решение.** Разбиваем фигуру на два прямоугольника 1 и 2, как показано на рис. 5.3. Для первого прямоугольника  $F_1 = 16 \text{ см}^2$ ,  $u_1 = 0,5 \text{ см}$ ,  $v_1 = 8,0 \text{ см}$ . Для второго прямоугольника  $F_2 = 9 \text{ см}^2$ ,  $u_2 = 5,5 \text{ см}$ ,  $v_2 = 0,5 \text{ см}$ .

Координаты центра тяжести заданного сечения определяем по формулам (5.4):

$$u_c = \frac{F_1 u_1 + F_2 u_2}{F_1 + F_2} = \frac{16 \cdot 0,5 + 9 \cdot 5,5}{16 + 9} = 2,30 \text{ см};$$

$$v_c = \frac{F_1 v_1 + F_2 v_2}{F_1 + F_2} = \frac{16 \cdot 8 + 9 \cdot 0,5}{16 + 9} = 5,30 \text{ см}.$$

По данным сортамента, с учетом закруглений координаты центра тяжести  $u_c = 2,28 \text{ см}$  и  $v_c = 5,23 \text{ см}$ .

### § 5.2. МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ

Осевые моменты инерции плоского сечения относительно осей  $u$  и  $v$  (см. рис. 5.1) представляют собой интегралы:

$$J_u = \int_F v^2 dF; \quad J_v = \int_F u^2 dF. \quad (5.5)$$

Полярный момент инерции относительно начала координат (см. рис. 5.1):

$$J_p = \int_F \rho^2 dF. \quad (5.6)$$

Центробежный момент инерции относительно осей  $u$  и  $v$ :

$$J_{uv} = \int_F uv dF. \quad (5.7)$$

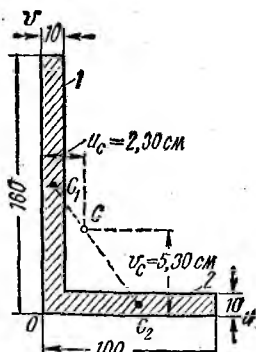


РИС. 5.3

Все моменты инерции измеряются единицами длины в четвертой степени ( $\text{см}^4$ ,  $\text{м}^4$ ).

Осевые и полярные моменты инерции всегда положительны, а центробежный в зависимости от положения сечения относительно осей может быть положительным, отрицательным или равным нулю.

Момент инерции сложного сечения равен алгебраической сумме моментов инерции составляющих его частей:

$$J = J_1 + J_2 + \dots + J_n = \sum_{i=1}^n J_i. \quad (5.8)$$

Эта зависимость справедлива для всех видов моментов инерции. При пользовании ею для определения момента инерции сложного сечения последнее разбивают на части, моменты инерции которых известны или легко определяются.

Полярный момент инерции сечения равен сумме осевых моментов инерции относительно любых двух взаимно перпендикулярных осей, проходящих через полюс, т. е.

$$J_p = J_u + J_v. \quad (5.9)$$

### § 5.3. ЗАВИСИМОСТЬ МЕЖДУ МОМЕНТАМИ ИНЕРЦИИ ПРИ ПРЕОБРАЗОВАНИИ ОСЕЙ КООРДИНАТ

Параллельный перенос осей (рис. 5.4)

Осевой момент инерции сечения относительно произвольной оси равен осевому моменту инерции относительно центральной оси, параллельной произвольной, плюс произведение площади на квадрат расстояния между осями:

$$J_u = J_{x_0} + Fm^2. \quad (5.10)$$

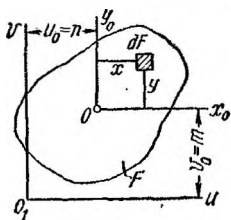


РИС. 5.4

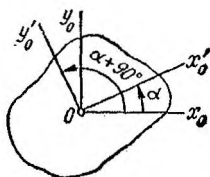


РИС. 5.5

Центробежный момент инерции относительно произвольной пары взаимно перпендикулярных осей равен центробежному моменту инерции относительно центральных осей, умноженному на произведение площади на координаты ее центра тяжести относительно произвольных осей:

$$J_{uv} = J_{x_0 y_0} + Fmn. \quad (5.11)$$

В формуле (5.11) координаты центра тяжести  $m$  и  $n$  берутся с учетом их знаков; так, например, на рис. 5.4 центр тяжести

(точка  $O$ ) находится в первом квадранте и обе его координаты положительны.

В частном случае, если центробежный момент инерции сечения относительно центральных осей равен нулю, то формула (5.11) упрощается:

$$J_{uv} = Fmn. \quad (5.12)$$

Поворот осей (рис. 5.5)

Если моменты инерции  $J_{x_0}, J_{y_0}, J_{x_0 y_0}$  относительно исходных центральных осей  $x_0, y_0$  известны, то моменты инерции относительно осей  $x'_0$  и  $y'_0$ , повернутых на произвольный угол  $\alpha$  по отношению к осям  $x_0$  и  $y_0$ , определяются по формулам:

$$\left. \begin{aligned} J_{x'_0} &= J_{x_0} \cos^2 \alpha + J_{y_0} \sin^2 \alpha - J_{x_0 y_0} \sin 2\alpha; \\ J_{y'_0} &= J_{x_0} \sin^2 \alpha + J_{y_0} \cos^2 \alpha + J_{x_0 y_0} \sin 2\alpha; \end{aligned} \right\} \quad (5.13)$$

$$J_{x'_0 y'_0} = \frac{J_{x_0} - J_{y_0}}{2} \sin 2\alpha + J_{x_0 y_0} \cos 2\alpha. \quad (5.14)$$

Зависимости (5.13) и (5.14) справедливы и для нецентральных осей.

#### § 5.4. ГЛАВНЫЕ ОСИ ИНЕРЦИИ И ГЛАВНЫЕ МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ

Две взаимно перпендикулярные оси, относительно которых центробежный момент инерции равен нулю, называются *главными осями инерции*, а осевые моменты инерции относительно этих осей — *главными моментами инерции*.

Через любую точку сечения всегда можно провести две взаимно перпендикулярные главные оси. В частных случаях главных осей бесчисленное множество. Как правило, практическое значение имеют главные оси, проходящие через центр тяжести сечения; они называются *главными центральными осями*.<sup>1</sup> В дальнейшем эти оси обозначаем  $x$  и  $y$ . Моменты инерции относительно этих осей ( $J_x$  и  $J_y$ ) называются *главными центральными моментами инерции*.

Главные оси  $x$  и  $y$  характерны тем, что относительно одной из них осевой момент инерции максимален, а относительно другой — минимален по сравнению с моментами инерции относительно любых других осей, проходящих через ту же точку.

Если величины  $J_{x_0}, J_{y_0}$  и  $J_{x_0 y_0}$  известны (рис. 5.6), то угол между главными осями и исходными осями  $x_0, y_0$  определяется по формуле

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = - \frac{2J_{x_0 y_0}}{J_{x_0} - J_{y_0}}. \quad (5.15)$$

Формула (5.15) дает два значения угла:  $\alpha_0$  и  $\alpha_0 + 90^\circ$ , которые определяют положение двух взаимно перпендикулярных главных осей  $x$  и  $y$ .

<sup>1</sup> Иногда их называют *главными центральными осями инерции*.



Угол  $\alpha_0$  дает положение главной оси, относительно которой момент инерции имеет максимальное значение при  $J_{x_0} > J_{y_0}$  и минимальное при  $J_{x_0} < J_{y_0}$ .

Углы  $\alpha_{0x}$  и  $\alpha_{0y}$  (рис. 5.7), образуемые главными осями  $x$  и  $y$  с осью  $x_0$ , могут быть определены из формул:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha_{0x} &= \frac{J_{x_0 y_0}}{J_{y_0} - J_x}; \\ \operatorname{tg} \alpha_{0y} &= \frac{J_{x_0 y_0}}{J_{y_0} - J_y}. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Очевидно,  $|\alpha_{0x}| + |\alpha_{0y}| = 90^\circ$ .

При пользовании формулами (5.15) и (5.16) значения центробежного момента инерции  $J_{x_0 y_0}$  надо подставлять с учетом его знака.

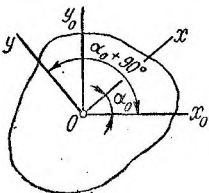


РИС. 5.6

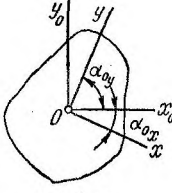


РИС. 5.7

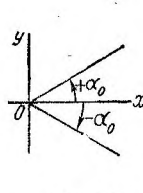


РИС. 5.8

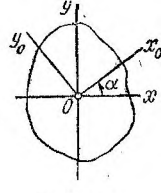


РИС. 5.9

Отрицательный угол  $\alpha$  откладывается от оси  $x_0$  по ходу часовой стрелки (рис. 5.8), а положительный — против.

Если  $J_{x_0 y_0} < 0$ , то главная ось, относительно которой момент инерции имеет наибольшее значение, проходит через 1-й и 3-й, а при  $J_{x_0 y_0} > 0$  — через 2-й и 4-й квадранты.

Величины главных моментов определяются по формулам:

$$\left. \begin{aligned} \text{или } \left. \begin{aligned} J_x \\ J_y \end{aligned} \right\} &= J_{\max} = \frac{J_{x_0} + J_{y_0}}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(J_{x_0} - J_{y_0})^2 + 4J_{x_0 y_0}^2} \\ \text{или } \left. \begin{aligned} J_y \\ J_x \end{aligned} \right\} &= J_{\min} = \frac{J_{x_0} + J_{y_0}}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(J_{x_0} - J_{y_0})^2 + 4J_{x_0 y_0}^2} \end{aligned} \right\} \quad (5.17)$$

Значения главных моментов инерции можно также вычислить по формулам (5.13), приняв в них  $\alpha = \alpha_0$ .

Если главные оси  $x$  и  $y$  принять за исходные (рис. 5.9), то формулы перехода при повороте осей (5.13) и (5.14) принимают более простой вид, так как  $J_{xy} = 0$ :

$$\left. \begin{aligned} J_{x_0} &= J_x \cos^2 \alpha + J_y \sin^2 \alpha; \\ J_{y_0} &= J_x \sin^2 \alpha + J_y \cos^2 \alpha; \end{aligned} \right\} \quad (5.18)$$

$$J_{x_0 y_0} = \frac{J_x - J_y}{2} \sin 2\alpha. \quad (5.19)$$

Из приведенных формул следует, что если  $J_x = J_y$ , то любая центральная ось будет главной и все главные центральные моменты инерции равны между собой.

Для сечений, имеющих одну или несколько осей симметрии, положение главных осей определяется на основании следующего:

1) если сечение имеет ось симметрии  $y$ , то эта ось и любая другая ось  $x'$ , ей перпендикулярная, образуют систему главных осей (рис. 5.10);

2) если сечение имеет две оси симметрии, то эти оси являются главными центральными осями;

3) если сечение обладает тремя и более осями симметрии, то любая центральная ось сечения является главной и все главные центральные моменты инерции сечения равны между собой.

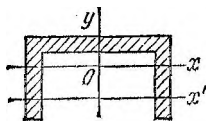


РИС. 5.10

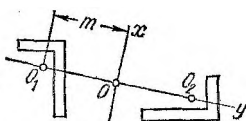


РИС. 5.11

Если сечение состоит из двух одинаковых фигур, повернутых друг относительно друга на  $90^\circ$  (рис. 5.11), то главная ось  $y$  соединяет центры тяжести  $O_1$  и  $O_2$  сечений, а главная центральная ось  $x$  перпендикулярна к оси  $y$  и проходит через центр тяжести сечения точку  $O$ , делящую отрезок  $O_1O_2$  пополам.

Величины главных центральных моментов инерции определяются по формулам:

$$\begin{aligned} J_y &= J_{\min} = J_{x_1} + J_{y_1} = J_p; \\ J_x &= J_{\max} = J_p + 2Fm^2, \end{aligned} \quad (5.20)$$

где  $F$  — площадь одной фигуры;  
 $J_{x_1}$  и  $J_{y_1}$  — главные центральные моменты инерции одной фигуры;  
 $J_p$  — полярный момент инерции одной фигуры.

Величины

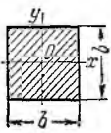
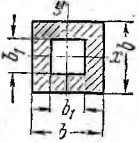
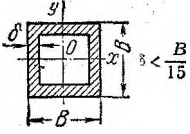
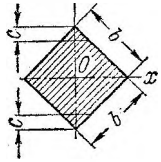
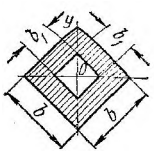
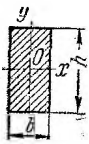
$$i_u = \sqrt{\frac{J_u}{F}} \quad \text{и} \quad i_v = \sqrt{\frac{J_v}{F}} \quad (5.21)$$

называются *радиусами инерции* относительно осей  $u$  и  $v$  и имеют размерность длины (м, см, мм).

Радиусы инерции  $i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}}$  и  $i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}}$  относительно главных осей называются *главными радиусами инерции*.

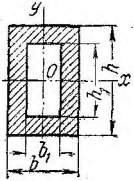
Значения осевых моментов инерции, осевых моментов сопротивления и радиусов инерции некоторых плоских сечений приведены в табл. 5.1, а те же величины для прокатных профилей даются в таблицах сортамента (см. табл. 5.2, 5.3, 5.4 и 5.5).

Площади, координаты центров тяжести, осевые моменты инерции, моменты сопротивления и радиусы инерции некоторых плоских фигур

Форма поперечного сечения	Площадь сечения, см <sup>2</sup>	Осевой момент инерции, см <sup>4</sup>	Момент сопротивления, см <sup>3</sup>	Радиус инерции, см
<p>Квадрат</p> 	$b^2$	$J_x = J_y = \frac{b^4}{12}$	$W_x = W_y = \frac{b^3}{6}$	$i_x = i_y = \frac{b}{\sqrt{12}} = 0,289b$
<p>Полый квадрат</p> 	$b^2 - b_1^2$	$J_x = J_y = \frac{b^4 - b_1^4}{12}$	$W_x = W_y = \frac{b^4 - b_1^4}{6b}$	$i_x = i_y = 0,289 \sqrt{b^2 + b_1^2}$
<p>Полый тонкостенный квадрат</p> 	$4B\delta$	$J_x = J_y = \frac{2}{3} B^3 \delta$	$W_x = W_y = \frac{4}{3} B^2 \delta$	$i_x = i_y = \frac{B}{\sqrt{6}} = 0,408B$
<p>Квадрат, поставленный на ребро</p> 	$b^2$	$J_x = J_y = \frac{b^4}{12}$	$W_x = W_y = \frac{b^3}{6\sqrt{2}} = 0,118b^3$ При срезке верхнего и нижнего уголков на величину $c = \frac{b\sqrt{2}}{18}$ момент сопротивления увеличивается и достигает значения $W_x = 0,124b^3$	$i_x = i_y = 0,289b$
<p>Полый квадрат, поставленный на ребро</p> 	$b^2 - b_1^2$	$J_x = J_y = \frac{b^4 - b_1^4}{12}$	$W_x = W_y = \frac{b^4 - b_1^4}{6\sqrt{2}b}$	$i_x = i_y = 0,289 \sqrt{b^2 + b_1^2}$
<p>Прямоугольник</p> 	$bh$	$J_x = \frac{bh^3}{12}$ ; $J_y = \frac{hb^3}{12}$	$W_x = \frac{bh^2}{6}$ ; $W_y = \frac{hb^2}{6}$	$i_x = \frac{h}{\sqrt{12}} = 0,289h$ ; $i_y = \frac{b}{\sqrt{12}} = 0,289b$

Форма поперечного сечения	Площадь сечения, см <sup>2</sup>	Осевой момент инерции, см <sup>4</sup>	Момент сопротивления, см <sup>3</sup>	Радиус инерции, см
---------------------------	----------------------------------	--	---------------------------------------	--------------------

Полый прямоугольник



$$bh - b_1h_1$$

$$J_x = \frac{bh^3 - b_1h_1^3}{12}$$

$$J_y = \frac{hb^3 - h_1b_1^3}{12}$$

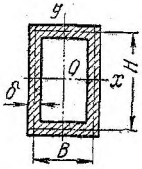
$$W_x = \frac{bh^3 - b_1h_1^3}{6h}$$

$$W_y = \frac{hb^3 - h_1b_1^3}{6b}$$

$$i_x = \sqrt{\frac{bh^3 - b_1h_1^3}{12(bh - b_1h_1)}}$$

$$i_y = \sqrt{\frac{hb^3 - h_1b_1^3}{12(bh - b_1h_1)}}$$

Полый гофрированный прямоугольник



$$2\delta(B + H)$$

$$J_x = \frac{\delta H^3}{6} \left( 3 \frac{B}{H} + 1 \right)$$

$$J_y = \frac{\delta B^3}{6} \left( 3 \frac{H}{B} + 1 \right)$$

$$W_x = \frac{\delta H^2}{3} \left( 3 \frac{B}{H} + 1 \right)$$

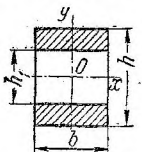
$$W_y = \frac{\delta B^2}{3} \left( 3 \frac{H}{B} + 1 \right)$$

$$i_x = 0,289H \sqrt{\frac{3 \frac{B}{H} + 1}{\frac{B}{H} + 1}}$$

$$i_y = 0,289B \sqrt{\frac{3 \frac{H}{B} + 1}{\frac{H}{B} + 1}}$$

$$\delta < \frac{H}{15}$$

Сечение из двух равных прямоугольников



$$b(h - h_1)$$

$$J_x = \frac{b(h^3 - h_1^3)}{12}$$

$$J_y = \frac{b^3(h - h_1)}{12}$$

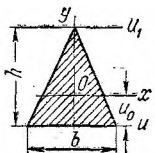
$$W_x = \frac{b(h^3 - h_1^3)}{6h}$$

$$W_y = \frac{b^2(h - h_1)}{6}$$

$$i_x = \sqrt{\frac{h^3 - h_1^3}{12}}$$

$$i_y = 0,289b$$

Треугольник



$$\frac{1}{2}bh$$

$$J_x = \frac{bh^3}{36}$$

$$J_{u_1} = \frac{bh^3}{4}$$

$$J_u = \frac{bh^3}{12}$$

$$J_y = 0$$

При вычислении напряжений в вершине треугольника

$$W_x = \frac{bh^2}{24}$$

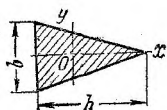
при вычислении напряжений в точке основания

$$W_x = \frac{bh^2}{12}$$

$$i_x = \frac{h}{3\sqrt{2}} = 0,236h$$

$$u_0 = \frac{h}{3}$$

Треугольник равнобедренный



$$\frac{1}{2}bh$$

$$J_x = \frac{hb^3}{48}$$

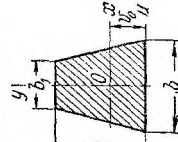
$$W_x = \frac{hb^2}{24}$$

$$i_x = \frac{b}{6} \sqrt{\frac{3}{2}} = 0,204b$$

Продолжение табл. 5.1

Форма поперечного сечения	Площадь сечения, см <sup>2</sup>	Осевой момент инерции, см <sup>4</sup>	Момент сопротивления, см <sup>3</sup>	Радиус инерции, см
---------------------------	----------------------------------	--	---------------------------------------	--------------------

Трапеция



$$v_0 = \frac{h}{3} \cdot \frac{b + 2b_1}{b + b_1}$$

При вычислении напряжений в точках верхнего основания  $b_1$

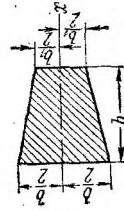
$$W_x = \frac{h^3 (b^3 + 4bb_1 + b_1^3)}{12 (2b + b_1)};$$

$$i_x = \frac{h}{6 (b + b_1)} \times \sqrt{2 (b^2 + 4bb_1 + b_1^2)}$$

при вычислении напряжений в точках нижнего основания  $b$

$$W_x = \frac{h^3 (b^3 + 4bb_1 + b_1^3)}{12 (b + 2b_1)}$$

Трапеция



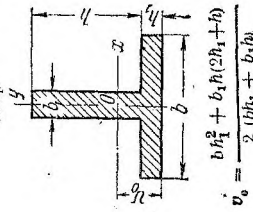
$$\frac{b + b_1}{2} h$$

$$J_x = \frac{h}{48} \cdot \frac{b^4 - b_1^4}{b - b_1}$$

$$W_x = \frac{h}{24} \cdot \frac{b^4 - b_1^4}{b^2 - bb_1}$$

$$i_x = \sqrt{\frac{b^2 + b_1^2}{24}}$$

Тавр



$$v_0 = \frac{b_1 h_1^2 + b_1 h (2h_1 + h)}{2 (bb_1 + b_1 b)}$$

$$J_x = \frac{bb_1^3 + b_1 h^3}{12} + bb_1 \left( \frac{h_1}{2} \right)^2 + b_1 h \left( \frac{h}{2} + h_1 - v_0 \right)^2;$$

$$J_y = \frac{hb_1^3 + h_1 b^3}{12}$$

$$bb_1 + b_1 h$$

Для нижних волокон

$$W_x = \frac{J_x}{v_0};$$

для верхних волокон

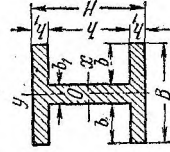
$$W_x = \frac{J_x}{h + h_1 - v_0};$$

$$W_y = \frac{hb_1^2 + h_1 b^2}{6b}$$

$$i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}};$$

$$i_y = \sqrt{\frac{hb_1^3 + h_1 b^3}{12 (bb_1 + b_1 b)}}$$

Для двутавр симметричный, составленный из прямоугольников



$$2bh_1 + b_1 h$$

$$J_x = \frac{BH^3 - 2bh^3}{12};$$

$$W_x = \frac{BH^3 - 2bh^3}{6H};$$

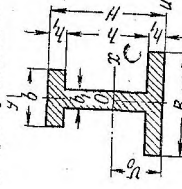
$$W_y = \frac{hb_1^3 + 2h_1 b^3}{6b};$$

$$J_y = \frac{12}{12}$$

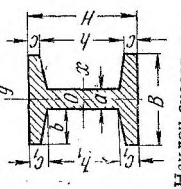
$$i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}};$$

$$i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}}$$

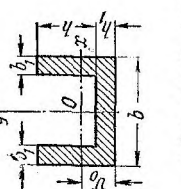
Продолжение табл. 5.1

Форма поперечного сечения	Площадь сечения, см <sup>2</sup>	Осевой момент инерции, см <sup>4</sup>	Момент сопротивления, см <sup>3</sup>	Радиус инерции, см
<p>Двутавр несимметричный, составленный из прямоугольников</p>  <p> <math>v_0 = Bh_1^2 + b_1h(h + 2h_1) + bh_1 \times \times (2H - h_1)</math>  <math>2(bh_1 + b_1h + Bh_1)</math> </p>	$(B + b)h_1 + bh_1$	$J_x = \frac{bh_1^3 + (B + b)h_1^3}{12} + b_1h \left( \frac{h}{2} + h_1 - v_0 \right)^2 + h_1 \left[ B \left( v_0 - \frac{h_1}{2} \right)^2 + b \left( H - v_0 - \frac{h_1}{2} \right)^2 \right] + h_1 (B^3 + b^3) + bh_1^3$ $J_y = \frac{h_1^3}{12}$	$W_x = \frac{J_x}{H - v_0}$ $W_y = \frac{6B}{h_1 (B^3 + b^3) + bh_1^3}$	$i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}}$ $i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}}$

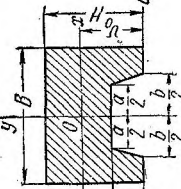
Двутавр

 <p>                     Наклон скосов <math>\alpha = \frac{h - h_1}{2b}</math> (для стандартных двутавров <math>\alpha = \frac{1}{6}</math>)                 </p>	$J_x = \frac{1}{12} \left[ BH^3 - \frac{1}{4a} (h^3 - h_1^3) \right] + ah + 2b \left( c + c_1 \right)$ $J_y = \frac{1}{12} \left[ B^3 (H - h) + h_1 a^3 + \frac{a}{4} (B^3 - a^3) \right]$	$W_x = \frac{1}{6B} \left[ BH^3 - \frac{1}{4a} (h^3 - h_1^3) - h_1^3 \right]$ $W_y = \frac{1}{6B} \left[ B^3 (H - h) + h_1 a^3 + \frac{a}{4} (B^3 - a^3) \right]$	$i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}}$ $i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}}$
---	---	--	--

Корытное сечение

 <p> <math>v_0 = \frac{bh_1^2 + 2b_1h(2h_1 + h)}{2(bh_1 + 2b_1h)}</math> </p>	$J_x = \frac{bh_1^3 + 2b_1h^3}{12} + bh_1 \left( v_0 - \frac{h_1}{2} \right)^2 + 2b_1h \left( \frac{h}{2} + h_1 - v_0 \right)^2$ $J_y = \frac{b^3 (h + h_1) - h(b - 2b_1)^2}{12}$	$W_x = \frac{J_x}{h + h_1 - v_0}$ $W_y = \frac{6b}{(h + h_1) b^3 - h(b - 2b_1)^2}$	$i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}}$ $i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}}$
--	--	---	--

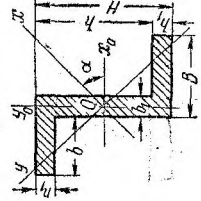
Устой с обратными стенками

 <p> <math>v_0 = \frac{3BH^2 - h^3 (b + 2a)}{6BH - 3h(a + b)}</math> </p>	$J_u = \frac{BH^3}{3} - \frac{h^3}{12} (b + 3a)$ $J_y = \frac{HB^3}{12} - \frac{h(b^3 - a^3)}{48 (b - a)}$ $J_x = J_u - Fv_0^2$	$W_x = \frac{J_x}{a + b}$ $W_y = \frac{J_y}{h}$	$i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}}$ $i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}}$
--	---	--	--

Продолжение табл. 5.1

Форма поперечного сечения	Площадь сечения, см <sup>2</sup>	Осевой момент инерции, см <sup>4</sup>	Момент сопротивления, см <sup>3</sup>	Радиус инерции, см
<p>Крестообразное сечение</p>	$hb_1 + (b - b_1)h_2$	$J_x = \frac{b_1 b^3 + (b - b_1) h_2^3}{12};$ $J_y = \frac{h_1 b^3 + (b - h_1) b_1^3}{12}$	$W_x = \frac{b_1 b^3 + (b - b_1) h_2^3}{6b};$ $W_y = \frac{h_1 b^3 + (b - h_1) b_1^3}{6b}$	$i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}};$ $i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}}$

z-образное сечение



$$J_{x_0} = \frac{BH^3 - b(h - h_1)^3}{12};$$

$$J_{y_0} = \frac{Hb^3 + 6bh_1 B^2 + 2h_1 b^3}{12};$$

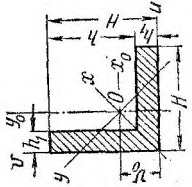
$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{bh_1 h B}{J_{x_0} - J_{y_0}};$$

$$J_x = \frac{J_{x_0} \cos^2 \alpha - J_{y_0} \sin^2 \alpha}{\cos 2\alpha};$$

$$J_y = \frac{J_{y_0} \cos^2 \alpha - J_{x_0} \sin^2 \alpha}{\cos 2\alpha};$$

$$i_{\min} = i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}}$$

Разнобокий уголок



$$u_0 = \frac{H^2 + h^2}{2(H + h)}$$

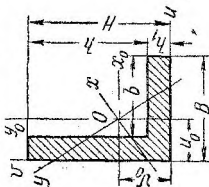
$$J_{x_0} = J_{y_0} = \frac{1}{3} (h_1 (H - u_0)^3 + H u_0^3 - h (u_0 - h_1)^3);$$

$$J_x = \frac{H^3 - h^3}{12};$$

$$J_y = \frac{7H^3 - 5h^3}{12} - \frac{2H^2 u_0 (H + u_0) + 2h^2 (H - u_0) (H + u_0 - h) - 4H u_0 h^2}{12}$$

$$i_{\min} = i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}}$$

Неравнобокий уголок



$$u_0 = \frac{hb^2 + h_1 B^2}{2(hb_1 + Bh_1)};$$

$$v_0 = \frac{b_1 h^2 + hb_1^2}{2(u_0 H + bh_1)}$$

$$J_{x_0} = \frac{1}{3} [b_1 (H - u_0)^3 + B u_0^3 - b (u_0 - h_1)^3];$$

$$J_{y_0} = \frac{1}{3} [h_1 (B - u_0)^3 + H u_0^3 - h (u_0 - b_1)^3];$$

$$J_x = \frac{J_{x_0} \cos^2 \alpha - J_{y_0} \sin^2 \alpha}{\cos 2\alpha};$$

$$J_y = \frac{J_{y_0} \cos^2 \alpha - J_{x_0} \sin^2 \alpha}{\cos 2\alpha};$$

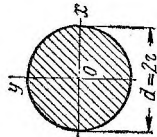
$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2J_{x_0} u_0}{J_{x_0} - J_{y_0}}$$

$$i_{\min} = i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}}$$

Продолжение табл. 5.1

Форма поперечного сечения	Площадь сечения, см <sup>2</sup>	Осевой момент инерции, см <sup>4</sup>	Момент сопротивления, см <sup>3</sup>	Радиус инерции, см
---------------------------	----------------------------------	--	---------------------------------------	--------------------

Круг



$$\frac{\pi d^2}{4}$$

$$J_x = J_y = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi r^4}{4};$$

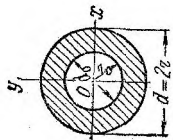
$$J_x = J_y \approx 0,05d^4$$

$$W_x = W_y = \frac{\pi d^3}{32} = \frac{\pi r^3}{4};$$

$$W_x = W_y \approx 0,1d^3$$

$$i_x = i_y = \frac{d}{4} = \frac{r}{2}$$

Кольцо



$$\frac{\pi (d^2 - d_0^2)}{4}$$

$$J_x = J_y = \frac{\pi (d^4 - d_0^4)}{64} =$$

$$= \frac{\pi d^4}{64} (1 - c^4);$$

$$J_x = J_y = \frac{\pi r^4}{4} (1 - c^4);$$

$$J_x = J_y \approx 0,05d^4 (1 - c^4)$$

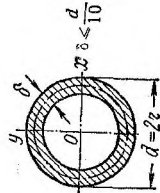
$$c = \frac{d_0}{d}$$

$$W_x = W_y = \frac{\pi d^3}{32} (1 - c^4);$$

$$W_x = W_y \approx 0,1d^3 (1 - c^4)$$

$$i_x = i_y = \frac{1}{4} \sqrt{d^2 + d_0^2}$$

Тонкостенное  
круговое кольцо



$$\pi d \delta$$

$$J_x = J_y = \frac{\pi d^3 \delta}{8};$$

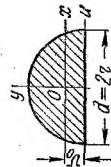
$$J_x = J_y = \pi r^3 \delta$$

$$W_x = W_y = \frac{\pi d^2 \delta}{4};$$

$$W_x = W_y = \pi r^2 \delta$$

$$i_x = i_y = \frac{d}{2\sqrt{2}} = 0,353d$$

Полукруг



$$\frac{\pi d^2}{8}$$

$$J_x = 0,00686d^4 \approx 0,110r^4;$$

$$J_y = 1,28 \frac{\pi d^4}{8} \approx 0,025d^4$$

Для нижних волокон

$$W_x = 0,0324d^3;$$

Для верхних волокон

$$W_x = 0,0239d^3;$$

$$W_y = \frac{\pi d^3}{64} \approx 0,05d^3$$

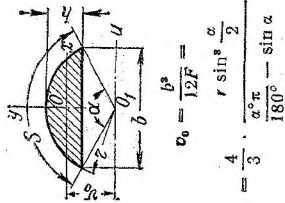
$$i_x = i_{\min} \approx 0,132d;$$

$$i_y = \frac{d}{4}$$

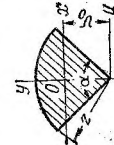
$$i_0 = \frac{4r}{3\pi} \approx 0,424r$$



Продолжение табл. 5.1

Форма поперечного сечения	Площадь сечения, см <sup>2</sup>	Осевой момент инерции, см <sup>4</sup>	Момент сопротивления, см <sup>3</sup>	Радиус инерции, см
<p>Круговой сегмент</p>  $v_0 = \frac{4}{3} \cdot \frac{r^3 \sin^3 \frac{\alpha}{2}}{180^\circ - \sin \alpha}$	$\left( \frac{\pi r^2 \alpha}{180^\circ} - \frac{r^2 \sin \alpha \cos \alpha}{2} \right) \text{ см}^2$	$J_u = \frac{Sr^4}{8} - \frac{r^4}{8} \sin \alpha \cos \alpha;$ $J_x = J_u - Fv_0^2;$ $J_y = \frac{r^4}{8} \left[ \frac{\pi}{180^\circ} - \sin \alpha - \frac{2}{3} \sin \alpha \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right]$	$W_x = \frac{J_x}{r - v_0}$	$i_{\min} = i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}}$ <p>Примечания:  <math>b = 2r \sin \frac{\alpha}{2};</math>  <math>S = \pi r^2 \frac{\alpha^\circ}{180^\circ}</math></p>

Круговой сектор



$$v_0 = \frac{4}{3} r \times \frac{\alpha}{180^\circ} \cdot \frac{\pi}{\pi \alpha^\circ}$$

$$J_u = \frac{r^4}{8} \left( \frac{\pi}{180^\circ} + \sin \alpha \right);$$

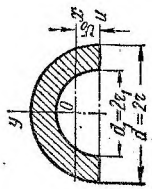
$$J_x = \frac{r^4}{8} \left( \frac{\pi}{180^\circ} + \sin \alpha - \frac{64}{9} \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{180^\circ}{\pi \alpha^\circ} \right);$$

$$J_y = \frac{r^4}{8} \left( \frac{\pi}{180^\circ} - \sin \alpha \right)$$

$$i_x = \frac{r}{2} \sqrt{1 + \frac{\sin \alpha \cdot 180^\circ}{\alpha^\circ}}$$

$$i_y = \frac{r}{2} \sqrt{1 - \frac{\sin \alpha \cdot 180^\circ}{\alpha^\circ}}$$

Круговое полукольцо



$$v_0 = \frac{4}{3\pi} \cdot \frac{r^2 + r_1 + r_2}{r + r_1}$$

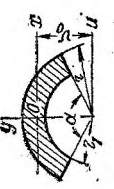
$$J_u = 0,110 (r^4 - r_1^4) - 0,283 r^2 r_1^2 \frac{r - r_1}{r + r_1};$$

$$J_y = \frac{\pi}{8} (r^4 - r_1^4)$$

$$i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}};$$

$$i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}}$$

Сектор кругового кольца



$$v_0 = \frac{4}{3} \cdot \frac{r^2 - r_1^2}{r^2 - r_1^2} \sin \frac{\alpha}{2} \times \frac{180^\circ}{\pi \alpha^\circ}$$

$$J_u = \frac{r^4 - r_1^4}{8} \left( \frac{\pi}{180^\circ} + \sin \alpha \right);$$

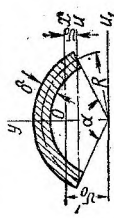
$$J_x = J_u - Fv_0^2;$$

$$J_y = \frac{r^4 - r_1^4}{8} \left( \frac{\pi}{180^\circ} - \sin \alpha \right)$$

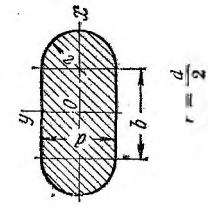
$$i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}};$$

$$i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}}$$

Продолжение табл. 5.1

Форма поперечного сечения	Площадь сечения, см <sup>2</sup>	Осевой момент инерции, см <sup>4</sup>	Момент сопротивления, см <sup>3</sup>	Радиус инерции, см
<p>Сектор кругового тонкостенного кольца</p>  <p> <math>v_0 = 2R \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{180^\circ}{\pi\alpha^\circ}</math>;  <math>v_0 = R \left( \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{360^\circ}{\pi\alpha^\circ} - \cos \frac{\alpha}{2} \right)</math> </p>	$\pi R^2 \frac{\alpha^\circ}{180^\circ}$	$J_x = \frac{R^3 \delta}{2} \left( \frac{\pi\alpha^\circ}{180^\circ} + \sin \alpha - 8 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{180^\circ}{\pi\alpha^\circ} \right)$ ; $J_y = \frac{R^3 \delta}{2} \left( \frac{\pi\alpha^\circ}{180^\circ} - \sin \alpha \right)$	$W_x = \frac{J_x}{R - \varepsilon_0}$	$i_x = R \sqrt{\frac{\frac{\pi\alpha^\circ}{180^\circ} + \sin \alpha - \frac{\pi\alpha^\circ}{2 \left( \frac{\pi\alpha^\circ}{180^\circ} \right)}}{2}}$ ; $i_y = R \sqrt{\frac{\frac{\pi\alpha^\circ}{180^\circ} - \sin \alpha}{2 \left( \frac{\pi\alpha^\circ}{180^\circ} \right)}}$

Бык с симметричными закруглениями



$$J_x = \frac{bd^3}{12} + \frac{\pi d^4}{64}$$

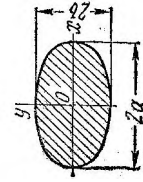
$$J_y = \frac{db^3}{12} + 2 \left[ 0,11r^4 + \frac{\pi r^2}{2} (0,424r + 0,5b)^2 \right]$$

$$W_x = \frac{bd^2}{6} + \frac{\pi d^3}{32}$$

$$W_y = \frac{2J_y}{b+d}$$

$$r = \frac{d}{2}$$

Эллипс



$$J_x = \frac{\pi ab^3}{4} \approx 0,7854ab^3$$

$$J_y = \frac{\pi a^3 b}{4} \approx 0,7854a^3 b$$

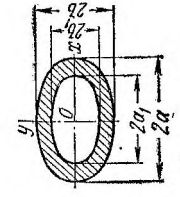
$$W_x = \frac{\pi ab^2}{4} \approx 0,7854ab^2$$

$$W_y = \frac{\pi a^2 b}{4} \approx 0,7854a^2 b$$

$$i_x = \frac{b}{2}$$

$$i_y = \frac{a}{2}$$

Эллиптическое кольцо



$$J_x = \frac{\pi}{4} (ab^3 - a_1 b_1^3)$$

$$J_y = \frac{\pi}{4} (a^3 b - a_1^3 b_1)$$

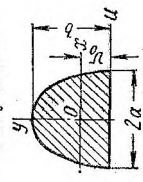
$$W_x = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{ab^3 - a_1 b_1^3}{b}$$

$$W_y = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{a^3 b - a_1^3 b_1}{a}$$

$$i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}}$$

$$i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}}$$

Полуэллипс



$$J_x = ab^3 \left( \frac{\pi}{8} - \frac{9\pi}{32} \right)$$

$$J_y = \frac{\pi a^3 b}{8}$$

$$\max W_x = \frac{J_x}{\left( \frac{4b}{3\pi} \right)}$$

$$\min W_x = \frac{J_x}{b - \frac{4b}{3\pi}}$$

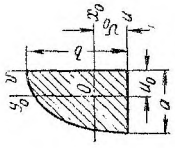
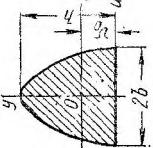
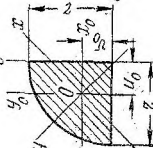
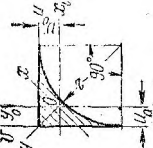
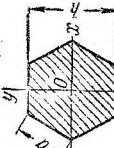
$$W_y = \frac{\pi a^2 b}{8}$$

$$i_x = \frac{b}{2} \sqrt{1 - \left( \frac{8}{3\pi} \right)^2}$$

$$i_y = \frac{a}{2}$$

$$v_0 = \frac{4b}{3\pi}$$

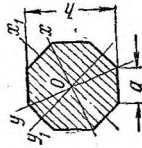
Продолжение табл. 5.1

Форма поперечного сечения	Площадь сечения, см <sup>2</sup>	Осевой момент инерции, см <sup>4</sup>	Момент сопротивления, см <sup>3</sup>	Радиус инерции, см
<p>Четверть эллипса</p>  <p> <math>J_{x_0} = ab^3 \left( \frac{\pi}{16} - \frac{4}{9\pi} \right);</math>  <math>J_{y_0} = a^3b \left( \frac{\pi}{16} - \frac{4}{9\pi} \right)</math> </p> <p> <math>\frac{\pi ab}{4}</math> </p> <p> <math>u_0 = \frac{4a}{3\pi};</math>  <math>v_0 = \frac{4b}{3\pi}</math> </p>			$\min W_{x_0} = \frac{J_{x_0}}{b - \frac{4b}{3\pi}};$ $\min W_{y_0} = \frac{J_{y_0}}{a - \frac{4a}{3\pi}}$	$i_{x_0} = \frac{b}{2} \sqrt{1 - \left( \frac{8}{3\pi} \right)^2};$ $i_{y_0} = \frac{a}{2} \sqrt{1 - \left( \frac{8}{3\pi} \right)^2}$
<p>Параболический сегмент</p>  <p> <math>J_x = \frac{16}{175} h^2b;</math>  <math>J_u = \frac{32}{105} h^2b;</math>  <math>J_y = \frac{4}{15} hb^3</math> </p> <p> <math>\frac{4}{3} bh</math> </p> <p> <math>v_0 = \frac{2}{5} h</math> </p>			$\min W_x = \frac{16}{105} h^2b;$ $\max W_x = \frac{8}{35} h^2b;$ $W_y = \frac{4}{15} hb^2$	$i_x = h \sqrt{\frac{12}{175}};$ $i_y = b \sqrt{\frac{1}{5}}$
<p>Четверть круга</p>  <p> <math>J_{x_0} = J_{y_0} = 0,0547r^4;</math>  <math>J_x = 0,0382r^4;</math>  <math>J_y = 0,0712r^4</math> </p> <p> <math>\frac{\pi r^2}{4}</math> </p> <p> <math>v_0 = u_0 = \frac{4r}{3\pi}</math> </p>			$\min W_x = 0,0636r^3;$ $W_y = 0,1008r^3;$ $\max W_{x_0} = \max W_{y_0} = 0,129r^3;$ $\min W_{x_0} = \min W_{y_0} = 0,0956r^3$	$i_{\min} = i_x = 0,221r$
<p>Круговой торец ольшик</p>  <p> <math>J_{x_0} = J_{y_0} = 0,00755r^4;</math>  <math>J_u = 0,0181r^4;</math>  <math>J_x = 0,0030r^4;</math>  <math>J_y = 0,0121r^4</math> </p> <p> <math>0,215r^2</math> </p> <p> <math>u_0 = v_0 = 0,223r</math> </p>			$W_x = 0,0097r^3$	$i_x = 0,1869r$
<p>Правильный шестиугольник</p>  <p> <math>F = 2,598a^2</math>  или  <math>F = 0,866a^2</math> </p>			$J_x = J_y = 0,06a^4$ или $J_x = J_y = 0,541a^4$	$i_x = i_y = 0,4565a = 0,257a$ $W_x = 0,12h^3 = 0,625a^3;$ $W_y = 0,541a^3$

Продолжение табл. 5,1

Форма поперечного сечения	Площадь сечения, см <sup>2</sup>	Осевой момент инерции, см <sup>4</sup>	Момент сопротивления, см <sup>3</sup>	Радиус инерции, см
---------------------------	----------------------------------	--	---------------------------------------	--------------------

Правильный восьмиугольник



$$F = 4,828a^2$$

или

$$F = 0,8284t^2$$

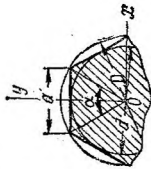
$$J_x = J_y = J_{x_1} = J_{y_1} = 0,0847t^4$$

$$W_{x_1} = W_{y_1} = 0,1095t^3$$

$$W_x = W_y = 0,1012t^3$$

$$i_x = i_{x_1} = 0,2570t$$

Правильный многоугольник



$$F = \frac{n a^2}{4} \cot \frac{\pi}{n}$$

$$J_x = J_y = \frac{F}{24} \left( \frac{3D^2}{2} - a^2 \right)$$

или

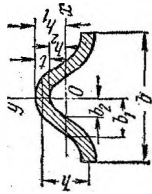
$$J_x = J_y = \frac{F}{48} (3a^2 + a^2)$$

$$i_x = i_y = \sqrt{\frac{3a^2 + a^2}{48}}$$

n — число сторон

или

Сечение волнистой стали. Волны составлены из параболеских дуг



$$b_1 = \frac{1}{4} (b + 2,6t);$$

$$b_2 = \frac{1}{4} (b - 2,6t);$$

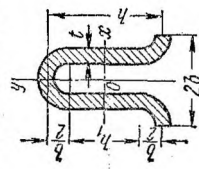
$$r_1 = \frac{1}{2} (b + t);$$

$$r_2 = \frac{1}{2} (b - t)$$

$$J_x = \frac{1}{105} (b_1^3 r_1^3 - b_2^3 r_2^3)$$

$$W_x \approx \frac{2J_x}{b + t}$$

Сечение волнистой стали. Волна имеет форму дуги круга



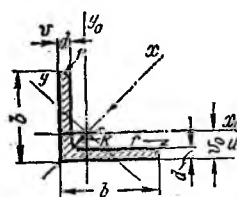
$$J_x = \left( \frac{\pi b^2}{8} + b^2 r_1 + \frac{\pi b h^2}{4} + \frac{1}{6} h^3 \right) t$$

$$W_x = \frac{2J_x}{b + t}$$

$$r_1 = h - b$$

Таблица 5.2

Угольники равнобокие в соответствии с ГОСТ 8509—57



Обозначения:

$b$  — ширина полки;  
 $d$  — толщина полки;  
 $R$  — радиус внутреннего закругления;  
 $r$  — радиус закругления полки.

$J$  — момент инерции;  
 $i$  — радиус инерции;  
 $o_x$  — расстояние от центра тяжести до полки.

Номер профиля	Размеры, мм				Площадь про- филя, см <sup>2</sup>	Вес 1 пог. м, кг	Справочные величины для осей								
	$b$	$d$	$R$	$r$			$x_0 - x_0$		$x - x$		$y - y$		$u - u$		$v_0$ , см
							$J_{x_0}$ , см <sup>4</sup>	$i_{x_0}$ , см	max $J_x$ , см <sup>4</sup>	max $i_x$ , см	min $J_y$ , см <sup>4</sup>	min $i_y$ , см	$J_u$ , см <sup>4</sup>		
2	20	3	3,5	1,2	1,13	0,89	0,40	0,59	0,63	0,75	0,17	0,39	0,81	0,60	
		4			1,46	1,15	0,50	0,58	0,78	0,73	0,22	0,38	1,09	0,64	
2,5	25	3	3,5	1,2	1,43	1,12	0,81	0,75	1,29	0,95	0,34	0,49	1,57	0,73	
		4			1,86	1,46	1,03	0,74	1,62	0,93	0,44	0,48	2,11	0,76	
2,8	28	3	4	1,3	1,62	1,27	1,16	0,85	1,84	1,07	0,48	0,55	2,20	0,80	
3,2	32	3	4,5	1,5	1,86	1,46	1,77	0,97	2,80	1,23	0,74	0,63	3,26	0,89	
		4			2,43	1,91	2,26	0,96	3,58	1,21	0,94	0,62	4,39	0,94	
3,6	36	3	4,5	1,5	2,10	1,65	2,56	1,10	4,06	1,39	1,06	0,71	4,64	0,99	
		4			2,75	2,16	3,29	1,09	5,21	1,38	1,36	0,70	6,24	1,04	
4	40	3	5	1,7	2,35	1,85	3,55	1,23	5,63	1,55	1,47	0,79	6,35	1,09	
		4			3,08	2,42	4,58	1,22	7,26	1,53	1,90	0,78	8,53	1,13	
4,5	45	3	5	1,7	2,65	2,08	5,13	1,39	8,13	1,75	2,12	0,89	9,04	1,21	
		4			3,48	2,73	6,63	1,38	10,50	1,74	2,74	0,89	12,10	1,26	
		5			4,29	3,37	8,03	1,37	12,70	1,72	3,33	0,88	15,30	1,30	
5	50	3	5,5	1,8	2,96	2,32	7,11	1,55	11,3	1,95	2,95	1,00	12,4	1,33	
		4			3,89	3,05	9,21	1,54	14,6	1,94	3,80	0,99	16,6	1,38	
		5			4,80	3,77	11,20	1,53	17,8	1,92	4,63	0,98	20,9	1,42	
5,6	56	3,5	6	2	3,86	3,03	11,6	1,73	18,4	2,18	4,80	1,12	20,3	1,50	
		4			4,38	3,44	13,1	1,73	20,8	2,18	5,41	1,11	23,3	1,52	
		5			5,41	4,25	16,0	1,72	25,4	2,16	6,59	1,10	29,2	1,57	

Продолжение табл. 5.2

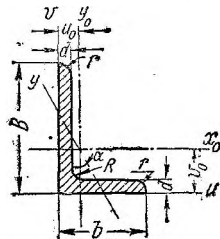
Номер профиля	Размеры, мм				Площадь про- филя, см <sup>2</sup>	Вес 1 пог. м, кг	Справочные величины для осей							
	b	d	R	r			$x_0 - x_0$		$x - x$		$y - y$		$u - u$	
							$J_{x_0}$ , см <sup>4</sup>	$i_{x_0}$ , см	max $J_{x'}$ см <sup>4</sup>	max $i_{x'}$ см	min $J_{y'}$ см <sup>4</sup>	min $i_{y'}$ см	$J_u$ , см <sup>4</sup>	$i_u$ , см
6,3	63	4	7	2,3	4,96	3,90	18,9	1,95	29,9	2,45	7,81	1,25	33,1	1,69
		5			6,13	4,81	23,1	1,94	36,6	2,44	9,52	1,25	41,5	1,74
		6			7,28	5,72	27,1	1,93	42,9	2,43	11,2	1,24	50,0	1,78
7	70	4,5	8,0	2,7	6,20	4,87	29,0	2,16	46,0	2,72	12,0	1,39	51,0	1,88
		5			6,86	5,38	31,9	2,16	50,7	2,72	13,2	1,39	56,7	1,90
		6			8,15	6,39	37,6	2,15	59,6	2,71	15,5	1,38	68,4	1,94
		7			9,42	7,39	43,0	2,14	68,2	2,69	17,8	1,37	80,1	1,99
		8			10,70	8,37	48,2	2,13	76,4	2,68	20,0	1,37	91,9	2,02
7,5	75	5	9	3	7,39	5,80	39,5	2,31	62,6	2,91	16,4	1,49	69,6	2,02
		6			8,78	6,89	46,6	2,30	73,9	2,90	19,3	1,48	83,9	2,06
		7			10,10	7,96	53,3	2,29	84,6	2,89	22,1	1,48	98,3	2,10
		8			11,50	9,02	59,8	2,28	94,9	2,87	24,8	1,47	113,0	2,15
		9			12,80	10,10	66,1	2,27	105,0	2,86	27,5	1,46	127,0	2,18
8	80	5,5	9	3	8,63	6,78	52,7	2,47	83,6	3,11	21,8	1,59	93,2	2,17
		6			9,38	7,36	57,0	2,47	90,4	3,11	23,5	1,58	102,0	2,19
		7			10,80	8,51	65,3	2,45	104,0	3,08	27,0	1,58	119,0	2,23
		8			12,30	9,65	73,4	2,44	116,0	3,08	30,3	1,57	137,0	2,27
9	90	6	10	3,3	10,6	8,33	82,1	2,78	130	3,50	34,0	1,79	145	2,43
		7			12,3	9,64	94,3	2,77	150	3,49	38,9	1,78	169	2,47
		8			13,9	10,90	106,0	2,76	168	3,48	43,8	1,77	194	2,51
		9			15,6	12,20	118,0	2,75	186	3,46	48,6	1,77	219	2,55
10	100	6,5	12	4	12,8	10,1	122	3,09	193	3,88	50,7	1,99	214	2,68
		7			13,8	10,8	131	3,08	207	3,88	54,2	1,98	231	2,71
		8			15,6	12,2	147	3,07	233	3,87	60,9	1,98	265	2,75
		10			19,2	15,1	179	3,05	284	3,84	74,1	1,96	333	2,83
		12			22,3	17,9	209	3,03	331	3,81	86,9	1,95	402	2,91
		14			26,3	20,6	237	3,00	375	3,78	99,3	1,94	472	2,99
		16			29,7	23,3	264	2,98	416	3,74	112	1,94	542	3,06
11	110	7	12	4	15,2	11,9	176	3,40	279	4,29	72,7	2,19	308	2,96
		8			17,2	13,5	198	3,39	315	4,28	81,8	2,18	353	3,00

Продолжение табл. 5.2

Номер профиля	Размеры, мм				Площадь про- филя, см <sup>2</sup>	Вес 1 пог. м, кг	Справочные величины для осей							
	b	d	R	r			$x_0 - x_0$		$x - x$		$y - y$		$u - u$	
							$J_{x_0}$ , см <sup>4</sup>	$i_{x_0}$ , см	max $J_{x'}$ , см <sup>4</sup>	max $i_{x'}$ , см	min $J_{y'}$ , см <sup>4</sup>	min $i_{y'}$ , см	$J_u$ , см <sup>4</sup>	$i_u$ , см
12,5	125	14	4,6	8	19,7	15,5	294	3,87	467	4,87	122	2,49	516	3,36
				9	22,0	17,3	327	3,86	520	4,86	135	2,48	582	3,40
				10	24,3	19,1	360	3,85	571	4,84	149	2,47	649	3,45
				12	28,9	22,7	422	3,82	670	4,82	174	2,46	782	3,53
				14	33,4	26,2	482	3,80	764	4,78	200	2,45	916	3,61
				16	37,8	29,6	539	3,78	853	4,75	224	2,44	1051	3,68
14	140	14	4,6	9	24,7	19,4	466	4,34	739	5,47	192	2,79	818	3,78
				10	27,3	21,5	512	4,33	814	5,46	211	2,78	911	3,82
				12	32,5	25,5	602	4,31	957	5,43	248	2,76	1097	3,90
16	160	16	5,3	10	31,4	24,7	774	4,96	1229	6,25	319	3,19	1356	4,30
				11	34,4	27,0	844	4,95	1341	6,24	348	3,18	1494	4,35
				12	37,4	29,4	913	4,94	1450	6,23	376	3,17	1633	4,39
				14	43,3	34,0	1046	4,92	1662	6,20	431	3,16	1911	4,47
				16	49,1	38,5	1175	4,89	1866	6,17	485	3,14	2191	4,55
				20	54,8	43,0	1299	4,87	2061	6,13	537	3,13	2472	4,63
18	180	16	5,3	11	38,8	30,5	1216	5,60	1933	7,06	500	3,59	2128	4,85
				12	42,2	33,1	1317	5,59	2093	7,04	540	3,58	2324	4,89
20	200	18	6	12	47,1	37,0	1823	6,22	2896	7,84	749	3,99	3182	5,37
				13	50,9	39,9	1961	6,21	3116	7,83	805	3,98	3452	5,42
				14	54,6	42,8	2097	6,20	3333	7,81	861	3,97	3722	5,46
				16	62,0	48,7	2363	6,17	3755	7,78	970	3,96	4264	5,54
				20	76,5	60,1	2871	6,12	4560	7,72	1182	3,93	5355	5,70
				25	94,3	74,0	3466	6,06	5494	7,63	1438	3,91	6733	5,89
22	220	21	7	14	60,4	47,4	2814	6,83	4470	8,60	1159	4,38	4941	5,93
				16	68,6	53,8	3175	6,81	5045	8,58	1306	4,36	5661	6,02
25	250	24	8	16	78,4	61,5	4717	7,76	7492	9,78	1942	4,98	8286	6,75
				18	87,7	68,9	5247	7,73	8337	9,75	2158	4,96	9342	6,83
				20	97,0	76,1	5765	7,71	9160	9,72	2370	4,94	10401	6,91
				22	106,1	83,3	6270	7,69	9961	9,69	2579	4,93	11464	7,00
				25	119,7	94,0	7006	7,65	11125	9,64	2887	4,91	13064	7,11
				28	133,1	104,5	7717	7,61	12244	9,59	3190	4,89	14674	7,23
30	142,0	111,4	8177	7,59	12965	9,56	3389	4,89	15753	7,31				

Таблица 5.3

Угольники неравнобокие в соответствии с ГОСТ 8510—57



Обозначения:

$B$  — ширина большей полки;  
 $b$  — ширина меньшей полки;  
 $R$  — радиус внутреннего закругления;  
 $r$  — радиус закругления полки;

$J$  — момент инерции;  
 $i$  — радиус инерции;  
 $u_0$  и  $v_0$  — расстояния от центра тяжести до полкок.

Номер про- филя	Размеры, мм					Площадь про- филя, см <sup>2</sup>	Вес 1 пог. м, кг	Справочные величины для осей										
	$B$	$b$	$d$	$R$	$r$			$x_0 - x_0$		$y_0 - y_0$		$u - u$		$v - v$		$y - y$		угол наклона оси $\lg \alpha$
								$J_{x_0}$ , см <sup>4</sup>	$i_{x_0}$ , см	$J_{y_0}$ , см <sup>4</sup>	$i_{y_0}$ , см	$J_{u_0}$ , см <sup>4</sup>	расстояние от центра тяжести $u_0$ , см	$J_{v_0}$ , см <sup>4</sup>	расстояние от центра тяжести $v_0$ , см	$\min J_y$ , см <sup>4</sup>	$\min i_y$ , см	
2,5/1,6	25	16	3	3,5	1,2	1,16	0,91	0,70	0,78	0,22	0,44	1,56	0,86	0,43	0,42	0,13	0,34	0,392
3,2/2	32	20	3	3,5	1,2	1,49	1,17	1,52	1,01	0,46	0,55	3,26	1,08	0,82	0,49	0,28	0,43	0,382
			4			1,94	1,52	1,93	1,00	0,57	0,54	4,38	1,12	1,12	0,53	0,35	0,43	0,374
4/2,5	40	25	3	4,0	1,3	1,89	1,48	3,06	1,27	0,93	0,70	6,37	1,32	1,58	0,59	0,56	0,54	0,385
			4			2,47	1,94	3,93	1,26	1,18	0,69	8,53	1,37	2,15	0,63	0,71	0,54	0,381
4,5/2,8	45	28	3	5	1,7	2,14	1,68	4,41	1,43	1,32	0,79	9,02	1,47	2,20	0,64	0,79	0,61	0,382
			4			2,80	2,20	5,68	1,42	1,69	0,78	12,1	1,51	2,98	0,68	1,02	0,60	0,379



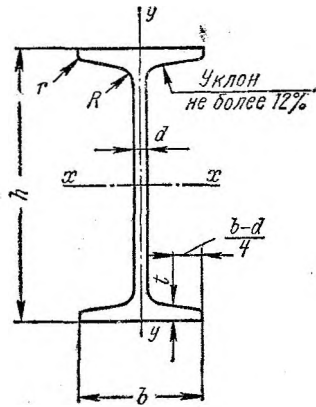
Продолжение табл. 5.3

Справочные величины для осей

Номер профиля	Размеры, мм		Площадь профиля, см <sup>2</sup>	Вес 1 пог. м, кг	$x_0 - x_0$		$y_0 - y_0$		$u - u$		$v - v$		Угол на оси			
	B	d			$J_{x_0}^*$ см <sup>4</sup>	$J_{y_0}^*$ см <sup>4</sup>	$i_{x_0}^*$ см	$i_{y_0}^*$ см	$J_{u_0}^*$ см <sup>4</sup>	$J_{v_0}^*$ см <sup>4</sup>	расстояние от центра тяжести	расстояние от центра тяжести	$J_{u_0}^*$ см <sup>4</sup>	$J_{v_0}^*$ см <sup>4</sup>	мин $J_{u_0}^*$ см <sup>4</sup>	мин $J_{v_0}^*$ см <sup>4</sup>
5/3,2	50	32	2,42	1,90	6,17	1,60	1,99	0,91	12,4	1,60	3,26	0,72	1,18	0,70	0,403	0,401
	3	4	3,17	2,49	7,98	1,59	2,56	0,90	16,6	1,65	4,42	0,76	1,52	0,69	0,401	
5,6/3,6	56	36	3,16	2,48	10,1	1,79	3,30	1,02	20,3	1,80	5,43	0,82	1,95	0,79	0,407	
	3	4	3,58	2,81	11,4	1,78	3,70	1,02	23,2	1,82	6,25	0,84	2,19	0,78	0,406	
	5	5	4,41	3,46	13,8	1,77	4,48	1,01	29,2	1,86	7,91	0,88	2,66	0,78	0,404	
6,3/4,0	63	40	4,04	3,17	16,3	2,01	5,16	1,13	33,0	2,03	8,51	0,91	3,07	0,87	0,397	
	5	6	4,98	3,91	19,9	2,00	6,26	1,12	41,4	2,08	10,80	0,95	3,73	0,86	0,396	
	6	7	5,90	4,63	23,3	1,99	7,28	1,11	49,9	2,12	13,10	0,99	4,36	0,86	0,393	
	8	8	7,68	6,03	29,6	1,96	9,15	1,09	66,9	2,20	17,90	1,07	5,58	0,85	0,386	
7/4,5	70	45	5,07	3,98	25,3	2,23	8,25	1,28	51,0	2,25	13,6	1,03	4,88	0,98	0,407	
	5	5	5,59	4,39	27,8	2,23	9,05	1,27	56,7	2,28	15,2	1,05	5,34	0,98	0,406	
7,5/5	75	50	6,11	4,79	34,8	2,39	12,5	1,43	69,7	2,39	20,2	1,17	7,24	1,09	0,436	
	6	8	7,25	5,69	40,9	2,38	14,6	1,42	83,9	2,44	25,2	1,21	8,48	1,08	0,435	
	8	8	9,47	7,43	52,4	2,35	18,5	1,40	112	2,52	34,2	1,29	10,90	1,07	0,430	
8/5	80	50	6,36	4,89	41,6	2,56	12,7	1,41	84,6	2,60	20,8	1,13	7,58	1,09	0,387	
	6	8	7,55	5,92	49,0	2,55	14,8	1,40	102	2,65	25,2	1,17	8,68	1,08	0,386	
9/5,6	90	56	7,86	6,17	65,3	2,88	19,7	1,58	132	2,92	32,2	1,26	11,8	1,22	0,384	
	6	9	8,54	6,70	70,6	2,88	21,2	1,58	145	2,95	35,2	1,28	12,7	1,22	0,384	
	8	8	11,18	8,77	90,9	2,85	27,1	1,56	194	3,04	47,8	1,36	16,3	1,21	0,380	
10/6,3	100	63	9,59	7,53	98,3	3,20	30,6	1,79	198	3,23	49,9	1,42	18,2	1,38	0,393	
	6	10	11,10	8,70	119,0	3,19	33,0	1,78	232	3,28	58,7	1,46	20,8	1,37	0,392	
	8	10	12,60	9,87	127,0	3,18	39,2	1,77	266	3,32	67,6	1,50	23,4	1,36	0,404	
	10	10	15,50	12,10	154,0	3,15	47,1	1,75	333	3,40	85,8	1,58	28,3	1,35	0,387	
11/7	110	70	11,4	8,98	142	3,53	45,6	2,00	289	3,55	74,3	1,58	26,9	1,53	0,402	
	7	10	12,3	9,64	152	3,52	48,7	1,99	309	3,57	80,3	1,60	28,8	1,53	0,402	
	8	10	13,9	10,90	172	3,51	54,6	1,98	353	3,61	92,3	1,64	32,3	1,52	0,400	
12,5/8	125	80	14,1	11,0	227	4,01	73,7	2,29	452	4,01	119	1,8	43,4	1,76	0,407	
	8	11	16,0	12,5	256	4,00	83,0	2,28	518	4,05	137	1,84	48,8	1,75	0,406	
	10	11	19,7	15,5	312	3,98	100,0	2,26	649	4,14	173	1,92	59,3	1,74	0,404	
	12	12	23,4	18,3	365	3,95	117,0	2,24	781	4,22	210	2	69,5	1,72	0,400	
14/9	140	90	18,0	14,1	364	4,49	120	2,58	727	4,49	194	2,03	70,3	1,98	0,411	
	10	12	22,2	17,5	444	4,47	146	2,56	911	4,58	245	2,12	85,5	1,96	0,409	
16/10	160	100	22,9	18,0	606	5,15	186	2,85	1221	5,19	300	2,23	110	2,20	0,391	
	10	13	26,3	19,8	667	5,13	204	2,84	1359	5,23	335	2,28	121	2,19	0,390	
	12	13	30,0	23,6	784	5,11	239	2,82	1634	5,32	405	2,36	142	2,18	0,388	
	14	14	34,7	27,3	897	5,08	272	2,80	1910	5,40	477	2,43	162	2,16	0,385	
18/11	180	110	28,3	22,2	952	5,80	276	3,12	1933	5,88	444	2,44	165	2,42	0,375	
	12	14	33,7	26,4	1123	5,77	324	3,10	2324	5,97	537	2,52	194	2,40	0,374	
20/12,5	200	125	34,9	27,4	1449	6,45	446	3,58	2920	6,50	718	2,79	264	2,75	0,392	
	12	16	37,9	29,7	1568	6,43	482	3,57	3189	6,54	786	2,81	285	2,74	0,392	
	14	14	43,9	34,4	1801	6,41	551	3,54	3726	6,62	922	2,91	327	2,73	0,390	
	16	16	49,8	39,1	2026	6,38	617	3,52	4264	6,71	1061	2,99	367	2,72	0,388	
25/16	250	160	48,3	37,9	3147	8,07	1032	4,62	6212	7,97	1634	3,53	604	3,54	0,410	
	16	18	63,6	49,9	4091	8,02	1333	4,58	8308	8,14	2200	3,69	781	3,50	0,408	
	18	18	71,1	55,8	4545	7,99	1475	4,56	9358	8,23	2487	3,77	866	3,49	0,407	
	20	20	78,5	61,7	4987	7,97	1613	4,53	10410	8,31	2776	3,85	949	3,48	0,405	

11/7	6,5	7,0	8,0	11,0	12,0	14,0	16,0	18,0	20,0	22,0	24,0	26,0	28,0	30,0	32,0	34,0	36,0	38,0	40,0
12,5/8	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
14/9	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
16/10	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
18/11	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
20/12,5	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
25/16	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

## Балки двутавровые в соответствии с ГОСТ 8239—56\*



$h$  — высота балки;  
 $b$  — ширина полки;  
 $d$  — толщина стенки;  
 $t$  — средняя толщина полки;  
 $R$  — радиус внутреннего закругления;

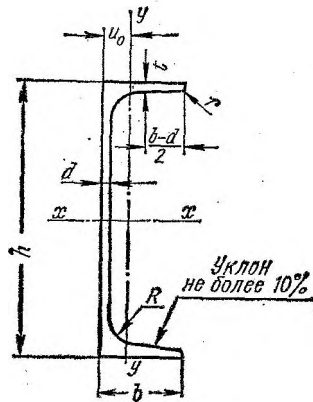
## Обозначения:

$r$  — радиус закругления полки;  
 $J$  — момент инерции;  
 $W$  — момент сопротивления;  
 $S_x$  — статический момент полусечения;  
 $i$  — радиус инерции.

Номер профиля	Вес 1 пог. м, кг	Размеры, мм						Площадь сечения, см <sup>2</sup>	Справочные величины для осей						
		$h$	$b$	$d$	$t$	$R$	$r$		$x-x$				$y-y$		
									$J_x$ , см <sup>4</sup>	$W_x$ , см <sup>3</sup>	$i_x$ , см	$S_x$ , см <sup>3</sup>	$J_y$ , см <sup>4</sup>	$W_y$ , см <sup>3</sup>	$i_y$ , см
10	9,46	100	55	4,5	7,2	7,0	2,5	12,0	198	39,7	4,06	23,0	17,9	6,49	1,22
12	11,5	120	64	4,8	7,3	7,5	3,0	14,7	350	58,4	4,88	33,7	27,9	8,72	1,38
14	13,7	140	73	4,9	7,5	8,0	3,0	17,4	572	81,7	5,73	46,8	41,9	11,5	1,55
16	15,9	160	81	5,0	7,8	8,5	3,5	20,2	873	109,0	6,57	62,3	58,6	14,5	1,70
18	18,4	180	90	5,1	8,1	9,0	3,5	23,4	1290	143,0	7,42	81,4	82,6	18,4	1,88

18а	19,9	180	100	5,1	8,3	9,0	3,5	25,4	1430	159,0	7,51	89,8	114,0	22,8	2,12
20	21,0	200	100	5,2	8,4	9,5	4,0	26,8	1840	184,0	8,28	104,0	115,0	23,1	2,07
20а	22,7	200	110	5,2	8,6	9,5	4,0	28,9	2030	203,0	8,37	114,0	155,0	28,2	2,32
22	24,0	220	110	5,4	8,7	10,0	4,0	30,6	2550	232,0	9,13	131,0	157,0	28,6	2,27
22а	25,8	220	120	5,4	8,9	10,0	4,0	32,8	2790	254,0	9,22	143,0	206,0	34,3	2,50
24	27,3	240	115	5,6	9,5	10,5	4,0	34,8	3460	289,0	9,97	163,0	198,0	34,5	2,37
24а	29,4	240	125	5,6	9,8	10,5	4,0	37,5	3800	317,0	10,10	178,0	260,0	41,6	2,63
27	31,5	270	125	6,0	9,8	11,0	4,5	40,2	5010	371,0	11,20	210,0	260,0	41,5	2,54
27а	33,9	270	135	6,0	10,2	11,0	4,5	43,2	5500	407,0	11,30	229,0	337,0	50,0	2,80
30	36,5	300	135	6,5	10,2	12,0	5,0	46,5	7080	472,0	12,30	268,0	337,0	49,9	2,69
30а	39,2	300	145	6,5	10,7	12,0	5,0	49,9	7780	518,0	12,50	292,0	436,0	60,1	2,95
33	42,2	330	140	7,0	11,2	13,0	5,0	53,8	9840	597,0	13,50	339,0	419,0	59,9	2,79
36	48,6	360	145	7,5	12,3	14,0	6,0	61,9	13380	743,0	14,70	423,0	516,0	71,1	2,89
40	56,1	400	155	8,0	13,0	15,0	6,0	71,4	18930	947,0	16,30	540,0	666,0	85,9	3,05
45	65,2	450	160	8,6	14,2	16,0	7,0	83,0	27450	1220,0	18,20	699,0	807,0	101,0	3,12
50	76,8	500	170	9,5	15,2	17,0	7,0	97,8	39290	1570,0	20,00	905,0	1040,0	122,0	3,26
55	89,8	550	180	10,3	16,5	18,0	7,0	114,0	55150	2000,0	22,00	1150,0	1350,0	150,0	3,44
60	104,0	600	190	11,1	17,8	20,0	8,0	132,0	75450	2510,0	23,90	1450,0	1720,0	181,0	3,60
65	120,0	650	200	12,0	19,2	22,0	9,0	153,0	101400	3120,0	25,80	1800,0	2170,0	217,0	3,77
70	138,0	700	210	13,0	20,8	24,0	10,0	176,0	134600	3840,0	27,70	2230,0	2730,0	260,0	3,94
70а	158,0	700	210	15,0	24,0	24,0	10,0	202,0	152700	4360,0	27,50	2550,0	3240,0	309,0	4,01
70б	184,0	700	210	17,5	28,2	24,0	10,0	234,0	175370	5010,0	27,40	2940,0	3910,0	373,0	4,09

Швеллеры в соответствии с ГОСТ 8240—56\*



Обозначения:

- $h$  — высота швеллера;
- $b$  — ширина полки;
- $d$  — толщина стенки;
- $t$  — средняя толщина полки;
- $R$  — радиус внутреннего закругления;
- $r$  — радиус закругления полки;

- $J$  — момент инерции;
- $W$  — момент сопротивления;
- $i$  — радиус инерции;
- $S$  — статический момент полусечения;
- $u_0$  — расстояние от оси  $y-y$  до наружной грани стенки.

Номер профиля	Вес 1 пог. м, кг	Размеры, мм						Площадь сечения, см <sup>2</sup>	Справочные величины для осей							№ шп.
		$h$	$b$	$d$	$t$	$R$	$r$		$x-x$				$y-y$			
									$J_x$ , см <sup>4</sup>	$W_x$ , см <sup>3</sup>	$i_x$ , см	$S_x$ , см <sup>3</sup>	$J_y$ , см <sup>4</sup>	$W_y$ , см <sup>3</sup>	$i_y$ , см	
5	4,84	50	32	4,4	7,0	6,0	2,5	6,16	22,8	9,1	1,92	5,59	5,61	2,75	0,954	1,16
6,5	5,90	65	36	4,4	7,2	6,0	2,5	7,51	48,6	15,0	2,54	9,0	8,7	3,68	1,08	1,24
8	7,05	80	40	4,5	7,4	6,5	2,5	8,98	89,4	22,4	3,16	13,3	12,8	4,75	1,19	1,31
10	8,59	100	46	4,5	7,6	7,0	3,0	10,90	174,0	34,8	3,99	20,4	20,4	6,46	1,37	1,44

12	10,40	120	52	4,8	7,8	7,5	3,0	13,30	304,0	50,6	4,78	29,6	31,2	8,52	1,53	1,54
14	12,30	140	58	4,9	8,1	8,0	3,0	15,60	491,0	70,2	5,60	40,8	45,4	11,00	1,70	1,67
14a	13,30	140	62	4,9	8,7	8,0	3,0	17,00	545,0	77,8	5,66	45,1	57,5	13,30	1,84	1,87
16	14,20	160	64	5,0	8,4	8,5	3,5	18,10	747,0	93,4	6,42	54,1	63,3	13,80	1,87	1,80
16a	15,30	160	68	5,0	9,0	8,5	3,5	19,50	823,0	103,0	6,49	59,4	78,8	16,40	2,01	2,00
18	16,30	180	70	5,1	8,7	9,0	3,5	20,70	1090,0	121,0	7,24	69,8	86,0	17,00	2,04	1,94
18a	17,40	180	74	5,1	9,3	9,0	3,5	22,20	1190,0	132,0	7,32	76,1	105,0	20,00	2,18	2,13
20	18,40	200	76	5,2	9,0	9,5	4,0	23,40	1520,0	152,0	8,07	87,8	113,0	20,50	2,20	2,07
20a	19,80	200	80	5,2	9,7	9,5	4,0	25,20	1670,0	167,0	8,15	95,9	139,0	24,20	2,35	2,28
22	21,00	220	82	5,4	9,5	10,0	4,0	26,70	2110,0	192,0	8,89	110,0	151,0	25,10	2,37	2,21
22a	22,60	220	87	5,4	10,2	10,0	4,0	28,80	2330,0	212,0	8,99	121,0	187,0	30,00	2,55	2,46
24	24,00	240	90	5,6	10,0	10,5	4,0	30,60	2900,0	242,0	9,73	139,0	208,0	31,60	2,60	2,42
24a	25,80	240	95	5,6	10,7	10,5	4,0	32,90	3180,0	265,0	9,84	151,0	254,0	37,20	2,78	2,67
27	27,70	270	95	6,0	10,5	11,0	4,5	35,20	4160,0	308,0	10,90	178,0	262,0	37,30	2,73	2,47
30	31,80	300	100	6,5	11,0	12,0	5,0	40,50	5810,0	387,0	12,00	224,0	327,0	43,60	2,84	2,52
33	36,50	330	105	7,0	11,7	13,0	5,0	46,50	7980,0	484,0	13,10	281,0	410,0	51,80	2,97	2,59
36	41,90	360	110	7,5	12,6	14,0	6,0	53,40	10820,0	601,0	14,20	350,0	513,0	61,70	3,10	2,68
40	48,30	400	115	8,0	13,5	15,0	6,0	61,50	15220,0	761,0	15,70	444,0	642,0	73,40	3,23	2,75

## § 5.5. СПОСОБЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ЦЕНТРОБЕЖНОГО МОМЕНТА ИНЕРЦИИ

Для определения положения главных осей и величины главных моментов инерции, как следует из формул (5.15) и (5.17), необходимо знать величину центробежного момента инерции сечения.

Центробежный момент инерции может быть найден из выражения (5.7) путем непосредственного интегрирования или по формулам (5.11) и (5.12), связывающим центробежные моменты инерции при параллельном переносе осей.

Если известны величины главных моментов инерции  $J_x$  и  $J_y$  и положение осей  $x_0$  и  $y_0$  относительно главных осей, то центробежный момент инерции может быть найден по формуле (5.19).

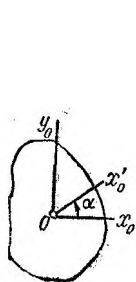


РИС. 5.12

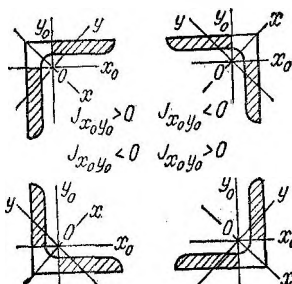


РИС. 5.13

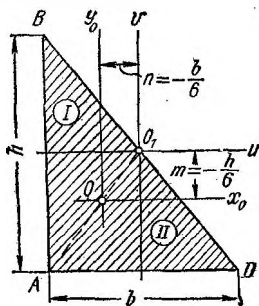


РИС. 5.14

Центробежный момент инерции можно вычислить по формуле (5.13), зная величины трех осевых моментов инерции  $J_{x_0}$ ,  $J_{y_0}$ ,  $J_{x_0'}$  и угол  $\alpha$  (рис. 5.12):

$$J_{x_0 y_0} = \frac{J_{x_0} \cos^2 \alpha + J_{y_0} \sin^2 \alpha - J_{x_0'}}{\sin 2\alpha}. \quad (5.13')$$

Если известны величины осевых моментов инерции  $J_x$ ,  $J_y$ ,  $J_{x_0}$  и  $J_{y_0}$  относительно главных осей  $x$  и  $y$  и относительно осей  $x_0$  и  $y_0$ , то центробежный момент инерции относительно осей  $x_0$  и  $y_0$  может быть вычислен по одной из следующих формул:

$$J_{x_0 y_0} = \pm \sqrt{J_{x_0} J_{y_0} - J_x J_y}; \quad (5.22)$$

$$J_{x_0 y_0} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{(J_x - J_y)^2 - (J_{x_0} - J_{y_0})^2}; \quad (5.23)$$

$$\begin{aligned} J_{x_0 y_0} &= \pm \sqrt{(J_{x_0} - J_y)(J_{y_0} - J_x)} = \\ &= \pm \sqrt{(J_x - J_{x_0})(J_x - J_{y_0})}. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Знак в правой части этих формул перед радикалом зависит от знака центробежного момента инерции.

Если известно расположение главных осей инерции, то знак центробежного момента определяется по следующему правилу: центробежный момент инерции положителен, если ось с максимальным моментом инерции проходит через 2-й и 4-й квадранты, и отрицателен, если эта ось проходит через 1-й и 3-й квадранты.

На рис. 5.13 для иллюстрации приведенного правила дано четыре варианта расположения равнобокого уголка с указанием знака для центробежного момента инерции.

**Пример 5.3.** Найти центробежный момент инерции прямоугольного треугольника (рис. 5.14) относительно центральных осей  $x_0y_0$ .

**Решение.** Медиана  $AO_1$  треугольника  $ABD$  делит его на два треугольника  $ABO_1$  и  $AO_1D$ . Через точку  $O_1$  проведем оси  $u$  и  $v$ , параллельные центральным осям  $x_0$  и  $y_0$ .

Центробежный момент инерции треугольника  $ABO_1$  относительно осей  $u$  и  $v$

$$J_{uv}^I = 0,$$

так как ось  $u$  является для этого треугольника осью симметрии.

Для треугольника  $AO_1D$  осью симметрии будет ось  $v$ , поэтому его центробежный момент инерции относительно осей  $u$  и  $v$  также равен нулю:

$$J_{uv}^{II} = 0.$$

Таким образом, центробежный момент инерции треугольника  $ABD$

$$J_{uv} = J_{uv}^I + J_{uv}^{II} = 0.$$

С другой стороны, по формуле (5.11)

$$J_{uv} = J_{x_0y_0} + Emn.$$

В нашем случае  $m = -\frac{h}{6}$ ;  $n = -\frac{b}{6}$ ;  $F = \frac{bh}{2}$ .

Подставив эти данные в формулу (5.11), получим

$$0 = J_{x_0y_0} + \frac{bh}{2} \left(-\frac{h}{6}\right) \left(-\frac{b}{6}\right),$$

откуда

$$J_{x_0y_0} = -\frac{b^2h^2}{72}.$$

**Пример 5.4.** Найти величину центробежного момента инерции равнобокого уголка  $100 \times 100 \times 10$  мм по ГОСТ 8509—57 относительно центральных осей  $x_0$  и  $y_0$  (рис. 5.15).

**Решение.** Из таблицы сортамента выписываем необходимые для расчета данные:

$$J_{\max} = J_x = 284 \text{ см}^4; J_{\min} = J_y = 74,1 \text{ см}^4.$$

По формуле (5.19)

$$J_{x_0 y_0} = \frac{J_x - J_y}{2} \sin 2\alpha = \frac{284 - 74,1}{2} \sin(-90^\circ) \approx -105 \text{ см}^4.$$

**Пример 5.5.** Вычислить центробежный момент инерции неравнобокого уголка  $100 \times 63 \times 8 \text{ мм}$  (рис. 5.16) по ГОСТ 8510—57 относительно центральных осей  $x_0$  и  $y_0$ .

**Решение.** Для уголка из таблицы сортамента имеем:

$$J_{y_0} = 39,2 \text{ см}^4; J_{x_0} = 127 \text{ см}^4; J_y = 23,4 \text{ см}^4; \text{tg } \alpha = 0,391.$$

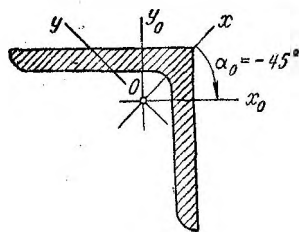


РИС. 5.15

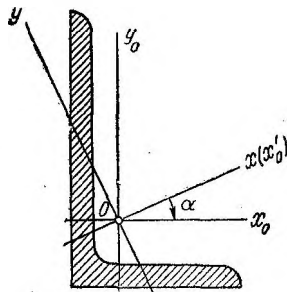


РИС. 5.16

Находим:

$$\alpha = 21^\circ 21'; \cos \alpha = \cos 21^\circ 21' = 0,931; \sin \alpha = \sin 21^\circ 21' = 0,364; \\ \sin 2\alpha = \sin 42^\circ 42' = 0,678; J_x = J_{x_0} + J_{y_0} - J_y = 127 + 39,2 - 23,4 = \\ = 142,8 \text{ см}^4.$$

По формуле (5.19)

$$J_{x_0 y_0} = \frac{J_x - J_y}{2} \sin(-2\alpha) = \frac{142,8 - 23,4}{2} (-0,678) \approx -40,5 \text{ см}^4.$$

По формуле (5.13)

$$J_{x_0 y_0} = \frac{J_{x_0} \cos^2 \alpha + J_{y_0} \sin^2 \alpha - J_{x_0'}'}{\sin 2\alpha} = \\ = \frac{127 \cdot 0,931^2 + 39,2 \cdot 0,364^2 - 142,8}{0,678} \approx -40,5 \text{ см}^4.$$

По формуле (5.24)

$$J_{x_0 y_0} = -\sqrt{(J_{x_0} - J_y)(J_{y_0} - J_y)} = \\ = \sqrt{(127,0 - 23,4)(39,2 - 23,4)} \approx -40,5 \text{ см}^4.$$

## § 5.6. ПРИМЕРЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ГЛАВНЫХ ЦЕНТРАЛЬНЫХ МОМЕНТОВ ИНЕРЦИИ

**Пример 5.6.** Для заданного сечения (рис. 5.17) определить:

- 1) положение центра тяжести сечения;
- 2) момент инерции сечения относительно оси  $u$ ;
- 3) главные центральные моменты инерции  $J_x$  и  $J_y$ .

Размеры сечения даны в сантиметрах.

**Решение.** Заштрихованную площадь можно рассматривать как разность площадей большего и меньшего прямоугольников.

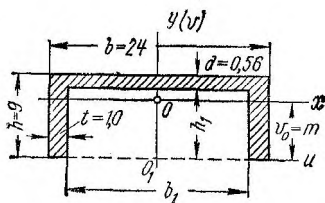


РИС. 5.17

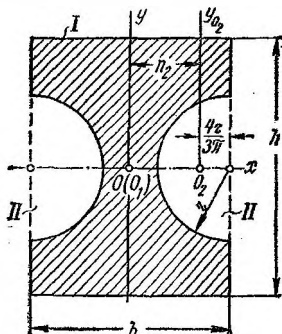


РИС. 5.18

- 1) Для данного сечения ось  $v$  является осью симметрии и положение центра тяжести определяется одной координатой

$$v_0 = \frac{S_u}{F} = \frac{S_u^I - S_u^{II}}{F_1 - F_2} = \frac{bh \frac{h}{2} - b_1 h_1 \frac{h_1}{2}}{bh - b_1 h_1} = \frac{bh^2 - b_1 h_1^2}{2(bh - b_1 h_1)}$$

После подстановки числовых данных получим

$$v_0 = \frac{24 \cdot 9^2 - 22 \cdot 8,44^2}{2(24 \cdot 9 - 22 \cdot 8,44)} \approx 6,22 \text{ см.}$$

- 2) Момент инерции сечения относительно оси  $u$  определяется по формуле

$$J_u = J_u^I - J_u^{II} = \frac{bh^3}{3} - \frac{b_1 h_1^3}{3} = \frac{24 \cdot 9^3}{3} - \frac{22 \cdot 8,44^3}{3} \approx 1423 \text{ см}^4.$$

- 3) Момент инерции сечения относительно оси  $x$  находим по формуле (5.10):

$$J_x = J_u - Fm^2 = 1423 - 30,3 \cdot 6,22^2 = 251 \text{ см}^4.$$

Так как ось  $y$  является центральной для обоих прямоугольников, то

$$J_y = J_y^I - J_y^{II} = \frac{b^3 h - b_1^3 h_1}{12} = \frac{24^3 \cdot 9 - 22^3 \cdot 8,44}{12} \approx 2900 \text{ см}^4.$$

**Пример 5.7.** Передняя ось грузового автомобиля имеет сечение, показанное на рис. 5.18. Определить главные центральные моменты инерции сечения.

**Решение.** Оси  $x$  и  $y$ , как оси симметрии, являются главными центральными осями.

Рассматривая момент инерции заштрихованной фигуры как разность между моментами инерции прямоугольника и моментами инерции двух полукругов, получаем:

$$\begin{aligned} J_x &= J_x^I - 2J_x^{II} = \frac{bh^3}{12} - \frac{\pi r^4}{4}; \\ J_y &= J_y^I - 2J_y^{II} = J_y^I - 2(J_{y_{c_1}} + F_2 l_2^2) = \\ &= \frac{hb^3}{12} - 2 \left[ 0,11r^4 + \frac{\pi r^2}{2} \left( \frac{b}{2} - \frac{4r}{3\pi} \right)^2 \right]. \end{aligned}$$

**Пример 5.8.** Определить величины главных центральных моментов инерции заданного сечения (рис. 5.19) и расстояние  $a$  между швеллерами из условия, чтобы  $J_x = J_y$ .

**Решение.** Сечение состоит из трех частей: полосы  $I$  и двух швеллеров  $II$ .

Для полосы

$$\begin{aligned} J_{x_1}^I &= \frac{bh^3}{12} = \frac{20 \cdot 2^3}{12} = 13 \text{ см}^4; \\ J_{y_1}^I &= J_y^I = \frac{hb^3}{12} = \frac{2 \cdot 20^3}{12} = 1333 \text{ см}^4; F_1 = 40 \text{ см}^2. \end{aligned}$$

Для одного швеллера из ГОСТ 8240—56 \*

$$J_{x_2}^{II} = 1670 \text{ см}^4; J_{y_2}^{II} = 139 \text{ см}^4; u_0 = 2,28 \text{ см}; F_2 = 25,2 \text{ см}^2.$$

Положение центра тяжести заданного сечения, для которого ось  $y$  является осью симметрии, определяется одной координатой  $v_0$ , вычисляемой по формуле (5.4):

$$v_0 = \frac{S_u}{F} = \frac{S_u^I + S_u^{II}}{F_1 + 2F_2} = \frac{F_1 v_1 + 2F_2 v_2}{F_1 + 2F_2} = \frac{0 + 2 \cdot 25,2 \cdot 11}{40 + 2 \cdot 25,2} \approx 6,11 \text{ см}.$$

Ось симметрии  $y$  и ось  $x$ , проведенная через центр тяжести  $O$  всего сечения перпендикулярно к оси  $y$ , являются главными центральными осями.



Определяем величины главных центральных моментов инерции, пользуясь формулами (5.8) и (5.10):

$$\begin{aligned} J_x &= J_x^I + 2J_x^{II} = J_{x_1}^I + F_1 m_1^2 + 2(J_{x_2}^{II} + F_2 m_2^2) = \\ &= 13 + 40 \cdot 6,11^2 + 2(1670 + 25,2 \cdot 4,89^2) \approx 6050 \text{ см}^4; \\ J_y &= J_y^I + 2J_y^{II} = J_{y_1}^I + 2(J_{y_2}^{II} + F_2 n_2^2) = J_{x_1}^I \end{aligned}$$

откуда

$$n_2 = \sqrt{\frac{J_x - J_{y_1}^I - 2J_{y_2}^{II}}{2F_2}} = \sqrt{\frac{6050 - 1333 - 2 \cdot 139}{2 \cdot 25,2}} \approx 9,4 \text{ см.}$$

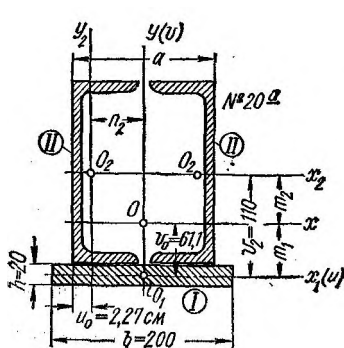


РИС. 5.19

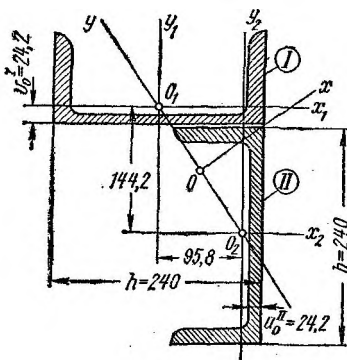


РИС. 5.20

Как следует из рисунка,

$$a = 2(n_2 + u_0) = 2(9,40 + 2,28) = 23,36 \text{ см.}$$

**Пример 5.9.** Для сечения, составленного из двух швеллеров № 24 (ГОСТ 8240—56\*), требуется найти положение главных центральных осей и величины главных центральных моментов инерции (рис. 5.20).

**Решение.** Для швеллера № 24 из таблицы сортамента имеем:

$$\begin{aligned} J_{x_1}^I &= J_{y_2}^{II} = 208 \text{ см}^4; \quad J_{y_1}^I = J_{x_2}^{II} = 2900 \text{ см}^4; \quad h_1 = h_2 = h = 24 \text{ см}; \\ F_1 &= F_2 = F \approx 30,6 \text{ см}^2; \quad v_0^I = u_0^{II} = 2,42 \text{ см.} \end{aligned}$$

Так как одинаковые швеллеры повернуты друг относительно друга на  $90^\circ$ , главная ось  $y$  соединяет центры тяжести  $O_1$  и  $O_2$  швеллеров, а главная ось  $x$  перпендикулярна к ней в центре тяжести.

Как следует из рис. 5.20,

$$O_1 O_2 = \sqrt{9,58^2 + 14,42^2} \approx 17,3 \text{ см}; \quad m = O O_1 = \frac{17,3}{2} = 8,65 \text{ см.}$$

Величины главных центральных моментов инерции определяются по формулам (5.20):

$$J_y = J_{\min} = J_{x_1}^I + J_{y_1}^I = J_p^I = 208 + 2900 = 3108 \text{ см}^4;$$

$$J_x = J_{\max} = J_p^I + 2Fm^2 = 3108 + 2 \cdot 30,6 \cdot 8,65^2 = 7687 \text{ см}^4.$$

**Пример 5.10.** Для сечения, показанного на рис. 5.21, определить положение главных центральных осей и величины главных центральных моментов инерции.

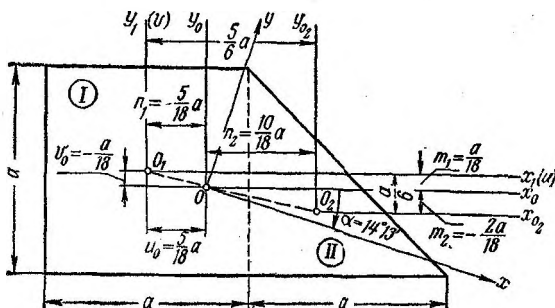


РИС. 5.21

**Решение.** Заданное сечение разбиваем на две части: I — квадрат и II — прямоугольный равнобедренный треугольник.

Определяем положение центра тяжести сечения относительно осей  $u, v$ , совпадающих с осями  $x_1, y_1$ :

$$u_0 = \frac{S_v}{F} = \frac{F_1 u_1 + F_2 u_2}{F_1 + F_2} = \frac{0 + \frac{a^2}{2} \cdot \frac{5}{6} a}{a^2 + \frac{a^2}{2}} = \frac{5}{18} a;$$

$$v_0 = \frac{S_u}{F} = \frac{F_1 v_1 + F_2 v_2}{F_1 + F_2} = \frac{0 + \frac{a^2}{2} \left(-\frac{a}{6}\right)}{a^2 + \frac{a^2}{2}} = -\frac{1}{18} a.$$

Вычисляем осевые и центробежный моменты инерции относительно центральных осей на основании формул (5.8), (5.10) и (5.11):

$$J_{x_0} = J_{x_0}^I + J_{x_0}^{II} = J_{x_1}^I + F_1 m_1^2 + J_{x_{02}}^{II} + F_2 m_2^2 =$$

$$= \frac{a^4}{12} + a^2 \left(\frac{a}{18}\right)^2 + \frac{a^4}{36} + \frac{a^2}{2} \left(\frac{2a}{18}\right)^2 = \frac{39}{324} a^4.$$

(Значения  $J_{x_1}^I$  для квадрата и  $J_{x_{01}}^{II}$  для треугольника взяты из табл. 5.1.)

$$\begin{aligned} J_{y_0} &= J_{y_0}^I + J_{y_0}^{II} = J_{y_1}^I + F_1 n_1^2 + J_{y_{01}}^{II} + F_2 n_2^2 = \\ &= \frac{a^4}{12} + a^2 \left( \frac{5}{18} a \right)^2 + \frac{a^4}{36} + \frac{a^2}{2} \left( \frac{10}{18} a \right)^2 = \frac{111}{324} a^4; \\ J_{x_0 y_0} &= J_{x_0 y_0}^I + J_{x_0 y_0}^{II} = J_{x_1 y_1}^I + F_1 m_1 n_1 + \\ &+ J_{x_{01} y_{01}}^{II} + F_2 m_2 n_2 = 0 + a^2 \left( -\frac{5}{18} a \right) \frac{1}{18} a - \frac{a^4}{72} + \\ &+ \frac{a^2}{2} \cdot \frac{10}{18} a \left( -\frac{2}{18} a \right) = -\frac{39}{648} a^4, \end{aligned}$$

(Значение центробежного момента инерции треугольника  $J_{x_{01} y_{01}}^{II} = -\frac{a^4}{72}$  взято из примера 5.3.)

Положение главных осей инерции определяем по формуле

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 2\alpha_0 &= -\frac{2J_{x_0 y_0}}{J_{x_0} - J_{y_0}} = -\frac{2(-39)}{78 - 222} = -0,542; \\ 2\alpha_0 &= -28^\circ 26'; \alpha_0 = -14^\circ 13'. \end{aligned}$$

Так как  $J_{x_0} < J_{y_0}$ , то  $\angle \alpha_0$  определяет положение главной оси  $x$ , относительно которой момент инерции имеет минимальное значение. Величины главных моментов инерции определяем по формуле

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} J_{\max} \\ J_{\min} \end{aligned} \right\} &= \frac{J_{x_0} + J_{y_0}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(J_{x_0} - J_{y_0})^2 + 4J_{x_0 y_0}^2} = \\ &= \frac{39 + 111}{2 \cdot 324} a^4 \pm \frac{a^4}{2} \sqrt{\left( \frac{39 - 111}{324} \right)^2 + 4 \left( \frac{39}{648} \right)^2} = \frac{150 \pm 82}{648} a^4; \\ J_x = J_{\min} &= \frac{34}{324} a^4; J_y = J_{\max} = \frac{116}{324} a^4. \end{aligned}$$

**Пример 5.11.** Для заданного сечения (рис. 5.22), состоящего из швеллера и равнобокого уголка, необходимо:

- 1) определить положение центра тяжести;
- 2) найти величины осевых и центробежного моментов инерции относительно случайных осей ( $x_0$  и  $y_0$ ), проходящих через центр тяжести;
- 3) определить направление главных центральных осей;
- 4) найти величины главных центральных моментов инерции.

Решение. Сечение состоит из двух элементов, отмеченных цифрами I и II. Через центры тяжести сечения каждого элемента проводим горизонтальные и вертикальные оси координат ( $x_1, y_1$  и  $x_{0_1}, y_{0_1}$ ) и выписываем все данные, которые потребуются при дальнейших расчетах.

Швеллер № 20 (ГОСТ 8240—56\*):

$$F_1 = 23,4 \text{ см}^2; J_{x_1}^I = 1520 \text{ см}^4; J_{y_1}^I = 113 \text{ см}^4;$$

$$J_{x_1 y_1}^I = 0; u_0^I = 2,07 \text{ см}.$$

Уголок 100 × 100 × 10 мм (ГОСТ 8509—57):

$$F_2 = 19,2 \text{ см}^2; J_{x_{02}}^I = J_{y_{02}}^{II} = 179 \text{ см}^4;$$

$$J_{x_{02} y_{02}}^{II} = -105 \text{ см}^4 \text{ (см. пример 5.4, стр. 124); } u_0^{II} = v_0^{II} = 2,83 \text{ см}.$$

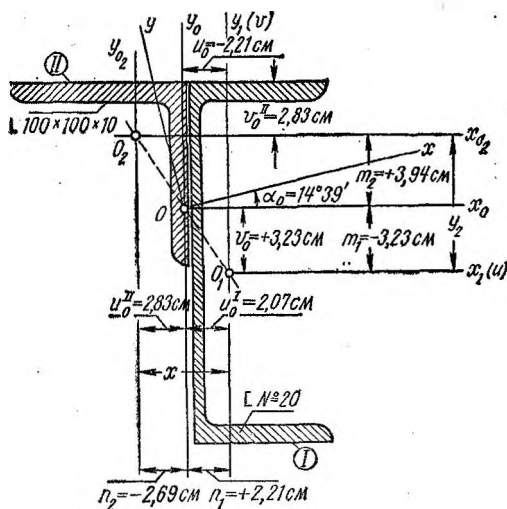


РИС. 5.22

1. Определяем координаты центра тяжести всей фигуры относительно осей  $u$  и  $v$  по формулам (5.4):

$$u_0 = \frac{S_y}{F} = \frac{F_1 u_1 + F_2 u_2}{F_1 + F_2} = \frac{0 + 19,2(-4,9)}{23,4 + 19,2} = -2,21 \text{ см};$$

$$v_0 = \frac{S_x}{F} = \frac{F_1 v_1 + F_2 v_2}{F_1 + F_2} = \frac{0 + 19,2 \cdot 7,17}{23,4 + 19,2} = 3,23 \text{ см}.$$

После этого, пользуясь принятым масштабом, наносим положение центра тяжести сечения (точка  $O$  на рис. 5.22). Точка  $O$  должна лежать на линии, соединяющей точки  $O_1$  и  $O_2$ .

Через точку  $O$  проводим центральные оси для всего сечения  $x_0$  и  $y_0$ , параллельные осям  $u$  и  $v$ .

Координаты центров тяжести отдельных элементов ( $O_1$  и  $O_2$ ) относительно центральных осей  $x_0$  и  $y_0$  имеют следующие значения:

$$\begin{aligned} m_1 &= -3,23 \text{ см}; n_1 = +2,21 \text{ см}; \\ m_2 &= 10 - (2,83 + 3,23) = +3,94 \text{ см}; \\ n_2 &= -(2,83 + 2,07 - 2,21) = -2,69 \text{ см}. \end{aligned}$$

Находим статические моменты всего сечения относительно центральных осей  $x_0$  и  $y_0$ :

$$\begin{aligned} S_{x_0} &= F_1 m_1 + F_2 m_2 = 23,4(-3,23) + 19,2 \cdot 3,94 = +0,06 \text{ см}^3; \\ S_{y_0} &= F_1 n_1 + F_2 n_2 = 23,4 \cdot 2,21 + 19,2(-2,69) = -0,06 \text{ см}^3. \end{aligned}$$

Полученные значения статических моментов  $S_{x_0}$  и  $S_{y_0}$  близки к нулю. Это свидетельствует, что координаты центра тяжести сечения определены достаточно точно.

2. Вычисляем осевые и центробежный моменты инерции заданного сечения относительно центральных осей, применяя формулы (5.8), (5.10) и (5.11):

$$\begin{aligned} J_{x_0} &= J_{x_0}^I + J_{x_0}^{II} = J_{x_1}^I + F_1 m_1^2 + J_{x_{02}}^{II} + F_2 m_2^2 = \\ &= 1520 + 23,4 \cdot 3,23^2 + 179 + 19,2 \cdot 3,94^2 = 2241 \text{ см}^4; \\ J_{y_0} &= J_{y_0}^I + J_{y_0}^{II} = J_{y_1}^I + F_1 n_1^2 + J_{y_{02}}^{II} + F_2 n_2^2 = \\ &= 113 + 23,4 \cdot 2,21^2 + 179 + 19,2 \cdot 2,69^2 = 545 \text{ см}^4; \\ J_{x_0 y_0} &= J_{x_0 y_0}^I + J_{x_0 y_0}^{II} = J_{x_1 y_1}^I + F_1 m_1 n_1 + J_{x_{02} y_{02}}^{II} + F_2 m_2 n_2 = \\ &= 0 + 23,4(-3,23) \cdot 2,21 - 105 + 19,2 \cdot 3,94(-2,69) = -476 \text{ см}^4. \end{aligned}$$

Правильность полученных значений величин  $J_{x_0}$ ,  $J_{y_0}$  и  $J_{x_0 y_0}$  проверим, вычислив эти же величины по формулам:

$$\begin{aligned} J_{x_0} &= J_{x_1} - F m_1^2; J_{y_0} = J_{y_1} - F n_1^2; J_{x_0 y_0} = J_{x_1 y_1} - F m_1 n_1; \quad (A) \\ J_{x_1} &= J_{x_1}^I + J_{x_{02}}^{II} + F_2 (m_1 + m_2)^2 = 1520 + 179 + \\ &\quad + 19,2 \cdot 7,17^2 = 2686 \text{ см}^4; \\ J_{y_1} &= J_{y_1}^I + J_{y_{02}}^{II} + F_2 (n_1 + n_2)^2 = 113 + 179 + 19,2 \cdot 4,9^2 = 753 \text{ см}^4; \\ J_{x_1 y_1} &= J_{x_1 y_1}^I + J_{x_{02} y_{02}}^{II} + F_2 (m_1 + m_2) (n_1 + n_2) = \\ &= 0 - 105 + 19,2 \cdot 7,17(-4,9) = -780 \text{ см}^4. \end{aligned}$$

Подставляем полученные данные в формулы (A):

$$\begin{aligned} J_{x_0} &= 2686 - 42,6 \cdot 3,23^2 = 2242 \text{ см}^4; \\ J_{y_0} &= 753 - 42,6 \cdot 2,21^2 = 545 \text{ см}^4; \\ J_{x_0 y_0} &= -780 - 42,6 \cdot 3,23(-2,21) = -476 \text{ см}^4. \end{aligned}$$

Совпадение результатов вычисления  $J_{x_0}$ ,  $J_{y_0}$  и  $J_{x_0 y_0}$  двумя способами показывает, что они определены правильно.

3. Определяем положение главных осей по формуле (5.15):

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = -\frac{2J_{x_0y_0}}{J_{x_0} - J_{y_0}} = -\frac{2(-476)}{2241 - 545} = 0,561;$$

$$2\alpha_0 = 29^\circ 18'; \alpha_0 = 14^\circ 39'.$$

В нашем случае  $J_{x_0} > J_{y_0}$  и  $\alpha_0$  дает направление главной оси  $x$  с максимальным моментом инерции (см. рис. 5.22).

4. Вычисляем величины главных центральных моментов инерции по формуле (5.17):

$$\left. \begin{matrix} J_x \\ J_y \end{matrix} \right\} = \frac{J_{x_0} + J_{y_0}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(J_{x_0} - J_{y_0})^2 + 4J_{x_0y_0}^2} =$$

$$= \frac{2241 + 545}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(2241 - 545)^2 + 4 \cdot 476^2} = (1393 \pm 973) \text{ см}^4;$$

$$J_x = J_{\max} = 2366 \text{ см}^4; J_y = J_{\min} = 420 \text{ см}^4.$$

Подсчитаем величину центробежного момента инерции всего сечения относительно центральных осей  $x_0$  и  $y_0$  по формуле (5.19):

$$J_{x_0y_0} = \frac{J_{\max} - J_{\min}}{2} \sin(-2\alpha_0) = \frac{2366 - 420}{2} (-0,4894) = -475 \text{ см}^4.$$

$$[\sin(-2\alpha_0) = -\sin(29^\circ 18') = -0,4894].$$

Сравнение величины  $J_{x_0y_0}$  с полученной ранее в п. 2 позволяет считать, что величины главных центральных моментов инерции  $J_x$  и  $J_y$  и положение главных центральных осей  $x$  и  $y$  найдены верно.

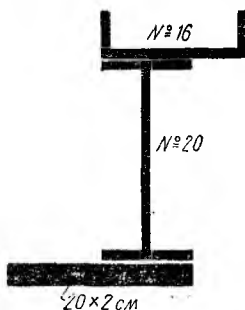


РИС. 5.23

**Пример 5.12.** Для составного сечения, состоящего из прямоугольника, двутавра и швеллера (рис. 5.23), определить положение главных центральных осей и величины главных центральных моментов инерции.

**Решение.** На рис. 5.24 отдельные элементы сечения, вычерченного в масштабе, занумерованы цифрами I, II, III, показаны оси и все необходимые размеры (в см), которые требуются для дальнейшего расчета.

1. Выписываем исходные данные для элементов сечения.

I — прямоугольник:

$$F_1 = 40 \text{ см}^2; J_{x_1}^I = \frac{20 \cdot 2^3}{12} \approx 13,3 \text{ см}^4; J_{y_1}^I = \frac{20^3 \cdot 2}{12} \approx 1333,3 \text{ см}^4;$$

$$J_{x_1y_1}^I = 0.$$

II — двутавр № 20 (ГОСТ 8239—56\*):

$$F_2 = 26,8 \text{ см}^2; J_{x_2}^{II} = 1840,0 \text{ см}^4; J_{y_2}^{II} = 115,0 \text{ см}^4;$$

$$J_{x_2y_2}^{II} = 0.$$

III — швеллер № 16 (ГОСТ 8240—56\*):

$$F_3 = 18,1 \text{ см}^2; J_{x_3}^{\text{III}} = 63,3 \text{ см}^4; J_{y_3}^{\text{III}} = 747,0 \text{ см}^4;$$

$$J_{x_3 y_3}^{\text{III}} = 0; v^{\text{III}} = 1,8 \text{ см}.$$

Координаты центра тяжести определяем относительно произвольно выбранных осей  $u$  и  $v$  (см. рис. 5.24).

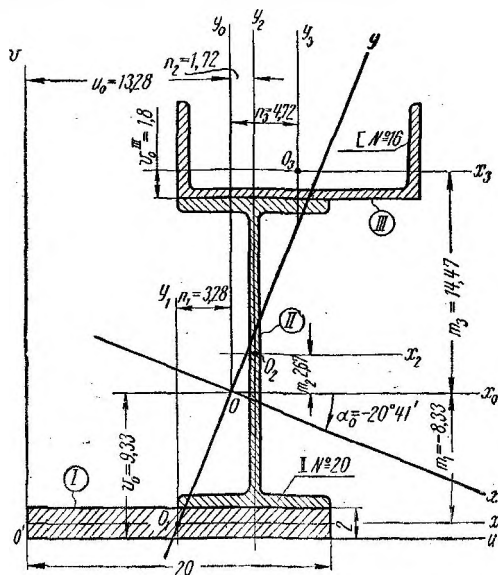


РИС. 5.24




Исходные данные и результаты вычислений для удобства заносим в таблицу (см. стр. 133).

2. Используя табличные данные столбцов 3, 6 и 7-го, определяем координаты центра тяжести сечения:

$$u_0 = \frac{S_v}{F} = \frac{\sum F_i u_i}{\sum F_i} = \frac{1127,8}{84,9} \approx 13,28 \text{ см};$$

$$v_0 = \frac{S_u}{F} = \frac{\sum F_i v_i}{\sum F_i} = \frac{792,4}{84,9} \approx 9,33 \text{ см}.$$

Через центр тяжести всего сечения (точку  $O$ ) проводим центральные оси  $x_0$  и  $y_0$ , параллельные осям  $u$  и  $v$ .

Номер эле- мента	Эле- мент	$F_i,$ $см^2$	Координаты центра тяжести элементов в осях $uO'v$		Статические моменты пло- щадей эле- ментов		Моменты инерции эле- ментов сечения относи- тельно их центральных осей			Координаты центра тяжес- ти площадей элементов от- носительно осей $x_0$ и $y_0$		$F_i n_i^2,$ $см^4$	$F_i m_i^2,$ $см^4$	$F_i n_i m_i,$ $см^4$
			$u_i,$ $см$	$v_i,$ $см$	$F_i u_i,$ $см^3$	$F_i v_i,$ $см^3$	$J_{x_i}^i,$ $см^4$	$J_{y_i}^i,$ $см^4$	$J_{x_i y_i}^i,$ $см^4$	$n_i,$ $см$	$m_i,$ $см$			
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1		40,0	10	1,0	400,0	40,0	13,3	1333,3	0	-3,28	-8,33	430,3	2775,6	1092,8
2		26,8	15	12,0	402,0	321,6	1840,0	115,0	0	1,72	2,67	79,3	191,1	123,0
3		18,1	18	23,8	325,8	430,8	63,3	747,0	0	4,72	14,47	403,3	3789,8	1236,2
	$\Sigma$	84,9			1127,8	792,4	1916,6	2195,3	0			912,9	6756,5	2452,0



Координаты центров тяжести площадей элементов относительно центральных осей вычисляем по формулам:

$$n_i = u_i - u_0;$$

$$m_i = v_i - v_0.$$

Результаты вычислений приведены в 11-м и 12-м столбцах таблицы (см. стр. 134).

После вычисления  $n_i$  и  $m_i$  заполняем последние три столбца таблицы, в которых даны величины  $F_i n_i^2$ ,  $F_i m_i^2$  и  $F_i n_i m_i$ , необходимые для определения  $J_{x_0}$ ,  $J_{y_0}$  и  $J_{x_0 y_0}$ .

3. По данным таблицы (см. стр. 134) определяем осевые и центробежные моменты инерции всего сечения относительно центральных осей  $x_0$  и  $y_0$ :

$$J_{x_0} = \sum J_{x_i}^l + \sum F_i m_i^2 = 1917 + 6757 = 8674 \text{ см}^4;$$

$$J_{y_0} = \sum J_{y_i}^l + \sum F_i n_i^2 = 2195 + 913 = 3108 \text{ см}^4;$$

$$J_{x_0 y_0} = \sum J_{x_i y_i}^l + \sum F_i n_i m_i = 0 + 2452 = 2452 \text{ см}^4.$$

4. Находим положение главных осей:

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = -\frac{2J_{x_0 y_0}}{J_{x_0} - J_{y_0}} = -\frac{2 \cdot 2452}{8674 - 3108} = -0,8811;$$

$$2\alpha_0 = -41^\circ 22'; \alpha_0 = -20^\circ 41'.$$

Так как угол  $\alpha_0 < 0$ , то откладываем его от оси  $x_0$  по часовой стрелке и проводим главные центральные оси сечения  $x$  и  $y$ .

Поскольку  $J_{x_0 y_0} > 0$ , ось с максимальным моментом инерции — ось  $x$  — проходит через II и IV квадранты.

5. Вычисляем главные центральные моменты инерции сечения:

$$\left. \begin{array}{l} J_{\max} \\ J_{\min} \end{array} \right\} = \frac{J_{x_0} + J_{y_0}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(J_{x_0} - J_{y_0})^2 + 4J_{x_0 y_0}^2} =$$

$$= \frac{8674 + 3108}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(8674 - 3108)^2 + 4 \cdot 2452^2} = (5891 \pm 3709) \text{ см}^4;$$

$$J_x = J_{\max} = 9600 \text{ см}^4;$$

$$J_y = J_{\min} = 2182 \text{ см}^4.$$

## ГЛАВА 6

### КРУЧЕНИЕ

#### § 6.1. ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ

Деформация кручения прямого бруса вызывается внешними парами сил, действующими в плоскостях, перпендикулярных к оси бруса.

Моменты внешних пар называют *скручивающими моментами* и обозначают  $m$ .

В практике большей частью брус подвергается одновременно деформации кручения и изгиба. Этот случай рассмотрен в гл. 10. При относительно небольших изгибающих моментах деформацию изгиба не учитывают и брус рассчитывают только на кручение.

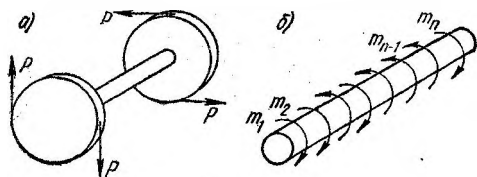


РИС. 6.1

Простейший случай кручения имеет место под действием двух равных по величине и противоположных по направлению пар сил, приложенных к торцам бруса (рис. 6.1, а).

В общем случае на брус могут действовать несколько скручивающих моментов, приложенных в различных сечениях и взаимно уравновешивающихся (рис. 6.1, б).

При кручении в поперечных сечениях бруса внутренние силы приводятся к одному силовому фактору — *крутящему моменту*.

Крутящий момент представляет собой результирующий момент касательных сил, возникающих в поперечном сечении бруса относительно его продольной оси. Крутящий момент обозначают  $M_z$  или  $M_k$ .

#### § 6.2. ВЫЧИСЛЕНИЕ КРУТЯЩИХ МОМЕНТОВ

Для расчета бруса на кручение необходимо знать величину крутящего момента в любом поперечном сечении бруса. Закон изменения крутящих моментов по длине бруса представляют в виде графика (диаграммы) — *эпюры крутящих моментов*.

Внешние скручивающие моменты, приложенные к брусу (рис. 6.2 а), образуют уравновешенную систему сил:

$$\sum m = 0. \quad (6.1)$$

По условию равновесия любой рассматриваемой части бруса (рис. 6.2, б) величина крутящего момента  $M_K$  может быть определена через внешние скручивающие моменты, а именно: крутящий момент в данном сечении численно равен алгебраической сумме скручивающих моментов, действующих на часть бруса по одну сторону от рассматриваемого сечения:

$$M_K = \left| \sum m_{\text{лев}} \right| = \left| \sum m_{\text{прав}} \right|. \quad (6.2)$$

Знак крутящего момента физического смысла не имеет, и общепринятого правила знаков не существует.

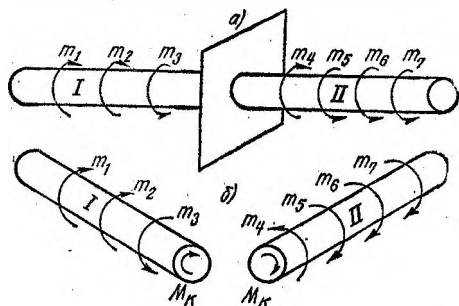


РИС. 6.2



РИС. 6.3

В дальнейшем будем считать, что внешние скручивающие моменты, действующие на оставленную часть бруса против часовой стрелки, если смотреть со стороны сечения (разреза), вызывают в этом сечении положительный крутящий момент, а действующие по часовой стрелке — отрицательный (рис. 6.2, б и 6.3).

Так, например, крутящий момент в изображенном сечении

$$M_K = -m_1 - m_2 + m_3 = m_4 - m_5 - m_6 - m_7.$$

При построении эпюры крутящих моментов их величины откладывают перпендикулярно к прямой, параллельной оси бруса (базы эпюры).

На рис. 6.4, а и б даны два примера построения эпюр крутящих моментов.

Каждая ордината эпюры  $M_K$  дает величину крутящего момента в соответствующем поперечном сечении бруса. В сечениях, где приложены скручивающие моменты, на эпюре получаются «скачки», величина каждого из них равна соответствующему скручивающему моменту.

Сравнение эпюр по рис. 6.4, а и б показывает, что при одной и той же величине наибольшего внешнего скручивающего момента расчетный (наибольший) крутящий момент получается различным в зависимости от расположения по длине бруса деталей, передающих на него скручивающие моменты. Задача о рациональном расположении шкивов возникает при расчете трансмиссионных валов. Очевидно, расположение по рис. 6.4, б целесообразнее.

При расчете брусев часто бывают заданы передаваемая мощность ( $N$ ) и угловая скорость ( $\omega$  или  $n$ ); при этом вращающий (скручивающий) момент вычисляют по одной из следующих формул:

$$t = \frac{N}{\omega}, \quad (6.3)$$

где  $t$  в н·м;  $N$  в вт;  $\omega$  в рад/сек;

$$t = 97\,400 \frac{N}{n}, \quad (6.3 \text{ а})$$

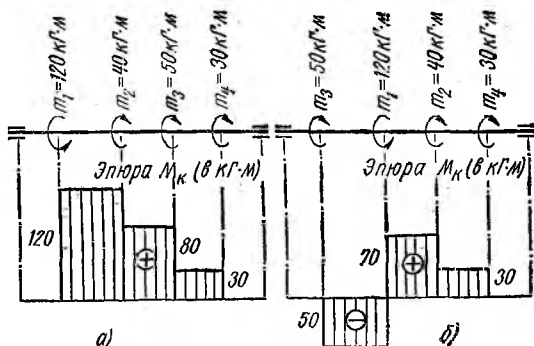


РИС. 6.4

где  $t$  в кг·см;  $N$  в квт;  $n$  в об/мин;

$$t = 71\,620 \frac{N}{n}, \quad (6.3 \text{ б})$$

где  $t$  в кг·см;  $N$  в л. с.;  $n$  в об/мин.

### § 6.3. НАПРЯЖЕНИЯ ПРИ КРУЧЕНИИ БРУСЬЕВ КРУГЛОГО СПЛОШНОГО И КОЛЬЦЕВОГО СЕЧЕНИЙ

#### Определение касательных напряжений

Напряжения и деформации при кручении существенно зависят от формы поперечного сечения бруса. Гипотеза плоских сечений справедлива лишь для бруса с круглым сплошным или кольцевым поперечным сечением. В остальных случаях происходит искажение (депланация) поперечных сечений.

Теория кручения бруса круглого поперечного сечения основана на следующих допущениях (рис. 6.5):

- 1) ось бруса  $OC$  после деформации остается прямой линией;
- 2) расстояния между поперечными сечениями остаются неизменными, т. е. удлинения (укорочения) волокон отсутствуют;

3) поперечные сечения, плоские до деформации, остаются плоскими и перпендикулярными к оси бруса после деформации (гипотеза плоских сечений);

4) радиусы поперечных сечений, поворачиваясь на определенный угол, остаются прямыми (например, радиус  $CB$  займет положение  $CB_1$ ).

Справедливость этих допущений подтверждается экспериментами и точными решениями, получаемыми методами теории упругости.

Угол  $BCB_1 = \varphi$  представляет собой угол поворота сечения  $C$  относительно сечения  $O$ .

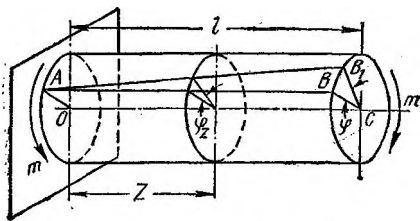


РИС. 6.5

В поперечных сечениях в рассматриваемом случае возникают лишь касательные напряжения, определяемые по формуле

$$\tau_p = \frac{M_k \rho}{J_p}, \quad (6.4)$$

где  $\tau_p$  — касательное напряжение в произвольной точке рассматриваемого поперечного сечения;

$M_k$  — крутящий момент в исследуемом поперечном сечении;

$\rho$  — расстояние от исследуемой точки до оси бруса;

$J_p$  — полярный момент инерции поперечного сечения бруса.

Для круга

$$J_p = \frac{\pi d^4}{32} \approx 0,1d^4. \quad (6.5)$$

Для кругового кольца

$$J_p = \frac{\pi d^4}{32} (1 - c^4) \approx 0,1d^4 (1 - c^4), \quad (6.6)$$

где

$$c = \frac{r_0}{r} = \frac{d_0}{d}.$$

В любой точке поперечного сечения касательное напряжение перпендикулярно к радиусу, проходящему через эту точку.

На рис. 6.6, а и б даны эпюры касательных напряжений для круглого сплошного и кольцевого поперечных сечений.

Наибольшей величины касательные напряжения достигают в крайних точках сечений, наиболее удаленных от оси бруса:

$$\tau_{\max} = \frac{M_K \rho_{\max}}{J_\rho} = \frac{M_K}{W_\rho}, \quad (6.7)$$

где отношение

$$\frac{J_\rho}{\rho_{\max}} = W_\rho \quad (6.8)$$

называют *полярным моментом сопротивления*. Размерность  $W_\rho$  — единица длины в третьей степени ( $\text{м}^3$  или  $\text{см}^3$ ).

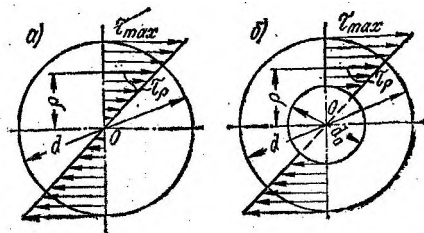


РИС. 6.6

Для круга

$$W_\rho = \frac{\pi d^3}{16} \approx 0,2d^3. \quad (6.9)$$

Для кругового кольца

$$W_\rho = \frac{\pi d^3}{16} (1 - c^4) \approx 0,2d^3 (1 - c^4). \quad (6.10)$$

Полярный момент сопротивления сечения характеризует с чисто геометрической стороны прочность брусев, имеющих круглое сплошное или кольцевое сечение.

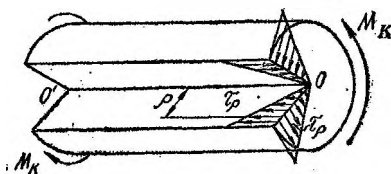


РИС. 6.7

Как следует из закона парности, касательные напряжения возникают и в продольных (радиальных) сечениях бруса (рис. 6.7). Они равны по величине рассмотренным напряжениям  $\tau_\rho$  в соответствующих точках поперечного сечения.

Наличием этих напряжений объясняется тот факт, что у брусьев волокнистого строения, обладающих меньшим сопротивлением сдвигу в продольном направлении, чем в поперечном, разрушение начинается с появления продольных трещин на поверхности.

**Напряженное состояние при кручении**

В точках бруса, работающего на кручение, возникает плоское напряженное состояние — *чистый сдвиг* (см. стр. 65).

Для элемента у поверхности бруса взаимное расположение главных площадок и площадок, на которых возникают максимальные касательные напряжения, показано на рис. 6.8, а. Отдельно этот элемент изображен на рис. 6.8, б.

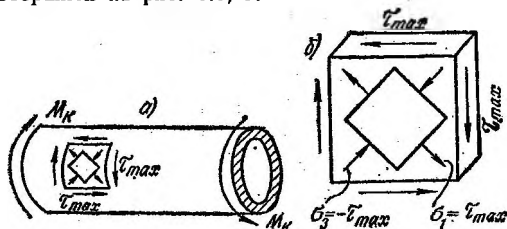


РИС. 6.8

Главные напряжения имеют следующие значения:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= -\sigma_2 = \tau_{\max}; \\ \sigma_3 &= 0. \end{aligned} \tag{6.11}$$

Максимальные касательные напряжения возникают на площадках, принадлежащих поперечному и радиальному сечениям бруса.

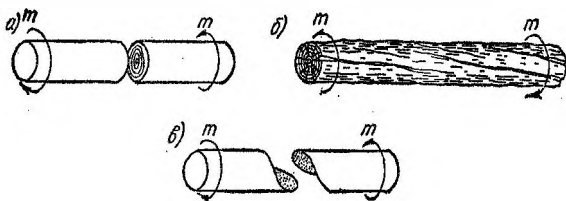


РИС. 6.9

Характер разрушения при кручении связан с типом напряженного состояния и особенностями сопротивления брусьев из различных материалов линейным и угловым деформациям. Стальные брусья разрушаются, срезаясь по поперечным сечениям (рис. 6.9, а); деревянные — с образованием продольных трещин (рис. 6.9, б).

Чугунные брусья разрушаются в результате отрыва частиц материала друг от друга; при этом получают трещины, наклоненные к оси бруса под углом, близким к 45° (рис. 6.9, в), т. е. перпендикулярные к направлениям  $\sigma_1$ .

#### § 6.4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ПРИ КРУЧЕНИИ. ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ ДЕФОРМАЦИИ

Если на участке бруса крутящий момент и полярный момент инерции сечения постоянны, то угол закручивания — угол относительного поворота концевых сечений этого участка (в радианах) — определяется по формуле

$$\varphi = \frac{M_K l}{GJ_p}; \quad (6.12)$$

в градусах

$$\varphi = \frac{180^\circ}{\pi} \cdot \frac{M_K l}{GJ_p}, \quad (6.12 \text{ а})$$

где  $l$  — длина рассматриваемого участка;

$GJ_p$  — жесткость поперечного сечения бруса при кручении.

В формулах (6.12), (6.12 а) и ниже, в формулах (6.13), (6.14), при расчете во внесистемных единицах:  $M_K$  в  $\kappa\Gamma \cdot \text{см}$ ;  $l$  в  $\text{см}$ ;  $G$  в  $\kappa\Gamma/\text{см}^2$ ;  $J_p$  в  $\text{см}^4$ ; при расчете в единицах СИ:  $M_K$  в  $\text{н} \cdot \text{м}$ ;  $l$  в  $\text{м}$ ;  $G$  в  $\text{н}/\text{м}^2$ ;  $J_p$  в  $\text{м}^4$ .

Полярный момент инерции сечения относительно его центра тяжести характеризует с геометрической стороны жесткость брусьев, имеющих круглое или кольцевое сечение и работающих на кручение.

Если брус ступенчатый и крутящий момент скачкообразно изменяется по его длине, то полный угол закручивания бруса, т. е. взаимный угол поворота его концевых сечений, может быть определен суммированием углов закручивания по участкам, в пределах которых  $M_K$  и  $J_p$  постоянны:

$$\varphi = \frac{1}{G} \sum \frac{M_K l}{J_p}. \quad (6.13)$$

Если величины  $M_K$  и  $J_p$  (или одна из них) переменны по длине бруса, то

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \int_{l_i} \frac{M_K dz}{GJ_p}, \quad (6.14)$$

где  $l_i$  — длина участка бруса, в пределах которого законы изменения  $M_K$  и  $J_p$  постоянны.

Угол закручивания на единицу длины бруса называется *относительным углом закручивания*. Он обозначается  $\theta$  и определяется из выражений:

$$\theta = \frac{d\varphi}{dz} = \frac{M_K}{GJ_p} \quad (6.15)$$

или

$$\theta^\circ = \frac{180^\circ}{\pi} \cdot \frac{M_K 100}{GJ_p}. \quad (6.15 \text{ а})$$



Указания о размерностях величин, входящих в правые части формул, даны выше; при расчете во внесистемных единицах формула (6.15) дает величину  $\theta$  в рад/см, а формула (6.15 а) — в град/м; при расчете в единицах СИ — соответственно в рад/м и град/м.

В пределах упругих деформаций зависимость между  $M_k$  и  $\varphi$  линейна, соответствующий график представлен на рис. 6.10.

Потенциальная энергия упругой деформации  $U$  численно равна работе  $A$  внешних сил, которая выражается площадью треугольника  $OAB$ :

$$U = A = \frac{M_k \varphi}{2} = \frac{M_k^2 l}{2GJ_p}. \quad (6.16)$$

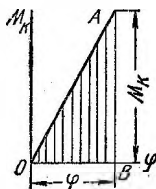


РИС. 6.10

При переменных значениях  $M_k$  и  $J_p$  по длине бруса

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_{l_i} \frac{M_k^2 dz}{GJ_p}. \quad (6.16a)$$

### § 6.5. РАСЧЕТ БРУСЬЕВ НА ПРОЧНОСТЬ И ЖЕСТКОСТЬ ПРИ КРУЧЕНИИ

#### Расчет на прочность

Условие прочности бруса состоит в том, что *наибольшее касательное напряжение в опасном сечении не должно превышать допустимого касательного напряжения*:

$$\tau_{\max} \leq [\tau], \quad (6.17)$$

где  $[\tau]$  — допустимое касательное напряжение при кручении, устанавливаемое в зависимости от материала, характера работы конструкции и других условий.

Превышение наибольшего рабочего напряжения над допустимым разрешается лишь в пределах 5%.

Пользуясь условием прочности (6.17), можно выполнить следующие виды расчетов на прочность.

1. Проверка прочности (проверочный расчет):

$$\tau_{\max} = \frac{\max M_k}{W_p} \leq [\tau]. \quad (6.18)$$

2. Подбор сечения (проектный расчет).

При проектном расчете определяют требуемый момент сопротивления:

$$W_p \geq \frac{\max M_k}{[\tau]}. \quad (6.19)$$

С учетом выражений (6.9), (6.10) из формулы (6.19) получают следующие зависимости для определения требуемого диаметра бруса:

а) для бруса сплошного круглого сечения

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16_{\max} M_{\kappa}}{\pi [\tau]}}; \quad (6.20)$$

б) для бруса кольцевого сечения

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16_{\max} M_{\kappa}}{\pi [\tau] (1 - c^4)}}; \quad (6.21)$$

где

$$c = \frac{d_0}{d}.$$

3. Допускаемый крутящий момент определяют по формуле

$$[M_{\kappa}] = [\tau] W_{\rho}. \quad (6.22)$$

Допускаемые напряжения при кручении для пластичных материалов

$$[\tau] = \frac{\tau_{\tau}}{[n_{\tau}]}; \quad (6.23)$$

для хрупких материалов

$$[\tau] = \frac{\tau_{\text{пч}}}{[n_{\text{пч}}]}, \quad (6.24)$$

где  $\tau_{\tau}$  и  $\tau_{\text{пч}}$  — предел текучести и предел прочности при кручении (сдвиге);

$[n_{\tau}]$  и  $[n_{\text{пч}}]$  — требуемые (допускаемые) коэффициенты запаса прочности.

Для большинства сталей, как установлено экспериментально,

$$\tau_{\tau} \approx (0,5 \div 0,6) \sigma_{\tau}.$$

Поэтому при чистом кручении принимают для стали

$$[\tau] = (0,5 \div 0,6) [\sigma],$$

а для чугуна

$$[\tau] = (1,0 \div 1,2) [\sigma].$$

Сведения о механических характеристиках конструкционных материалов см. в гл. 2.

При приближенном расчете бруса только на кручение неучтенное влияние изгиба, динамического характера нагрузки, переменности напряжений во времени и других факторов компенсируют снижением допускаемого напряжения на кручение.

Для брусьев из стали 35,45, Ст. 5 при их предварительном расчете на чистое кручение принимают  $[\tau] = 250 \div 350 \text{ кг/см}^2$ .

После разработки конструкции бруса производят уточненный расчет на прочность с учетом деформации изгиба, влияния концентрации напряжений, переменности напряжений во времени и др. (см. гл. 10, 13).

**Расчет на жесткость**

Для нормальной работы бруса и связанных с ним деталей он должен иметь достаточную жесткость, т. е. наибольший относительный угол закручивания бруса не должен превышать допускаемого, устанавливаемого на основе опыта проектирования и эксплуатации конструкций, аналогичных рассчитываемой.

Условие жесткости бруса

$$\theta_{\max} = \frac{\max M_{\kappa}}{GJ_p} \leq [\theta] \quad (6.25)$$

или

$$\theta_{\max} = \frac{180^\circ}{\pi} \cdot \frac{100 \max M_{\kappa}}{GJ_p} \leq [\theta^\circ], \quad (6.25a)$$

где  $[\theta]$  и  $[\theta^\circ]$  — допускаемые относительные углы закручивания соответственно в  $\text{рад/см}$  (или  $\text{рад/м}$ ) и  $\text{град/м}$  (указания о размерностях см. на стр. 143).

При проектном расчете на жесткость

$$J_p \geq \frac{\max M_{\kappa}}{G [\theta]} \quad (6.26)$$

или

$$J_p \geq \frac{180^\circ \cdot 100 \max M_{\kappa}}{\pi G [\theta^\circ]} \quad (6.26a)$$

Из выражений (6.26) и (6.26a) получают следующие формулы для определения требуемого по условию жесткости диаметра бруса.

1. Для сплошного бруса

$$d \geq \sqrt[4]{\frac{32 \max M_{\kappa}}{\pi G [\theta]}}; \quad (6.27)$$

$$d \geq \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 180^\circ \cdot 100 \max M_{\kappa}}{\pi^2 G [\theta^\circ]}} = B \sqrt[4]{\max M_{\kappa}}. \quad (6.27a)$$

Значения коэффициента  $B$  в зависимости от  $[\theta^\circ]$  для определения диаметра бруса из расчета на жесткость при  $G = 8 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2$  приведены ниже:

$\theta, \text{ град/м}$	0,25	0,5	0,75	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	5	6
$B$	0,733	0,619	0,557	0,520	0,470	0,435	0,413	0,396	0,380	0,368	0,348	0,332

При использовании этих значений и подстановке  $\max M_{\kappa}$  в  $\text{кг}\cdot\text{см}$   $d$  получается в  $\text{см}$ .

2. Для полого бруса

$$d \geq \sqrt[4]{\frac{32_{\max} M_{\kappa}}{\pi G [\theta] (1 - c^4)}}; \quad (6.28)$$

$$d \geq \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 180^{\circ} \cdot 100_{\max} M_{\kappa}}{\pi^2 G [\theta^{\circ}] (1 - c^4)}}, \quad (6.28a)$$

где

$$c = \frac{d_0}{d}.$$

Допускаемый крутящий момент из условия жесткости

$$[M_{\kappa}] = GJ_{\rho} [\theta] = \frac{\pi}{180 \cdot 100} GJ_{\rho} [\theta^{\circ}]. \quad (6.29)$$

Допускаемый относительный угол закручивания устанавливается техническими условиями. Его величина для разных конструкций и различных режимов работы бруса колеблется в довольно широких пределах:

$$[\theta^{\circ}] = (0,15 \div 2,0) \text{ град/м}$$

или

$$[\theta] = (0,26 \div 3,5) \cdot 10^{-4} \text{ рад/см.}$$

При расчете бруса на прочность и жесткость из двух найденных значений диаметра следует принять большее. Диаметры бруса в местах посадки на него различных деталей (шкивов, зубчатых колес и т. п.) должны быть округлены по сравнению с полученными из расчета до ближайших стандартных значений по ГОСТ 6636—60.

При кручении бруса кольцевого сечения материал используется более рационально, чем в случае сплошного круглого сечения. При одной и той же площади поперечного сечения кольцевое сечение по сравнению со сплошным круглым имеет больший полярный момент сопротивления и больший полярный момент инерции, т. е. брус с кольцевым сечением обладает большей прочностью и жесткостью. Из двух брусев одинаковой прочности или жесткости брус с кольцевым сечением будет более легким.

В тех случаях, когда снижение веса конструкции имеет важное значение, брус, работающие на кручение, проектируют кольцевого сечения.

На рис. 6.11 даны графики (заимствованы из работы [16]) отношения веса бруса кольцевого сечения к весу бруса круглого сечения в зависимости от отношения  $\frac{d_0}{d} = c$  для брусев, имеющих одинаковую прочность (кривая 1) и одинаковую жесткость (кривая 2).

**Пример 6.1.** Два равнопрочных бруса, сплошной и полый, равной длины изготовлены из одинакового материала.

1. Определить отношение масс сплошного и полого брусев, если для полого бруса  $c = \frac{d_0}{d} = \frac{2}{3}$ .

2. Определить отношение жесткости брусьев, если они имеют одинаковые массы при сохранении неизменным отношения  $c = \frac{d_0}{d}$  для полого бруса (рис. 6.12).

Решение. 1. По графику 1 (см. рис. 6.11) при  $c = 0,67$  находим, что (отношение сил тяжести равно отношению масс)

$$\frac{G_{\text{пол}}}{G_{\text{спл}}} = 0,64; \quad \frac{G_{\text{спл}}}{G_{\text{пол}}} = \frac{1}{0,64} = 1,56.$$

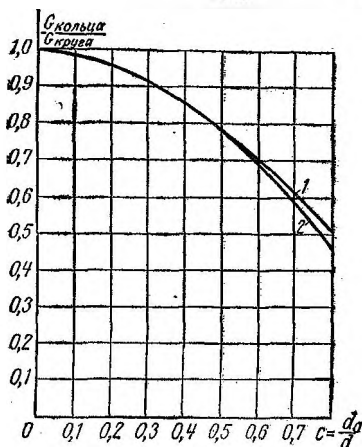


РИС. 6.11

2. При равных массах площади поперечных сечений брусьев одинаковы:

$$\frac{\pi (d^2 - d_0^2)}{4} = \frac{\pi d_1^2}{4}$$

$$\text{или } d^2 (1 - c^2) = d_1^2 \left( c = \frac{d_0}{d} \right),$$

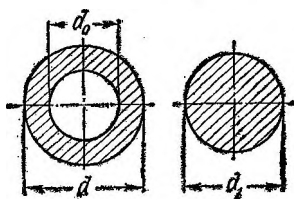


РИС. 6.12

откуда

$$\frac{d^2}{d_1^2} = \frac{1}{1 - c^2}.$$

Для брусьев, изготовленных из одинакового материала, отношение их жесткостей равно отношению полярных моментов инерции:

$$\frac{J_{p \text{ пол}}}{J_{p \text{ спл}}} = \frac{d^4 (1 - c^4)}{d_1^4} = \left( \frac{d^2}{d_1^2} \right)^2 (1 - c^4) = \frac{1 - c^4}{(1 - c^2)^2} = \frac{1 + c^2}{1 - c^2}.$$

Подставив значение  $c$ , получаем

$$\frac{J_{p \text{ пол}}}{J_{p \text{ спл}}} = \frac{1 + \left( \frac{2}{3} \right)^2}{1 - \left( \frac{2}{3} \right)^2} = 2,6,$$

т. е. полый брус в 2,6 раза жестче сплошного при одинаковой затрате материала (при равных массах).

**Пример 6.2.** Для стального бруса постоянного круглого сечения (рис. 6.13, а) требуется:

1. Построить эпюру крутящих моментов.

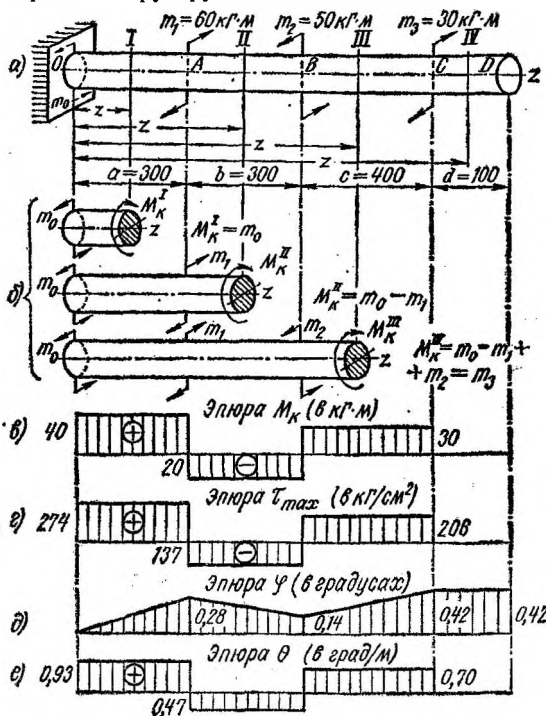


РИС. 6.13

2. Определить требуемый диаметр бруса из расчета на прочность и жесткость, если

$$[\tau] = 500 \text{ кг/см}^2; \quad G = 8 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2; \quad [\theta] = 1 \text{ град/м}.$$

3. Построить эпюру максимальных касательных напряжений.

4. Построить эпюры абсолютных и относительных углов поворота поперечных сечений.

5. Определить потенциальную энергию упругой деформации бруса.

Решение. 1. Из условия равновесия  $\sum m_i = 0$  находим реактивный момент в защемлении:

$$\begin{aligned} m_0 - m_1 + m_2 - m_3 &= 0; \quad m_0 = m_1 - m_2 + m_3 = \\ &= 60 - 50 + 30 = 40 \text{ кг} \cdot \text{м}. \end{aligned}$$

Пользуясь методом сечений, определяем крутящие моменты в произвольном сечении каждого из участков бруса (рис. 6.13, б).

Участок I:  $0 \leq z < a$ ;

$$M_K^I = m_0 = 40 \text{ кг}\cdot\text{м.}$$

Участок II:  $a < z < (a + b)$ ;

$$M_K^{II} = m_0 - m_1 = 40 - 60 = -20 \text{ кг}\cdot\text{м.}$$

Участок III:  $(a + b) < z < (a + b + c)$ ;

$$M_K^{III} = m_0 - m_1 + m_2 = 40 - 60 + 50 = 30 \text{ кг}\cdot\text{м.}$$

Крутящий момент на участке III проще получить, рассматривая правую часть бруса:

$$M_K^{III} = m_3 = 30 \text{ кг}\cdot\text{м.}$$

Участок IV:  $(a + b + c) < z \leq (a + b + c + d)$ ;

$$M_K^{IV} = 0.$$

По полученным данным на рис. 6.13, в построена эпюра  $M_K$ , из которой видно, что участок I бруса является наиболее опасным, так как в поперечных сечениях этого участка крутящий момент имеет максимальное значение:

$$\max M_K = 40 \text{ кг}\cdot\text{м} = 4000 \text{ кг}\cdot\text{см.}$$

2. Определяем диаметр бруса:

а) из условия прочности по формуле (6.20)

$$d = \sqrt[3]{\frac{16M_K}{\pi[\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 4000}{\pi \cdot 500}} \approx 3,44 \text{ см};$$

б) из условия жесткости по формуле (6.27 а)

$$d = B \sqrt[4]{M_K} = 0,52 \sqrt[4]{4000} \approx 4,14 \text{ см.}$$

$$B = 0,52 \text{ при } [\theta^\circ] = 1 \text{ град/м (см. стр. 145).}$$

Окончательно принимаем большее из полученных значений с некоторым округлением  $d = 42 \text{ мм}$ .

При этом

$$W_p = \frac{\pi d^3}{16} = \frac{3,14 \cdot 4,2^3}{16} = 14,6 \text{ см}^3; \quad J_p = \frac{\pi d^4}{32} = \frac{3,14 \cdot 4,2^4}{32} = 30,6 \text{ см}^4.$$

3. Вычисляем величины наибольших касательных напряжений, возникающих в поперечных сечениях отдельных участков бруса:

$$\begin{aligned}\tau_{\max}^I &= \frac{M_{\kappa}^I}{W_{\rho}} = \frac{4000}{14,6} \approx 274 \text{ кг/см}^2; \\ \tau_{\max}^{II} &= \frac{M_{\kappa}^{II}}{W_{\rho}} = \frac{-2000}{14,6} \approx -137 \text{ кг/см}^2; \\ \tau_{\max}^{III} &= \frac{M_{\kappa}^{III}}{W_{\rho}} = \frac{3000}{14,6} \approx 206 \text{ кг/см}^2; \\ \tau_{\max}^{IV} &= 0.\end{aligned}$$

Знак касательного напряжения не имеет физического смысла и здесь указан лишь для достижения соответствия эпюры  $\tau_{\max}$  (рис. 6.13, з) и  $M_{\kappa}$ .

4. Углы поворота граничных сечений участков относительно неподвижного сечения  $O$  определяем по формуле (6.12). В пределах между границами участков величины углов поворота изменяются по линейному закону. Жесткость поперечного сечения рассчитываемого бруса  $GJ_{\rho} = 8 \cdot 10^5 \cdot 30,6 \approx 245 \cdot 10^5 \text{ кг}\cdot\text{см}^2$ .

Угол поворота сечения  $A$  относительно сечения  $O$

$$\varphi_{A, O} = \frac{M_{\kappa}^I \cdot a}{GJ_{\rho}} = \frac{4000 \cdot 30}{245 \cdot 10^5} = +0,0049 \text{ рад} = +0,28^\circ.$$

Угол поворота сечения  $B$  относительно сечения  $A$

$$\varphi_{B, A} = \frac{M_{\kappa}^{II} \cdot b}{GJ_{\rho}} = \frac{-2000 \cdot 30}{245 \cdot 10^5} = -0,00245 \text{ рад} = -0,14^\circ.$$

Угол поворота сечения  $B$  относительно сечения  $O$

$$\varphi_{B, O} = \varphi_{B, A} + \varphi_{A, O} = -0,00245 + 0,0049 = 0,00245 \text{ рад} = 0,14^\circ.$$

Аналогично

$$\varphi_{C, B} = \frac{M_{\kappa}^{III} \cdot c}{GJ_{\rho}} = \frac{3000 \cdot 40}{245 \cdot 10^5} = 0,0049 \text{ рад} = 0,28^\circ;$$

$$\varphi_{C, O} = \varphi_{C, B} + \varphi_{B, O} = 0,0049 + 0,00245 = 0,00735 \text{ рад} = 0,42^\circ;$$

$$\varphi_{D, C} = 0; \quad \varphi_{D, O} = \varphi_{C, O} = 0,42^\circ.$$

Эпюра  $\varphi$  дана на рис. 6.13, д.

Определяем относительные углы закручивания на отдельных участках бруса:

$$\theta^I = \frac{\varphi_{A, O}}{a} = \frac{0,28}{0,3} = 0,93 \text{ град/м};$$



$$\theta^{II} = \frac{\varphi_{B, A}}{b} = \frac{-0,14}{0,3} = -0,47 \text{ град/м};$$

$$\theta^{III} = \frac{\varphi_{C, B}}{c} = \frac{0,28}{0,4} = 0,70 \text{ град/м};$$

$$\theta^{IV} = \frac{\varphi_{D, C}}{d} = 0.$$

Эпюра  $\theta$  построена на рис. 6.13, е.

5. Потенциальную энергию упругой деформации бруса определяем суммированием потенциальных энергий для отдельных его участков, пользуясь формулой (6.16а):

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2GJ_p} [(M_K^{II})^2 a + (M_K^{III})^2 b + (M_K^{IV})^2 c] = \\ &= \frac{1}{2 \cdot 245 \cdot 10^5} (4000^2 \cdot 30 + 2000^2 \cdot 30 + 3000^2 \cdot 40) = \\ &= 19,6 \text{ кг}\cdot\text{см} \approx 0,2 \text{ кг}\cdot\text{м}. \end{aligned}$$

#### § 6.6. КРУЧЕНИЕ БРУСЬЕВ СПЛОШНОГО НЕКРУГЛОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ

В теории кручения брусьев некруглого профиля гипотеза плоских сечений неприменима, так как после деформации поперечные сечения таких брусьев не остаются плоскими и деформируются, т. е. искривляются, принимая форму криволинейной поверхности.

Кручение, при котором деформация сечений происходит свободно, без препятствий, называется *свободным (чистым)*. При наличии различного рода связей, препятствующих свободной деформации отдельных сечений, кручение называется *стесненным*.

При стесненном кручении в поперечных сечениях бруса возникают, кроме касательных, нормальные напряжения.

В дальнейшем рассматривается только свободное кручение.

Задача о кручении брусьев некруглого профиля решается методами теории упругости.

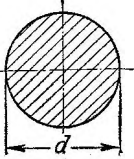
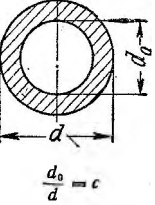
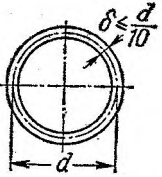
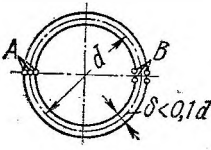
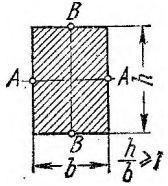
В пределах упругих деформаций наибольшее касательное напряжение, угол закручивания и потенциальную энергию упругой деформации можно вычислять по формулам, аналогичным по своей структуре формулам (6.7), (6.12) и (6.16) для круглого профиля, но с заменой  $J_p$  и  $W_p$  на  $J_K$  и  $W_K$ :

$$\tau_{\max} = \frac{M_K}{W_K}; \quad (6.30)$$

$$\varphi = \frac{M_K l}{GJ_K}; \quad (6.31)$$

$$U = \frac{M_K^2 l}{2GJ_K}; \quad (6.32)$$

## Геометрические характеристики жесткости и прочности для некоторых сечений при кручении прямого бруса

Форма поперечного сечения бруса	Момент инерции при кручении $J_K, \text{см}^4$	Момент сопротивления при кручении $W_K, \text{см}^3$	Положение точки, в которой возникает наибольшее напряжение $\tau_{\text{max}} = \frac{M_K}{W_K}, \text{кг/см}^2$
<p>Круглое</p> 	$J_K = J_D = \frac{\pi d^4}{32} \approx 0,1 d^4$ <p>или</p> $J_K = J_D = \frac{\pi r^4}{2} \approx 1,57 r^4$	$W_K = W_D = \frac{\pi d^3}{16} \approx 0,2 d^3$ <p>или</p> $W_K = W_D = \frac{\pi r^3}{2} \approx 1,57 r^3$	<p>Наибольшее напряжение <math>\tau_{\text{max}}</math> возникает во всех точках у контура поперечного сечения</p>
<p>Круговое кольцо</p>  <p><math>\frac{d_0}{d} = c</math></p>	$J_K = J_D = \frac{\pi d^4}{32} (1 - c^4)$ <p>или</p> $J_K = J_D \approx 0,1 d^4 (1 - c^4)$	$W_K = W_D = \frac{\pi d^3}{16} (1 - c^4)$ <p>или</p> $W_K = W_D \approx 0,2 d^3 (1 - c^4)$	<p>Наибольшее напряжение возникает во всех точках у наружного контура поперечного сечения. В точках у внутреннего контура <math>\tau = \tau_{\text{max}} c^4</math></p>
<p>Тонкостенное кольцо</p>  <p><math>\delta \leq \frac{d}{10}</math></p>	$J_K = \frac{\pi d^3 \delta}{4}$	$W_K = \frac{\pi d^2 \delta}{2}$	<p>Все точки находятся в одинаковых условиях (приближенно)</p>
<p>Круговое незамкнутое тонкостенное кольцо</p>  <p><math>\delta &lt; 0,1 d</math></p>	$J_K = \frac{1}{3} \pi d \delta^3$	$W_K = \frac{1}{3} \pi d \delta^3$	<p>Наибольшее напряжение в точках А. В точках В напряжение <math>\tau = 0</math></p>
<p>Прямоугольное</p>  <p><math>\frac{h}{b} \geq 1</math></p>	$J_K = \beta h b^3$	$W_K = \alpha h b^2$	<p>Наибольшее напряжение возникает в серединах длинных сторон сечения (в точках А). В точках В напряжение <math>\tau = \gamma \tau_{\text{max}} = \gamma \frac{M_K}{W_K}</math></p>

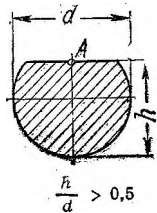
Коэффициенты  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  определяются в зависимости от отношения  $\frac{h}{b}$  по приводимой здесь таблице.

Значения коэффициентов  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$

$\frac{h}{b}$	1	1,2	1,25	1,5	1,75	2	2,5	3	4	5	6	8	10	$\infty$
$\alpha$	0,208	0,219	0,221	0,231	0,239	0,246	0,258	0,267	0,282	0,291	0,299	0,307	0,312	0,333
$\beta$	0,141	0,166	0,172	0,196	0,214	0,229	0,249	0,263	0,281	0,291	0,299	0,307	0,312	0,333
$\gamma$	1,000	0,930	0,910	0,860	0,820	0,790	0,770	0,750	0,740	0,740	0,740	0,740	0,740	0,740

Форма поперечного сечения бруса	Момент инерции при кручении $J_K, \text{см}^4$	Момент сопротивления при кручении $W_K, \text{см}^3$	Положение точки, в которой возникает наибольшее напряжение $\tau_{\text{max}} = \frac{M_K}{W_K}, \text{кг/см}^2$
---------------------------------	--	--	--

Круглое сечение с лыской



$$J_K = \frac{d^4}{16} \left( 2,6 \frac{h}{d} - 1 \right)$$

$$W_K = \frac{d^3 \left( 2,6 \frac{h}{d} - 1 \right)}{8 \left( 0,3 \frac{h}{d} + 0,7 \right)}$$

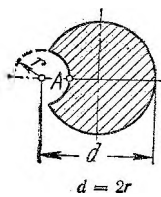
Наибольшее напряжение возникает в середине плоского среза (точка A). В углах  $\tau = 0$

$$J_K = K_1 R^4$$

$$W_K = \frac{R^3}{K_2}$$

Наибольшее напряжение возникает по дну канавки (точка A)

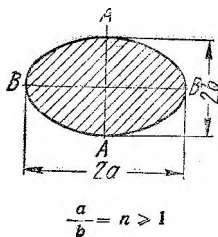
Круглое с круговым вырезом



Значения коэффициентов  $K_1$  и  $K_2$  в зависимости от  $\frac{r}{R}$

$\frac{r}{R}$	0	0,005	0,1	0,2	0,4	0,6	0,8	1	1,5
$K_1$	1,57	1,56	1,56	1,46	1,22	0,92	0,63	0,38	0,07
$K_2$	0,64	1,22	1,22	1,23	1,31	1,52	1,91	2,63	7,14

Сплошное эллиптическое



$$J_K = \pi \frac{n^3}{n^2 + 1} b^4$$

$$W_K = \frac{\pi n}{2} b^3$$

Наибольшее напряжение в точках A. Напряжение в точках B

$$\tau = \frac{\tau_{\text{max}}}{n}$$

Форма поперечного сечения бруса	Момент инерции при кручении $J_K, \text{см}^4$	Момент сопротивления при кручении $W_K, \text{см}^3$	Положение точки, в которой возникает наибольшее напряжение $\tau_{\max} = \frac{M_K}{W_K} \cdot \text{кг/см}^2$
---------------------------------	--	--	--

Равносторонний треугольник

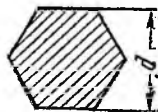


$$J_K = \frac{b^4}{46,19} = \frac{h^4}{25,98}$$

$$W_K = 0,05b^3 = \frac{h^3}{12,99} = \frac{2J_K}{h}$$

В середине сторон. В углах  $\tau = 0$ 

Правильный шести- или восьмиугольник

 $d$  — диаметр вписанного круга

$$J_K = K' d^2 F.$$

Для шестиугольника

$$K' = 0,133;$$

для восьмиугольника

$$K' = 0,130.$$

 $F$  — площадь сечения

$$W_K = K d F.$$

Для шестиугольника

$$K = 0,217;$$

для восьмиугольника

$$K = 0,223$$

В середине сторон. В углах  $\tau = 0$

где  $W_k$  — момент сопротивления при кручении ( $м^3, см^3$ );

$J_k$  — геометрическая характеристика жесткости при кручении ( $м^4, см^4$ ).

Значения геометрических характеристик прочности  $W_k$  и жесткости  $J_k$  для некоторых сечений приведены в табл. 6.1.

### § 6.7. КРУЧЕНИЕ ТОНКОСТЕННЫХ БРУСЬЕВ ЗАМКНУТОГО ПРОФИЛЯ

Брус называется *тонкостенным*, если удовлетворяется условие (рис. 6.14)

$$\frac{b_{\min}}{\delta_{\max}} \geq 10,$$

где  $b_{\min}$  — минимальный поперечный размер сечения;

$\delta_{\max}$  — наибольшая толщина профиля

Различают тонкостенные профили замкнутые и открытые. Сечение называется замкнутым, если его средняя линия — геометрическое место точек средин толщин стенок — представляет собой замкнутый контур.

Приближенный расчет замкнутых тонкостенных профилей основан на гипотезе Бредта о том, что касательные напряжения в поперечном сечении распределяются по толщине стенки равномерно и направлены параллельно касательной к средней линии контура.

Касательное напряжение в любой точке замкнутого профиля произвольной формы с переменной толщиной стенки определяется по формуле

$$\tau = \frac{M_k}{2\delta f}, \quad (6.33)$$

где  $f$  — площадь, ограниченная средней линией стенки профиля.

Наибольшее напряжение на участке с наименьшей толщиной стенки

$$\tau_{\max} = \frac{M_k}{2\delta_{\min} f}. \quad (6.34)$$

Угол закручивания в радианах на участке длиной  $l$ , для которого  $M_k = \text{const}$ , определяется по формуле

$$\varphi = \frac{M_k l}{4f^2 G} \int \frac{ds}{\delta}, \quad (6.35)$$

где интеграл берется по длине  $s$  средней линии стенки профиля.

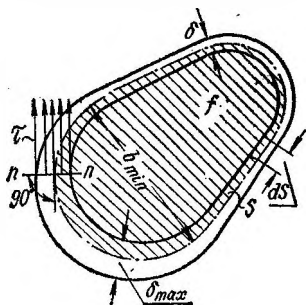


РИС. 6.14

Если  $\delta = \text{const}$ , то

$$\varphi = \frac{M_k l s}{4f^2 G \delta} \quad (6.35 \text{ а})$$

Из сравнения формул (6.34) и (6.35) с формулами (6.30) и (6.31) следует, что для тонкостенного замкнутого профиля

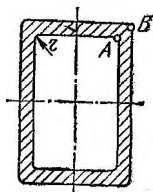


РИС. 6.15

$$W_k = 2\delta_{\min} \cdot f; \quad J_k = \int_s \frac{4f^2}{\delta} ds$$

Приведенными выше формулами можно пользоваться для замкнутых профилей с ломаной средней линией (рис. 6.15), но следует иметь в виду, что во входящих углах (точка А) напряжения выше расчетных вследствие концентрации напряжений.

Коэффициент концентрации напряжений зависит от отношения  $\frac{r}{\delta}$  и с увеличением этого отношения уменьшается [72].

#### § 6.8. КРУЧЕНИЕ ТОНКОСТЕННЫХ БРУСЬЕВ ОТКРЫТОГО ПРОФИЛЯ

Для вытянутого прямоугольника, когда  $\frac{h}{b} \gg 10$  (рис. 6.16), как видно из табл. 6.1, можно в практических расчетах принять  $\alpha = \beta = \frac{1}{3}$ , и тогда

$$W_k = \frac{hb^2}{3}; \quad (6.36)$$

$$J_k = \frac{hb^3}{3}; \quad (6.36 \text{ а})$$

$$\tau_{\max} = \frac{M_k}{W_k} = \frac{3M_k}{hb^2}; \quad (6.37)$$

$$\varphi = \frac{M_k l}{GJ_k} = \frac{3M_k l}{Ghb^3}. \quad (6.38)$$

В расчетах, не требующих большой точности, часто принимают  $\alpha = \beta = \frac{1}{3}$  при  $\frac{h}{b} \geq 4$ .

В узком прямоугольнике (см. рис. 6.16) касательные напряжения в поперечном сечении направлены параллельно длинной стороне, почти постоянны и равны  $\tau_{\max}$  в точках длинной стороны, снижаясь к нулю только вблизи угловых точек. Вдоль средней линии касательные напряжения равны нулю и вдоль толщины  $b$  изменяются по линейному закону.

Касательные напряжения в открытом профиле постоянной толщины распределяются по тому же закону, что и в полученном из него вытянутом прямоугольнике. Поэтому формулами (6.36) — (6.38) можно с достаточной точностью пользоваться для тонкостенных незамкнутых (открытых) профилей с криволинейным контуром постоянной толщины  $\delta$ , если вместо  $h$  подставить длину средней линии (контура) сечения  $l$ , а вместо  $b$  — толщину профиля  $\delta$  (рис. 6.17).

$$J_k = \sum \frac{h_i \delta_i^3}{3}. \quad (6.39)$$

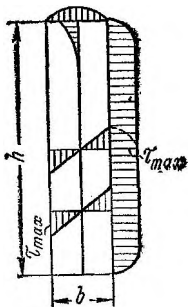


РИС. 6.16

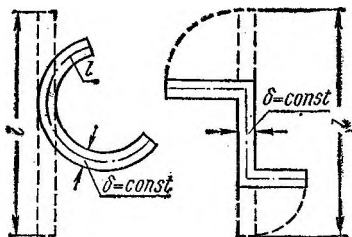


РИС. 6.17

Для открытых профилей, составленных из нескольких узких прямоугольников различной толщины, величину геометрической характеристики жесткости можно определить по следующей приближенной формуле:

Момент сопротивления кручению

$$W_k = \frac{J_k}{\delta_{\max}}. \quad (6.40)$$

Наибольшие напряжения в сечении возникают в средних точках длинных сторон элемента, имеющего наибольшую толщину; эти напряжения определяют по формуле

$$\tau_{\max} = \frac{M_k}{W_k} = \frac{M_k \delta_{\max}}{J_k} = \frac{3M_k \delta_{\max}}{\sum h_i \delta_i^3}. \quad (6.41)$$

Наибольшие касательные напряжения в  $i$ -м элементе, толщина которого  $\delta_i$ :

$$\max \tau_i = \frac{3M_k \delta_i}{\sum h_i \delta_i^3}. \quad (6.42)$$

Действительная характеристика жесткости несколько больше определяемой по формуле (6.39). Более точная формула для определения геометрической характеристики жесткости, учитывающая

совместную работу отдельных элементов профиля, переменность толщины их и другие факторы, имеет вид

$$J'_k = \eta J_k = \eta \sum \frac{h_i b_i^3}{3}. \quad (6.43)$$

Поправочный коэффициент  $\eta$  зависит от формы профиля (рис. 6.18). При вычислении напряжений некоторые авторы рекомендуют пользоваться значениями  $J'_k$ , определяемыми без учета поправочного коэффициента.

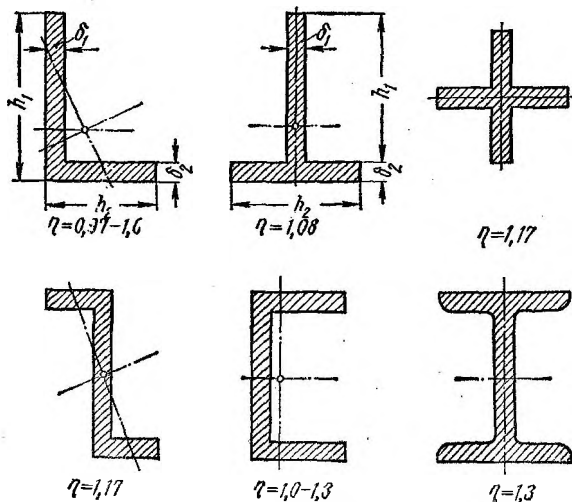


РИС. 6.18

Угол закручивания бруса открытого тонкостенного профиля определяется по формуле

$$\varphi = \frac{M_k l}{G J'_k} = \frac{3 M_k l}{G \eta \sum h_i b_i^3}. \quad (6.44)$$

**Пример 6.3.** Построить эпюру крутящих моментов и эпюру углов поворота поперечных сечений. Проверить прочность бруса (рис. 6.19, а), если  $[\tau] = 700 \text{ кг/см}^2$ ;  $G = 8 \cdot 10^8 \text{ кг/см}^2$ ;  $h = 40 \text{ мм}$ ;  $b = 20 \text{ мм}$ ;  $l = 800 \text{ мм}$ .

**Решение.** Брус нагружен по всей длине распределенными моментами постоянной интенсивности (рис. 6.19, б)

$$\mu = qh = 8,5 \cdot 4 = 34 \text{ кг} \cdot \text{см/см}.$$

Реактивный момент в защемлении

$$m_0 = \mu l = 34 \cdot 80 = 2720 \text{ кг} \cdot \text{см}.$$



Крутящий момент в произвольном сечении на расстоянии  $z$  от защемления

$$M_K = m_0 - \mu z = \mu (l - z),$$

т. е. крутящий момент  $M_K$  линейно зависит от  $z$ ; при  $z = 0$   $M_K = \mu l = 2720$  кг·см; при  $z = l$   $M_K = 0$ .

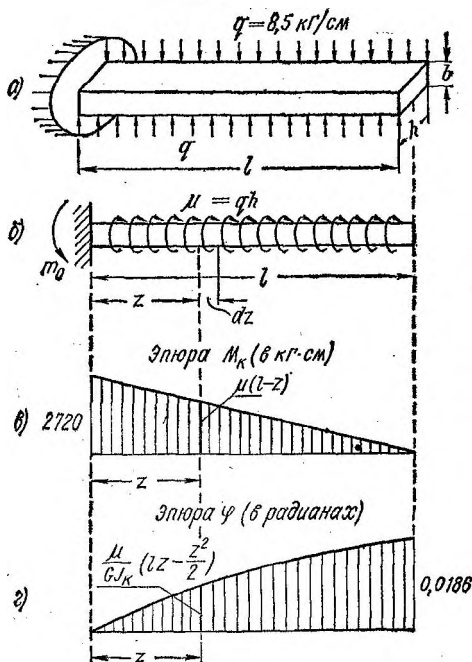


РИС. 6.19

Эпюра  $M_K$  дана на рис. 6.19, в.

Угол поворота произвольного сечения относительно неподвижного сечения в защемлении (в радианах) определим по формуле (6.31)<sup>1</sup> с учетом, что  $M_K$  по длине бруса переменен:

$$\varphi = \frac{1}{GJ_K} \int_0^l M_K dz.$$

<sup>1</sup> Строго говоря, рассчитываемый брус работает на стесненное, а не на чистое кручение, но при монолитном (не тонкостенном) сечении формулы теории чистого кручения обладают достаточной точностью.

Подставив значение  $M_K$ , получим

$$\varphi = \frac{\mu}{GJ_K} \int_0^z (l - z) dz = \frac{\mu}{GJ_K} \left( lz - \frac{z^2}{2} \right).$$

Эпюра  $\varphi$  представляет собой квадратную параболу (рис. 6.19, а).

При  $z = 0$   $\varphi = 0$ ; при  $z = l$   $\varphi_{\max} = \frac{\mu l^2}{2GJ_K}$ .

Для прямоугольного сечения (см. табл. 6.1)

$$J_K = \beta hb^3; \quad \text{при } \frac{h}{b} = 2 \quad \beta = 0,229;$$

$$J_K = 0,229 \cdot 4 \cdot 2^3 = 7,33 \text{ см}^4; \quad \varphi_{\max} = \frac{34 \cdot 80^2}{2 \cdot 8 \cdot 10^6 \cdot 7,33} = 0,0186 \text{ рад} = 1,07^\circ.$$

Для проверки прочности бруса определяем максимальное касательное напряжение в опасном сечении (защемлении) по формуле (6.30):

$$\tau_{\max} = \frac{\max M_K}{W_K}; \quad (\text{а})$$

$$W_K = ahb^2 = 0,246 \cdot 4 \cdot 2^2 = 3,94 \text{ см}^3 \text{ (см. табл. 6.1)}.$$

Значение  $\max M_K = 2720 \text{ кг} \cdot \text{см}$  берем из эпюры  $M_K$ . Подставив эти величины в формулу (а), получим

$$\tau_{\max} = \frac{2720}{3,94} = 690 \text{ кг/см}^2 < [\tau_K],$$

т. е. прочность бруса обеспечена.

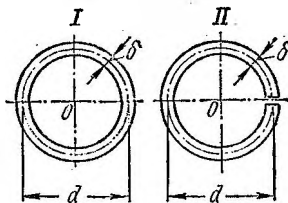


РИС. 6.20

и диаметра при  $\frac{d}{\delta} = 16$  (рис. 6.20). Вторая труба разрезана вдоль образующей.

**Решение.** Отношение прочностей труб равно отношению моментов сопротивления  $\frac{W_P}{W_K}$ , а отношение жесткостей — отношению

моментов инерции  $\frac{J_P}{J_K}$ .

Для тонкостенной трубы  $I$  (см. табл. 6.1)

$$W_p = \frac{\pi d^3 \delta}{2} \quad \text{и} \quad J_p = \frac{\pi d^3 \delta}{4}.$$

Для разрезанной трубы  $II$   $W_k$  и  $J_k$  определяем по формулам (6.36) и (6.36а), как для узкого прямоугольника, принимая  $b = \delta$ , а  $h = l = \pi d$ :

$$W_k = \frac{hb^3}{3} = \frac{\pi d \delta^3}{3} \quad \text{и} \quad J_k = \frac{hb^3}{3} = \frac{\pi d \delta^3}{3};$$

$$\frac{W_p}{W_k} = \frac{\left(\frac{\pi d^3 \delta}{2}\right)}{\left(\frac{\pi d \delta^3}{3}\right)} = \frac{3}{2} \frac{d}{\delta};$$

$$\frac{J_p}{J_k} = \frac{\left(\frac{\pi d^3 \delta}{4}\right)}{\left(\frac{\pi d \delta^3}{3}\right)} = \frac{3}{4} \left(\frac{d}{\delta}\right)^2.$$

В нашем случае

$$\frac{W_p}{W_k} = \frac{3}{2} \cdot 16 = 24; \quad \frac{J_p}{J_k} = \frac{3}{4} \cdot 16^2 = 192.$$

Таким образом, разрез трубы снижает ее прочность в 24 раза, а жесткость в 192 раза. Это показывает, что тонкостенные брусья незамкнутого (открытого) профиля плохо сопротивляются закручиванию.

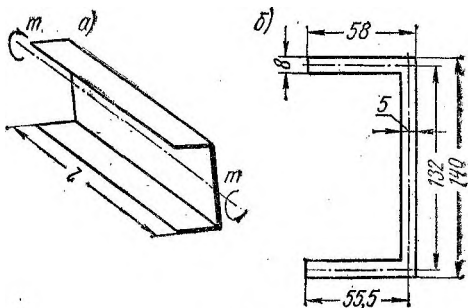


РИС. 6.21

**Пример 6.5.** Найти наибольшие касательные напряжения в поперечном сечении швеллерной балки № 14 (рис. 6.21, а) и ее угол закручивания, если длина балки 2 м и скручивающий момент 120 н · м,  $G = 8 \cdot 10^4$  Мн/м<sup>2</sup>.

**Решение.** Разбивая заданное открытое сечение на три прямоугольника (рис. 6.21, б), наибольшее касательное напряжение в горизонтальной полке определяем по формуле (6.41):

$$\begin{aligned}\tau_{\max} &= \frac{3M_{\kappa} \delta_{\max}}{\sum h_i \delta_i^3} = \frac{3 \cdot 120 \cdot 8 \cdot 10^{-3}}{(2 \cdot 55,5 \cdot 8^3 + 132 \cdot 5^3) \cdot 10^{-12}} = \\ &= 3,94 \cdot 10^7 \text{ н/м}^2 = 39,4 \text{ Мн/м}^2.\end{aligned}$$

Угол закручивания вычисляем по формуле (6.44):

$$\begin{aligned}\varphi &= \frac{3M_{\kappa} l}{G\eta \sum h_i \delta_i^3} = \frac{3 \cdot 120 \cdot 2}{8 \cdot 10^{10} \cdot 1,15 \cdot 733 \cdot 10^{-10}} = \\ &= 0,107 \text{ рад} = 6,12^\circ = 6^\circ 07'.\end{aligned}$$

Значение  $\eta = 1,15$  принято по рис. 6.18.

Угол закручивания на единицу длины

$$\theta^\circ = \frac{\varphi}{l} = \frac{6,12}{2} = 3,06 \text{ град/м.}$$

### § 6.9. СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫЕ СЛУЧАИ РАСЧЕТА НА КРУЧЕНИЕ

Задача называется *статически неопределимой*, если внутренние силовые факторы в заданной системе не могут быть определены с помощью только уравнений статики.

При решении таких задач необходимые дополнительные уравнения перемещений могут быть получены из рассмотрения деформаций заданной конструкции.

Метод решения статически неопределимых задач на кручение в принципе не отличается от решения таких задач на растяжение (сжатие).

**Пример 6.6.** Построить эпюру крутящих моментов бруса и определить из расчета на прочность допускаемое значение  $m$ , если  $[\tau] = 600 \text{ кг/см}^2$  (рис. 6.22, а).

**Решение.** Неизвестные реактивные моменты в защемлении обозначим  $m_A$  и  $m_B$ . Статика дает одно уравнение равновесия:

$$-m_A + 2m + m - m_B = 0 \text{ или } m_A + m_B = 3m. \quad (1)$$

Таким образом, задача один раз статически неопределима. Отбрасываем правое защемление и заменяем его действие на брус реактивным моментом  $m_B$  (рис. 6.22, б).

Дополнительное уравнение для решения задачи получим, рассматривая деформацию бруса. Так как оба конца бруса жестко защемлены, то угол поворота сечения  $B$  относительно сечения  $A$

$$\varphi_{B, A} = 0.$$

Выражаем этот угол по формуле (6.13) через крутящие моменты.

$$\varphi_{B, A} = \frac{m_B \cdot a}{GJ_p^{III}} + \frac{(m_B - m) 2a}{GJ_p^{II}} + \frac{(m_B - m - 2m) 4a}{GJ_p^I} = 0. \quad (2)$$

Так как

$$\frac{J_p^I}{J_p^{II}} = \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^4 = 1,5^4 = 5,06 \text{ и } J_p^{II} = J_p^{III},$$

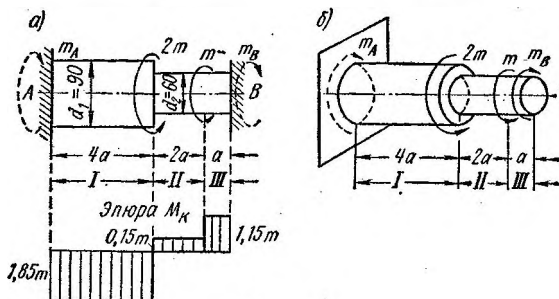


РИС. 6.22

то уравнение (2) принимает вид

$$5,06m_B + 5,06(m_B - m) 2 + (m_B - 3m) 4 = 0,$$

откуда

$$m_B \approx 1,15 m.$$

Из уравнения (1)

$$m_A = 3m - m_B = 3m - 1,15m = 1,85m.$$

После определения неизвестных моментов, обычным способом строим эпюру  $M_K$ , которая дана на рис. 6.22, а.

Напишем условие прочности для третьего участка бруса, где максимальные напряжения достигают наибольшей величины:<sup>1</sup>

$$\tau_{\max} = \frac{M_K^{III}}{W_p^{III}} \leq [\tau_K].$$

<sup>1</sup> Нетрудно убедиться, что поперечные сечения I участка менее опасны. Действительно,  $W_p^I = 1,5^3 W_p^{III} \approx 3,38 W_p^{III}$ , а  $M_K^I = \frac{1,85}{1,15} M_K^{III} = 1,61 M_K^{III}$ , т. е.

$$\tau_{\max}^{III} = \frac{3,38}{1,61} \tau_{\max}^I.$$

Из этого условия имеем:

$$[M_K^{III}] = 1,15 [m] = W_p^{III} [\tau_K]$$

и

$$[m] = \frac{W_p^{III} [\tau_K]}{1,15} = \frac{\pi d_2^3 [\tau_K]}{16 \cdot 1,15} = \frac{\pi \cdot 6^3 \cdot 600}{16 \cdot 1,15} = 22\,000 \text{ кг} \cdot \text{см} = 220 \text{ кг} \cdot \text{м}$$

**Пример 6.7.** Определить максимальные касательные напряжения в поперечных сечениях бруса и трубки, а также угол поворота жесткого диска  $A$ , соединяющего торцовые сечения бруса и трубки (рис. 6.23, а). Дано  $\frac{G_{ст}}{G_{ал}} = 3,1$ .

6.23, а). Дано  $\frac{G_{ст}}{G_{ал}} = 3,1$ .

**Решение.** Напишем уравнение равновесия для отсеченной правой части системы (рис. 6.23, б), связывающее неизвестные крутящие моменты в поперечных сечениях бруса и трубки ( $M_{бр}$  и  $M_{тр}$ ) с заданным моментом:

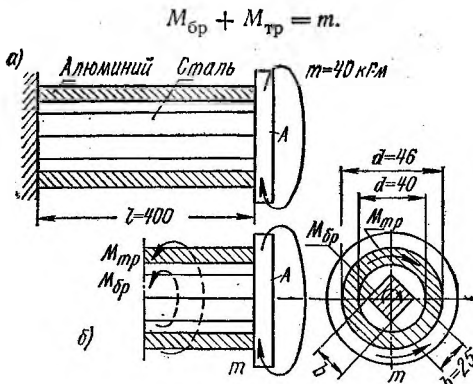


РИС. 6.23

второе уравнение, связывающее те же неизвестные  $M_{бр}$  и  $M_{тр}$ , можно получить, рассматривая деформацию системы и приравняв углы поворота правых торцовых сечений бруса и трубки, жестко связанных с диском:

$$\varphi_{бр} = \varphi_{тр}. \quad (а)$$

На основании формул (6.12), (6.12,а) и (6.31) равенство (а) принимает следующий вид:

$$\frac{M_{бр} l}{G_{ст} J_K^{бр}} = \frac{M_{тр} l}{G_{ал} J_p^{тр}} \text{ или } M_{бр} = \frac{G_{ст} J_K^{бр}}{G_{ал} J_p^{тр}} M_{тр}. \quad (2)$$

Для бруса, имеющего квадратное сечение (см. табл. 6.1),

$$J_{\kappa}^{\text{бр}} = 0,141b^4 = 0,141 \cdot 2,5^4 \approx 5,5 \text{ см}^4.$$

Для трубки

$$J_{\rho}^{\text{тр}} = \frac{\pi}{32} (d^4 - d_0^4) = \frac{\pi}{32} (4,6^4 - 4,0^4) \approx 18,6 \text{ см}^4.$$

Подставив числовые значения в формулу (2), получим

$$M_{\text{бр}} = 3,1 \frac{5,5}{18,6} M_{\text{тр}} \approx 0,917 M_{\text{тр}}. \quad (2')$$

Решив совместно уравнения (1) и (2'), найдем

$$M_{\text{бр}} = 0,48m \text{ и } M_{\text{тр}} = 0,52m.$$

Максимальные касательные напряжения в поперечных сечениях бруса

$$\max \tau_{\text{бр}} = \frac{M_{\text{бр}}}{W_{\kappa}^{\text{бр}}} = \frac{0,48m}{0,208b^3} = \frac{0,48 \cdot 4000}{0,208 \cdot 2,5^3} = 590 \text{ кг/см}^2.$$

Значение  $W_{\kappa}^{\text{бр}}$  взято из табл. 6.1;

трубки

$$\begin{aligned} \max \tau_{\text{тр}} &= \frac{M_{\text{тр}}}{W_{\rho}^{\text{тр}}} = \frac{0,52m}{\frac{\pi}{16} d^3 (1 - c^4)} = \frac{0,52 \cdot 4000}{\frac{3,14}{16} \cdot 4,6^3 \left[ 1 - \left( \frac{4,0}{4,6} \right)^4 \right]} = \\ &= 254 \text{ кг/см}^2. \end{aligned}$$

Угол поворота диска  $A$

$$\Phi_A = \Phi_{\text{бр}} = \Phi_{\text{тр}} = \frac{M_{\text{бр}} l}{G_{\text{ст}} J_{\kappa}^{\text{бр}}} = \frac{1920 \cdot 40}{8 \cdot 10^9 \cdot 5,5} = 0,0174 \text{ рад} \approx 1^\circ.$$

#### § 6.10. ПРИБЛИЖЕННЫЙ РАСЧЕТ ВИТЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ПРУЖИН С МАЛЫМ ШАГОМ, НАГРУЖЕННЫХ ОСЕВЫМИ СИЛАМИ

В машиностроении, приборостроении и других отраслях техники широко применяются пружины различных типов.

В этом параграфе рассматриваются простейшие цилиндрические винтовые пружины растяжения-сжатия (рис. 6.24), имеющие наибольшее распространение.

Обозначим:

$D$  — средний диаметр пружины;

$d$  — диаметр проволоки пружины;

$n$  — число рабочих витков.

В любом поперечном сечении витка пружины, как следует из уравнений равновесия, составленных для отсеченной части пружины (рис. 6.25), возникают следующие внутренние силовые факторы:

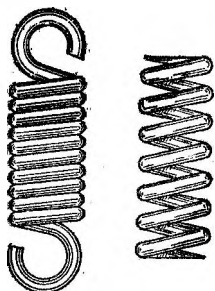


РИС. 6.24

$$\text{крутящий момент } M_K = \frac{P \cdot D}{2} \cos \alpha;$$

$$\text{изгибающий момент } M_{\text{и}} = \frac{P \cdot D}{2} \sin \alpha;$$

$$\text{продольная сила } N = P \cdot \sin \alpha;$$

$$\text{поперечная сила } Q = P \cdot \cos \alpha.$$

*Шагом пружины* называется расстояние между осями проволоки двух смежных витков.

Различают пружины с малым и большим шагом. Для пружин с малым шагом, когда угол  $\alpha$  не превышает  $8 + 10^\circ$ ,  $\cos \alpha \approx 1$  и  $\sin \alpha \approx 0$ . В этом случае, пренебрегая величинами  $M_{\text{и}}$  и  $N$ , можно считать, что внутренние

силы в поперечном сечении витка пружины приводятся к поперечной силе  $Q = P$  и крутящему моменту  $M_K = \frac{PD}{2}$ , т. е. витки пружины работают на срез и кручение.

Условно принимают, что касательные напряжения, соответствующие поперечной силе, равномерно распределены по поперечному сечению витка пружины, а соответствующие крутящему моменту распределены так же, как при кручении прямого бруса круглого поперечного сечения.

Эпюры указанных напряжений показаны на рис. 6.26, а и б.

У внутренней поверхности пружины в точке А направления  $\tau_K$  и  $\tau_{\text{ср}}$  совпадают и наибольшие касательные напряжения имеют величину

$$\tau_{\text{max}} = \tau_A = \frac{8PD}{\pi d^3} \left( 1 + \frac{d}{2D} \right). \quad (6.45)$$

При отношении  $\frac{d}{D} \ll \frac{1}{6}$  второе слагаемое весьма мало по сравнению с единицей, и им можно пренебречь. В этом случае формула (6.45) принимает вид

$$\tau_{\text{max}} = \tau_A = \frac{8PD}{\pi d^3}, \quad (6.46)$$

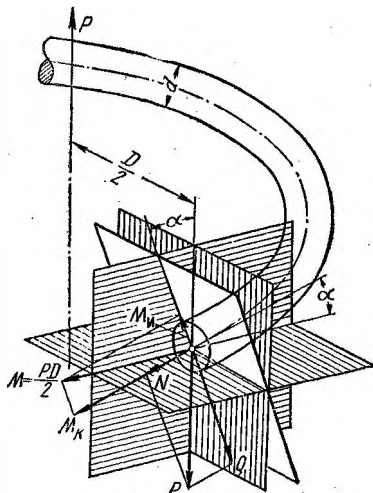


РИС. 6.25



т. е. такие пружины можно приближенно рассчитывать только на кручение.

С учетом касательных напряжений, соответствующих поперечной силе, кривизны витков и других факторов наибольшие касательные напряжения определяют по следующей, более точной формуле:

$$\tau_{\max} = k \frac{8PD}{\pi d^3}, \quad (6.47)$$

где  $k$  — поправочный коэффициент, зависящий от индекса пружины

$$c_{\text{п}} = \frac{D}{d}.$$

На практике большей частью величина индекса пружины колеблется в следующем интервале:  $c_{\text{п}} = 4 \div 12$ .

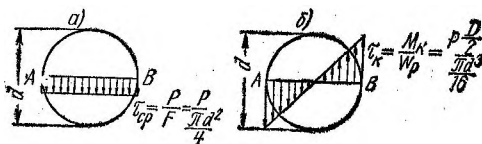


РИС. 6.26

На рис. 6.27 дан график зависимости коэффициента  $k$  от индекса пружины для пружин с малым углом подъема, изготовленных из проволоки круглого сечения.

Приближенно значение коэффициента  $k$  можно получить по формуле [9]

$$k = \frac{4c_{\text{п}} + 1}{4c_{\text{п}} - 4}. \quad (6.48)$$

Условие прочности пружины растяжения (сжатия):

$$\tau_{\max} = k \frac{8PD}{\pi d^3} \leq [\tau]. \quad (6.49)$$

Допускаемое напряжение на кручение  $[\tau]$  зависит от механических свойств материала пружины и условий ее работы.

Винтовые пружины должны сочетать прочность с большой деформативностью, поэтому они изготавливаются из материалов, для которых допускаемые напряжения достигают больших величин — 4000 ÷ 6000 кг/см<sup>2</sup> и выше.

При выборе допускаемого напряжения  $[\tau]$  необходимо учесть, что предел прочности и предел текучести при растяжении пружинной проволоки из одного и того же материала с увеличением диаметра проволоки понижаются.

На рис. 6.28 даны графики допускаемых напряжений  $[\tau]$  при статической нагрузке для пружин, изготовленных из различных материалов, в зависимости от диаметра проволоки [43]: 1 — вольфрамовая

и рояльная; 2 — хромованадиевая и термически обработанная; 3 — углеродистая, закаленная в масле; 4 — углеродистая холоднотянутая и нержавеющая холоднотянутая; 5 — из монель-металла; 6 — из бронзы фосфористой; 7 — из латуни специальной.

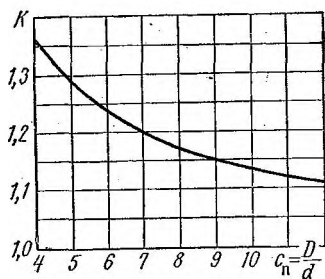


РИС. 6.27

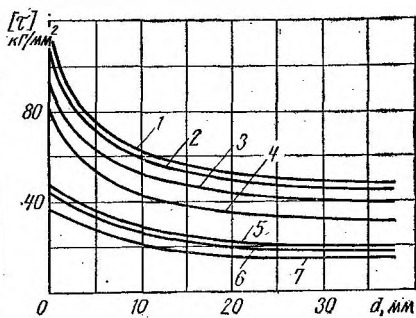


РИС. 6.28

Для пружин, испытывающих динамические и переменные напряжения, допускаемые напряжения снижают на 20 ÷ 60%.

Осадкой пружины  $\lambda$  называется взаимное перемещение ее торцов вдоль оси пружины. Она равна изменению высоты пружины под нагрузкой (рис. 6.29).

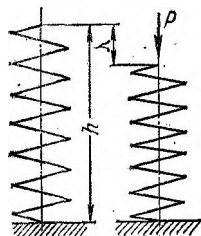


РИС. 6.29

Осадка винтовой цилиндрической пружины из прутка круглого поперечного сечения определяется по формуле

$$\lambda = \frac{8PD^3n}{Gd^4}. \quad (6.50)$$

**Пример 6.8.1** Спроектировать цилиндрическую пружину сжатия из проволоки круглого сечения. Рабочая характеристика пружины представлена на рис. 6.30, а. При наибольшей нагрузке  $P_{\text{кон}}$  расчетное напряжение в пружине не должно превышать допускаемого  $[\tau] = 4300 \text{ кг/см}^2$ . Принять индекс пружины  $c_n = 6$ ,  $G = 8,0 \cdot 10^9 \text{ кг/см}^2$ .

**Решение.** На рис. 6.30, б показана пружина в свободном состоянии ( $\lambda = 0$ ). При установке в механизм пружина получает предварительную осадку  $\lambda_{\text{нач}}$ , соответствующую силе  $P_{\text{нач}} = 20 \text{ кг}$ . Предварительно сжатая пружина показана на рис. 6.30, в. При работе механизма пружина дополнительно сжимается на величину  $\lambda_p = 35 \text{ мм}$  ( $\lambda_p$  — рабочий ход пружины). Пружина, сжатая наибольшей рабочей нагрузкой  $P_{\text{кон}} = 80 \text{ кг}$ , показана на рис. 6.30, г. При указанной нагрузке между витками пружины имеются небольшие зазоры (не ме-

нее  $0,1d$ ). Если увеличить нагрузку до значения  $P_{\text{пред}}$ , то витки сомкнутся («сядут» друг на друга), и при дальнейшем увеличении нагрузки пружина будет работать как брус. Поскольку укорочение такого бруса весьма мало по сравнению с осадкой пружины, можно

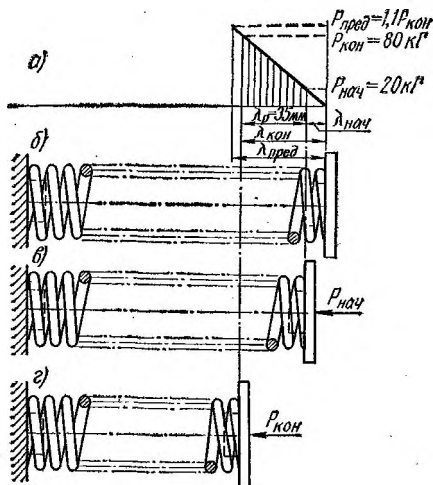


РИС. 6.30

считать, что после посадки витков дальнейшее возрастание нагрузки не вызовет увеличения осадки, т. е. график (характеристика) при  $P > P_{\text{пред}}$  представится прямой, параллельной оси ординат. Конечно, приведенные рассуждения носят несколько отвлеченный характер, так как нагрузка выше  $P_{\text{кон}}$  не должна допускаться.

Спроектировать пружину — значит определить  $D$ ,  $d$  и  $n$ .

Для определения диаметра проволоки используем условие прочности пружины:

$$\tau_{\text{max}} = k \frac{8P_{\text{кон}}D}{\pi d^3} \leq [\tau],$$

где в нашем случае

$$k = \frac{4c_{\text{п}} + 1}{4c_{\text{п}} - 4} = \frac{4 \cdot 6 + 1}{4 \cdot 6 - 4} = 1,25.$$

Учитывая, что  $c_{\text{п}} = \frac{D}{d}$ , получаем

$$\tau_{\text{max}} = k \frac{8P_{\text{кон}}c_{\text{п}}}{\pi d^2} \leq [\tau],$$

откуда

$$d \geq \sqrt{\frac{k8P_{\text{кон}}c_{\text{п}}}{\pi [\tau]}} = \sqrt{\frac{1,25 \cdot 8 \cdot 80 \cdot 6}{3,14 \cdot 4300}} = 0,596 \text{ см};$$

принимаем  $d = 6 \text{ мм}$ , тогда  $D = c_{\text{п}} d = 6 \cdot 6 = 36 \text{ мм}$ .

Определим число витков пружины, учитывая, что приращению нагрузки  $\Delta P = P_{\text{кон}} - P_{\text{нач}} = 80 - 20 = 60 \text{ кг}$  соответствует перемещение (осадка)  $\lambda_p = 35 \text{ мм}$ . Подставив в формулу (6.50) известные величины, получим

$$\lambda_p = \frac{8 \cdot \Delta P \cdot D^3 n}{G d^4} = \frac{8 \cdot \Delta P \cdot c_{\text{п}}^3 n}{G d},$$

откуда

$$n = \frac{\lambda_p \cdot G d}{8 \cdot \Delta P \cdot c_{\text{п}}^3} = \frac{3,5 \cdot 8 \cdot 10^5 \cdot 0,6}{8 \cdot 60 \cdot 6^3} = 16,2.$$

Полное число витков пружины сжатия должно быть на 1,5—2 витка больше числа рабочих витков (полученного по расчету), так как крайние витки, соприкасающиеся с опорными тарелками, практически не участвуют в деформации пружины. В нашем случае можно принять  $n_{\text{полн}} = 18$ .

**Пример 6.9.** Две стальные пружины (1 и 2) с одинаковым средним диаметром  $D$ , с одинаковым диаметром круглой проволоки  $d$  и с одинаковым (в свободном состоянии) шагом вставлены с предварительным нагружением между двумя неподвижными плоскостями  $A$  и  $B$  и абсолютно жестким диском  $СК$ . Верхняя пружина 1 имеет  $n_1$  витков, нижняя 2 —  $n_2$  витков (рис. 6.31).

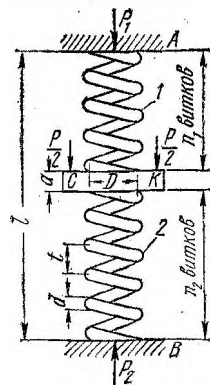


РИС. 6.31

Требуется найти:

1) усилия в обеих пружинах от силы  $P$  с учетом предварительного нагружения;

2) усилия и напряжения в обеих пружинах и их осадки при предварительном нагружении, т. е. при отсутствии силы ( $P = 0$ );

3) величину силы  $P$ , при которой верхняя пружина окажется в свободном состоянии; напряжение в нижней пружине и перемещение диска при этой величине силы  $P$ .

**Решение.** 1. Обозначим неизвестные реакции неподвижных плоскостей  $A$  и  $B$   $P_1$  и  $P_2$ . Задача статически неопределима, так как статика дает только одно уравнение равновесия

$$P_1 + P = P_2. \quad (1)$$

Для решения задачи необходимо рассмотреть деформацию пружины. Длина обеих пружин в свободном состоянии до деформации равна  $(n_1 + n_2)t$ . Длина этих пружин после их деформации (рис. 6.31) равна  $l - a$ . Отсюда следует, что суммарная осадка пружин

$$\lambda_1 + \lambda_2 = (n_1 + n_2)t - (l - a).$$

По формуле (6.50)

$$\lambda_1 = \frac{8P_1 D^3 n_1}{G d^4}; \quad \lambda_2 = \frac{8P_2 D^3 n_2}{G d^4}$$

И

$$\frac{8D^3}{G d^4} (P_1 n_1 + P_2 n_2) = (n_1 + n_2) t - (l - a). \quad (2)$$

Решив совместно уравнения (1) и (2), найдем:

$$P_1 = \frac{G d^4 [(n_1 + n_2) t - (l - a)] - 8P D^3 n_2}{8D^3 (n_1 + n_2)}; \quad (I)$$

$$P_2 = \frac{G d^4 [(n_1 + n_2) t - (l - a)] + 8P D^3 n_1}{8D^3 (n_1 + n_2)}. \quad (II)$$

2. Усилия в пружинах только от их предварительного нагружения при отсутствии силы  $P$  получим из уравнений (I) и (II), подставив в них  $P = 0$ :

$$P'_1 = P'_2 = \frac{G d^4 [(n_1 + n_2) t - (l - a)]}{8D^3 (n_1 + n_2)}. \quad (III)$$

Максимальные напряжения в пружинах

$$\max \tau_1 = \max \tau_2 = k \frac{P'_1 D}{W_p} = k \frac{8P'_1 D}{\pi d^3}.$$

3. Верхняя пружина будет находиться в свободном состоянии при  $P_1 = 0$ .

Подставив значение  $P_1 = 0$  в формулу (I), получим:

$$P = \frac{G d^4 [(n_1 + n_2) t - (l - a)]}{8D^3 n_2}; \quad (IV)$$

$$\max \tau_1 = 0; \quad \max \tau_2 = k \frac{8PD}{\pi d^3}.$$

Перемещение диска в этом случае равно осадке второй пружины и определяется по формуле (6.50):

$$\lambda_A = \lambda_2 = \frac{8PD^3 n_2}{G d^4}.$$

**Пример 6.10.<sup>1</sup>** В буфере мостового крана две пружины работают параллельно (рис. 6.32). Наружная пружина имеет следующие параметры:  $D_1 = 120$  мм,  $d_1 = 20$  мм,  $n_1 = 7$ ; соответственно для внутренней пружины  $D_2 = 60$  мм,  $d_2 = 12$  мм;  $n_2 = 11$ . Модуль сдвига для материала пружин  $G = 8,2 \cdot 10^5$  кг/см<sup>2</sup>, допускаемые напряжения  $[\tau]_1 = 2200$  кг/см<sup>2</sup>,  $[\tau]_2 = 2600$  кг/см<sup>2</sup>. Определить жесткость составной пружины и допускаемое значение сжимающей нагрузки.

Решение. Рассматриваемая составная (так называемая концентрическая) пружина представляет собой статически неопределимую систему, так как при двух неизвестных усилиях в пружинах статика дает лишь одно уравнение

$$P = P_1 + P_2,$$

где  $P$  — общее усилие, воспринимаемое обеими пружинами;

$P_1$  — усилие, воспринимаемое наружной пружиной;

$P_2$  — усилие, воспринимаемое внутренней пружиной.

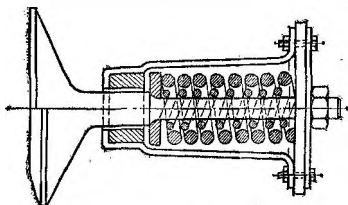


РИС. 6.32

Уравнение перемещений выражает условие равенства осадок пружин

$$\lambda_1 = \lambda_2$$

или

$$\frac{8P_1 D_1^3 n_1}{G d_1^4} = \frac{8P_2 D_2^3 n_2}{G d_2^4}.$$

Подстановка числовых данных дает

$$\frac{P_1 \cdot 120^3 \cdot 7}{20^4} = \frac{P_2 \cdot 60^3 \cdot 11}{12^4},$$

откуда  $P_1 = 1,52P_2$ , следовательно,

$$P_2 = 0,397P; \quad P_1 = 0,603P.$$

Жесткость (коэффициент жесткости) пружины равна силе, вызывающей осадку, равную единице длины. Обозначая жесткости наружной и внутренней пружин соответственно  $C_1$  и  $C_2$ , а жесткость составной пружины  $C$ , имеем:

$$P = C\lambda;$$

$$P_1 = C_1\lambda_1;$$

$$P_2 = C_2\lambda_2.$$

Учитывая, что  $P = P_1 + P_2$  и  $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$ , получаем

$$C\lambda = C_1\lambda_1 + C_2\lambda_2$$

или

$$C = C_1 + C_2,$$

т. е. жесткость концентрической пружины равна сумме жесткостей составляющих ее пружин.

Формулу для определения жесткости каждой из пружин получим, положив в формуле для вычисления осадки  $\lambda_1 = 1$  и  $P_1 = C_1$  (соответственно  $\lambda_2 = 1$ ,  $P_2 = C_2$ ):

$$C_1 = \frac{Gd_1^4}{8D_1^3n_1} = \frac{8,2 \cdot 10^5 \cdot 2^4}{8 \cdot 12^3 \cdot 7} = 135,5 \text{ кг/см};$$

$$C_2 = \frac{Gd_2^4}{8D_2^3n_2} = \frac{8,2 \cdot 10^5 \cdot 1,2^4}{8 \cdot 6^3 \cdot 11} = 89,5 \text{ кг/см};$$

$$C = 135,5 + 89,5 = 225 \text{ кг/см}.$$

Условия прочности пружин:

$$\max \tau_1 = k_1 \frac{8P_1D_1}{\pi d_1^3} \leq [\tau]_1;$$

$$\max \tau_2 = k_2 \frac{8P_2D_2}{\pi d_2^3} \leq [\tau]_2;$$

$$k_1 = \frac{4 \cdot 6 + 1}{4 \cdot 6 - 4} = 1,25 \quad \left( c_{п1} = \frac{D_1}{d_1} = \frac{120}{20} = 6 \right);$$

$$k_2 = \frac{4 \cdot 5 + 1}{4 \cdot 5 - 4} = 1,31 \quad \left( c_{п2} = \frac{D_2}{d_2} = \frac{60}{12} = 5 \right).$$

Подставив значения  $P_1$  и  $P_2$ , выраженные через  $P$ , получим:

$$\max \tau_1 = 1,25 \frac{8 \cdot 0,603P \cdot 12}{3,14 \cdot 2^3} \leq 2200,$$

откуда

$$[P]_1 = \frac{2200 \cdot 3,14 \cdot 2^3}{1,25 \cdot 8 \cdot 0,603 \cdot 12} = 763 \text{ кг};$$

$$\max \tau_2 = 1,31 \frac{8 \cdot 0,397P \cdot 6}{3,14 \cdot 1,2^3} \leq 2600,$$

откуда

$$[P]_2 = \frac{2600 \cdot 3,14 \cdot 1,2^3}{8 \cdot 0,397 \cdot 6} = 740 \text{ кг}.$$

В качестве допускаемой нагрузки составной пружины должна быть принята меньшая из найденных (определяемая условием прочности внутренней пружины)  $[P] = [P]_2 = 740 \text{ кг}$ .

Динамичность нагружения пружин приближенно учтена в заданных (пониженных) величинах допускаемых напряжений.

## ГЛАВА 7

### ИЗГИБ ПРЯМОГО БРУСА

#### § 7.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

*Изгибом бруса* называется деформация, при которой происходит изменение кривизны продольной оси бруса. При расчетах на изгиб используется та же система координат, что и ранее: ось  $z$  совпадает с осью бруса, а оси  $x$  и  $y$  являются главными центральными осями его поперечного сечения (рис. 7.1).

В этой главе, там, где нет специальной оговорки, рассматриваются прямые брусья с постоянным поперечным сечением, имеющим хотя бы одну ось симметрии.

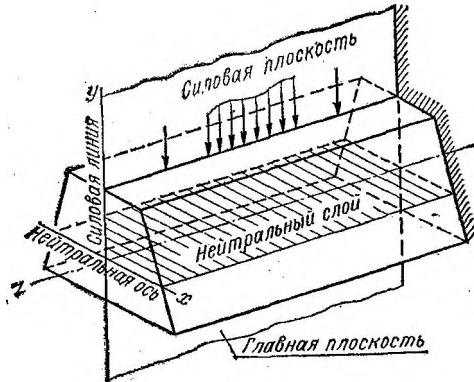


РИС. 7.1

Прямой брус, работающий главным образом на изгиб, принято называть *балкой*.

Плоскость, проходящую через продольную ось бруса (балки) и одну из главных центральных осей его поперечного сечения, называют *главной плоскостью*.

В дальнейшем ограничимся рассмотрением случая, когда все внешние силы и пары сил, изгибающие балку, лежат в одной плоскости, проходящей через ось балки. Эта плоскость называется *силовой плоскостью*. Внешние силы, вызывающие изгиб, перпендикулярны к продольной оси балки.

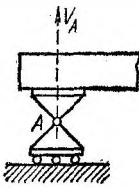
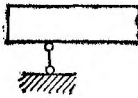
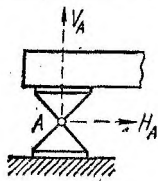
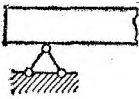
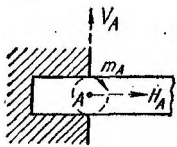
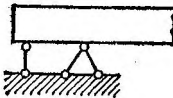
Линия пересечения силовой плоскости с плоскостью поперечного сечения называется *силовой линией*.

Если силовая плоскость совпадает с главной плоскостью (см. рис. 7.1), то ось изогнутой балки располагается в силовой плоскости. Такой изгиб балки называется *прямым*, в противном случае — *косым*.



Таблица 7.1

Основные типы опор стержневых систем

Название опоры	Схема		Число неизвестных опорных усилий
	конструктивная	стержневая	
Цилиндрическая подвижная			Одно: $V_A$
Цилиндрическая неподвижная			Два: $H_A$ $V_A$
Защемляющая неподвижная			Три: $H_A$ $V_A$ $M_A$

Косой изгиб рассмотрен в гл. 9.

При изгибе балки продольные волокна, находящиеся на выпуклой части, растягиваются, а находящиеся на вогнутой — сжимаются. Слой промежуточных волокон, которые, искривляясь, не изменяют своей длины, называется *нейтральным слоем*.

Линия пересечения нейтрального слоя с плоскостью поперечного сечения называется *нейтральной линией* или *нейтральной осью* (нулевой линией).

В табл. 7.1 приведены основные, наиболее распространенные типы опор и показаны возникающие в них опорные реакции.

Балки, у которых реакции опор могут быть определены только из уравнений статики, называются *статически определимыми*.

На рис. 7.2 приведены основные, простейшие типы статически определимых балок: а — консоль; б — простая балка; в — консольная балка.

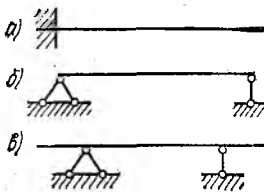


РИС. 7.2

На рис. 7.3 показаны различные виды нагрузок, вызывающие изгиб балки: *a* — сосредоточенная сила; *b* — сосредоточенная пара сил с моментом *m* (кратко — сосредоточенный момент); *в* — равномерно распределенная нагрузка; *г* — неравномерно распределенная нагрузка.

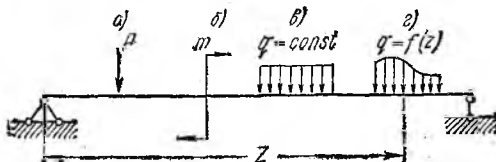


РИС. 7.3

## § 7.2. ВНУТРЕННИЕ СИЛОВЫЕ ФАКТОРЫ. ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮР ПОПЕРЕЧНЫХ СИЛ И ИЗГИБАЮЩИХ МОМЕНТОВ

### Поперечные силы и изгибающие моменты

При прямом изгибе внутренние силы, возникающие в поперечном сечении балки, приводятся к главному вектору  $Q_y$ , совпадающему с осью *y*, и главному моменту  $M_x$ , плоскость действия которого сов-

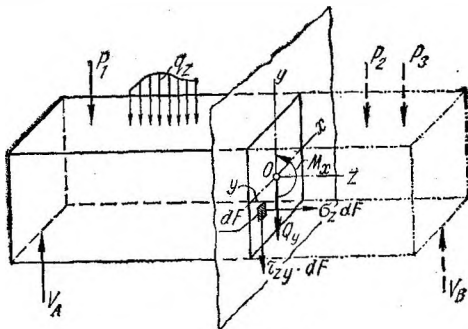


РИС. 7.4

падает с главной плоскостью  $zOy$  (рис. 7.4.). Поперечной силой ( $Q_y = \int_F \tau_{zy} dF$ ) называется равнодействующая внутренних касательных сил, возникающих в поперечном сечении балки.

Изгибающим моментом ( $M_x = \int_F y \sigma_z dF$ ) называется результирующий момент относительно нейтральной оси поперечного сечения внутренних нормальных сил, возникающих в этом сечении балки.

Если в поперечных сечениях балки возникают оба внутренних силовых фактора — изгибающий момент и поперечная сила, то изгиб называется *поперечным*, если только изгибающий момент, — *чистым*. В условиях чистого изгиба может находиться вся балка или отдельный ее участок.

Величины  $Q_y$  и  $M_x$  определяются с помощью метода сечений, применение которого позволяет сформулировать правила для нахождения указанных внутренних силовых факторов.

*Поперечная сила ( $Q_y$ ) в данном поперечном сечении балки численно равна алгебраической сумме проекций на ось  $y$  всех внешних сил, действующих по одну сторону от рассматриваемого сечения:*

$$Q_y = \sum_{i=1}^n P_{iy}. \quad (7.1)$$

*Изгибающий момент ( $M_x$ ) в данном поперечном сечении балки численно равен алгебраической сумме моментов всех внешних сил, действующих по одну сторону от сечения относительно нейтральной оси этого сечения:*

$$M_x = \sum_{i=1}^n m_x(P_i). \quad (7.2)$$

#### Правило знаков для изгибающих моментов и поперечных сил

Внешние силы, стремящиеся вращать рассматриваемую часть балки относительно центра тяжести проведенного сечения  $n-n$  по часовой

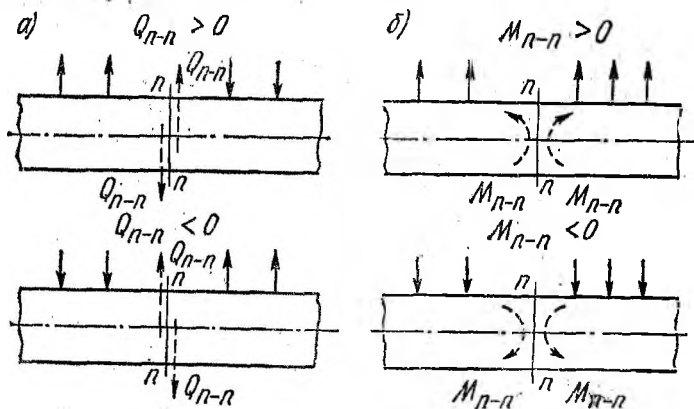


РИС. 7.5

стрелке, дают в этом сечении положительную поперечную силу, а против часовой стрелки — отрицательную (рис. 7.5, а).

Внешние силы, направленные снизу вверх, дают в проведенном сечении  $n-n$  положительный изгибающий момент, а направленные вниз, — отрицательный (рис. 7.5, б).

Внешняя пара сил вызывает в рассматриваемом поперечном сечении положительный изгибающий момент, если она изгибает балку так же, как сила, направленная вверх и мысленно приложенная в том месте, где действует данная пара сил.

Положительные изгибающие моменты возникают при изгибе балки выпуклостью вниз, а отрицательные — вверх.  $Q_y$  и  $M_x$  целесообразно определять из рассмотрения той части балки, на которую действует меньше сил.

Графики (диаграммы), изображающие законы изменения  $Q_y$  и  $M_x$  вдоль балки, называют соответственно *эпюрой поперечных сил* и *эпюрой изгибающих моментов*.

При построении эпюр  $Q_y$  и  $M_x$  положительные ординаты откладывают вверх, отрицательные — вниз от осей (баз) эпюр, которые параллельны оси балки. Таким образом, эпюра  $M_x$  строится со стороны сжатых волокон.

Построение эпюр  $Q_y$  и  $M_x$  показано на примерах.

**Пример 7.1.** Построить эпюры  $Q_y$  и  $M_x$  для одноконсольной балки, лежащей на двух опорах (рис. 7.6, а).

**Решение.** Определяем опорные реакции<sup>1</sup> (рис. 7.6, б) из уравнений моментов относительно центров опорных шарниров, а для проверки правильности определения величин реакций используем уравнение проекций на ось  $y$ , перпендикулярную к продольной оси балки:

$$\begin{aligned} \Sigma m_A = 0; \quad & -m + P(a+b) + q(d+e) \left( a + b + c + \frac{d+e}{2} \right) - \\ & - B(a+b+c+d) = 0; \\ \Sigma m_B = 0; \quad & A(a+b+c+d) - m - P(c+d) - \\ & - q(d+e) \left( d - \frac{d+e}{2} \right) = 0. \end{aligned}$$

Подставив числовые данные, получим:

$$\begin{aligned} -20 + 30 \cdot 2 + 20 \cdot 6 \cdot 7 - 8B &= 0; \\ 8A - 20 - 30 \cdot 6 - 20 \cdot 6 \cdot 1 &= 0, \end{aligned}$$

откуда  $A = 40$  кн,  $B = 110$  кн.

Обе опорные реакции получились со знаком плюс, это свидетельствует, что их направления выбраны правильно.

Проверка:

$$\Sigma Y = 0; \quad A + B - P - q(d+e) = 0; \quad 40 + 110 - 30 - 20(4+2) = 0.$$

Реакции определены правильно.

Приступаем к построению эпюр  $Q_y$  и  $M_x$ . Для этого разбиваем балку на пять участков, в пределах каждого из которых функции, дающие законы изменения  $Q_y$  и  $M_x$ , не имеют разрывов. Границами

<sup>1</sup> Для балки, нагруженной силами, перпендикулярными к ее оси (при этом опорные реакции не дают составляющих, направленных вдоль балки), принимаем для реакций обозначения  $A$ ,  $B$  взамен  $V_A$ ,  $V_B$ .

участков являются точки приложения внешних сосредоточенных сил и моментов, а также начало и конец распределенной нагрузки, не меняющей своего характера.

Для каждого участка проводим произвольное поперечное сечение, положение которого определяется координатой  $z_1$ , и составляем аналитические выражения для  $Q_y$  и  $M_x$ , которые справедливы в пределах

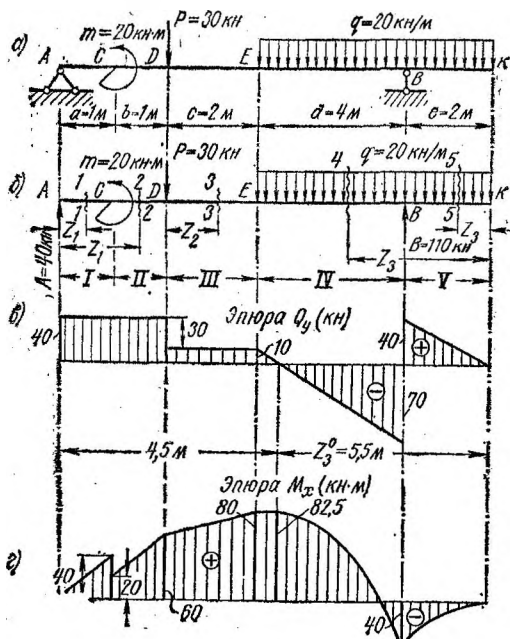


РИС. 7.6

рассматриваемого участка. Начало координат фиксируется только для каждого участка, и для различных участков его положение может меняться.

I участок ( $0 \leq z_1 < a = 1\text{ м}$ )

Для произвольного сечения 1-1 первого участка

$$Q_y = A = 40\text{ кН}; \quad (a_1)$$

$$M_x = Az_1 = 40z_1. \quad (б_1)$$

Из уравнений  $(a_1)$  и  $(б_1)$  следует, что на первом участке поперечная сила  $Q_y$  постоянна, а изгибающий момент  $M_x$  изменяется по линейному закону.

Из уравнения (б<sub>1</sub>) найдем:

$$\text{при } z_1 = 0 \quad M_x = 0;$$

$$\text{при } z_1 = 1 \text{ м} \quad M_x = 40 \text{ кн} \cdot \text{м}.$$

Аналогично для остальных участков.

*II участок (1 м < z<sub>1</sub> < 2 м)*

$$Q_y = A = 40 \text{ кн}; \quad (a_2)$$

$$M_x = Az_1 - t = 40z_1 - 20; \quad (б_2)$$

$$\text{при } z_1 = 1 \text{ м} \quad M_x = 20 \text{ кн} \cdot \text{м};$$

$$\text{при } z_1 = 2 \text{ м} \quad M_x = 60 \text{ кн} \cdot \text{м}.$$

*III участок (0 < z<sub>2</sub> < 2 м)*

Начало координат перенесено в точку D.

$$Q_y = A - P = 40 - 30 = 10 \text{ кн}; \quad (a_3)$$

$$M_x = A(2 + z_2) - t - Pz_2 = 40(2 + z_2) - 20 - 30z_2; \quad (б_3)$$

$$\text{при } z_2 = 0 \quad M_x = 60 \text{ кн} \cdot \text{м};$$

$$\text{при } z_2 = 2 \text{ м} \quad M_x = 80 \text{ кн} \cdot \text{м}.$$

*IV участок (2 м < z<sub>3</sub> < 6 м)*

Начало координат выбрано в точке K. Отбрасываем левую часть балки и определяем величины Q<sub>y</sub> и M<sub>x</sub> через внешние силы, действующие на правую часть балки:

$$Q_y = qz_3 - B = 20z_3 - 110; \quad (a_4)$$

$$\text{при } z_3 = 2 \text{ м} \quad Q_y = -70 \text{ кн};$$

$$\text{при } z_3 = 6 \text{ м} \quad Q_y = 10 \text{ кн}.$$

$$M_x = -qz_3 \frac{z_3}{2} + B(z_3 - 2) = -10z_3^2 + 110(z_3 - 2); \quad (б_4)$$

$$\text{при } z_3 = 2 \text{ м} \quad M_x = -40 \text{ кн} \cdot \text{м};$$

$$\text{при } z_3 = 6 \text{ м} \quad M_x = 80 \text{ кн} \cdot \text{м}.$$

Для построения параболы вычислим экстремальное значение изгибающего момента:

$$\frac{dM_x}{dz} = -20z_3 + 110; \quad \left( \frac{dM_x}{dz} \right)_{z=z_3^0} = 0, \text{ откуда } z_3^0 = 5,5 \text{ м}.$$

Подставив полученное значение  $z_3^0 = 5,5 \text{ м}$  в уравнение (б<sub>4</sub>), найдем

$$M_{\text{max}} = -10 \cdot 5,5^2 + 110(5,5 - 2) = 82,5 \text{ кн} \cdot \text{м}.$$

*V участок (0 < z<sub>3</sub> < 2 м)*

$$Q_y = qz_3 = 20z_3; \quad (a_5)$$

при  $z_3 = 0$   $Q_y = 0$ ;

при  $z_3 = 2$  м  $Q_y = 40$  кн.

$$M_x = -\frac{qz_3^3}{2} = -10z_3^2 \quad (6_5)$$

при  $z_3 = 0$   $M_x = 0$ ;

при  $z_3 = 1$  м  $M_x = -10$  кн · м;

при  $z_3 = 2$  м  $M_x = -40$  кн · м.

По полученным данным на рис. 7.6, в, г построены эпюры  $Q_y$  и  $M_x$ .

Из эпюр  $Q_y$  и  $M_x$  видно, что максимальная по абсолютной величине поперечная сила возникает непосредственно слева от опоры В:

$$Q_{\max} = 70 \text{ кн.}$$

Максимальный момент возникает в поперечном сечении балки на расстоянии 4,5 м от левой опоры:

$$M_{\max} = 82,5 \text{ кн · м.}$$

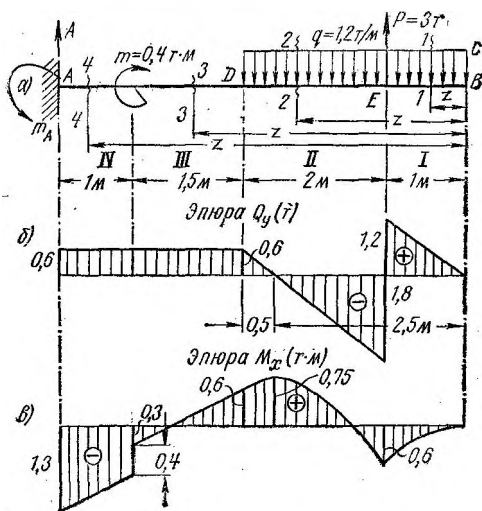


РИС. 7.7

**Пример 7.2.** Построить эпюры  $Q_y$  и  $M_x$  для консольной балки, жестко заделанной левым концом и нагруженной, как показано на рис. 7.7, а.

**Решение.** Рассматриваемая балка имеет четыре участка нагружения. В заделке возникают вертикальная опорная реакция  $A$  и опорный момент  $m_A$ , которые определяются из уравнений статики.

В данном случае удобнее рассматривать силы, действующие справа от рассматриваемых сечений, тогда опорные реакции в выражения  $Q_y$  и  $M_x$  не войдут и для построения эпюр  $Q_y$  и  $M_x$  отпадает необходимость в определении реакций. Для всех участков начало координат принимаем на правом конце балки.

*I участок* ( $0 \leq z < 1$  м)

$$Q_y = qz = 1,2z; \text{ при } z = 0 \quad Q_y = 0; \text{ при } z = 1 \text{ м } Q_y = 1,2 \text{ т.}$$

$$M_x = -\frac{qz^2}{2} = -0,6z^2; \text{ при } z=0; M_x=0; \text{ при } z = 1 \text{ м } M_x = -0,6 \text{ т} \cdot \text{м.}$$

*II участок* ( $1 \text{ м} < z < 3$  м)

$$Q_y = qz - P = 1,2z - 3; \text{ при } z = 1 \text{ м } Q_y = -1,8 \text{ т}; \text{ при } z = 3 \text{ м} \\ Q_y = 0,6 \text{ т.}$$

$$M_x = -\frac{qz^2}{2} + P(z - 1) = -0,6z^2 + 3(z - 1);$$

$$\text{при } z = 1 \text{ м } M_x = -0,6 \text{ т} \cdot \text{м};$$

$$\text{при } z = 3 \text{ м } M_x = 0,6 \text{ т} \cdot \text{м};$$

$$\text{при } z = 2,5 \text{ м } M_{\max} = 0,75 \text{ т} \cdot \text{м.}$$

*III участок* ( $3 \text{ м} < z < 4,5$  м)

$$Q_y = q \cdot 3 - P = 3,6 - 3 = 0,6 \text{ т};$$

$$M_x = -q \cdot 3(z - 1,5) + P(z - 1) = -3,6(z - 1,5) + \\ + 3(z - 1) = -0,6z + 2,4;$$

$$\text{при } z = 3 \text{ м } M_x = 0,6 \text{ т} \cdot \text{м}; \text{ при } z = 4,5 \text{ м } M_x = -0,3 \text{ т} \cdot \text{м.}$$

*IV участок* ( $4,5 \text{ м} < z < 5,5$  м)

$$Q_y = 3,6 - 3 = 0,6 \text{ т};$$

$$M_x = -q \cdot 3(z - 1,5) + P(z - 1) - m = -3,6(z - 1,5) + \\ + 3(z - 1) - 0,4 = -0,6z + 2;$$

$$\text{при } z = 4,5 \text{ м } M_x = -0,7 \text{ т} \cdot \text{м}; \text{ при } z = 5,5 \text{ м } M_x = -1,3 \text{ т} \cdot \text{м.}$$

По полученным данным построены эпюры  $Q_y$  и  $M_x$  (рис. 7.7, б, в), из которых следует, что

$$Q_{\max} = 1,8 \text{ т}, \quad M_{\max} = 1,3 \text{ т} \cdot \text{м}$$

(по абсолютному значению), а опорные реакции:

$$A = 0,6 \text{ т}; \quad m_A = 1,3 \text{ т} \cdot \text{м.}$$



§ 7.3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ЗАВИСИМОСТИ МЕЖДУ  $M_x$ ,  $Q_y$  И  $q$ 

Изгибающий момент  $M_x$ , поперечная сила  $Q_y$  и интенсивность распределенной нагрузки  $q$  связаны между собой следующими дифференциальными зависимостями:

$$Q_y = \frac{dM_x}{dz}, \quad (7.3)$$

т. е. производная от изгибающего момента по абсциссе поперечного сечения балки равна поперечной силе;

$$q = \frac{dQ_y}{dz} = \frac{d^2M_x}{dz^2}, \quad (7.4)$$

т. е. первая производная от поперечной силы (или вторая производная от изгибающего момента) по абсциссе поперечного сечения балки равна интенсивности распределенной нагрузки.

Интенсивность равномерно распределенной нагрузки, направленной вверх, принимается положительной.

Из формул (7.3) и (7.4) вытекают следующие интегральные зависимости:

$$M_x = \int_{z_0}^z Q_y dz + M_0; \quad (7.5)$$

$$Q_y = \int_{z_0}^z q dz + Q_0, \quad (7.6)$$

где  $z_0$  и  $z$  — координаты начала и произвольного сечения участка;  $Q_0$  и  $M_0$  — поперечная сила и изгибающий момент в начале участка.

Из приведенных соотношений (7.3)—(7.6) можно сделать следующие выводы.

1. При  $q = 0$   $Q_y = C$  и  $M_x = Cz + C_1$ . На участке, где отсутствует распределенная нагрузка, эпюра имеет вид горизонтальной прямой, а эпюра  $M_x$  — наклонной прямой (участки I, II и III на рис. 7.6, б, в, г).

2. Если  $q = C$ ,  $Q_y = Cz + C_1$  и  $M_x = \frac{Cz^2}{2} + C_1z + C_2$ . На участке, несущем равномерно распределенную нагрузку (участки IV и V на рис. 7.6, б, в, г) эпюра  $Q_y$  очерчена по наклонной прямой, а эпюра  $M_x$  — по квадратной параболе.

В общем случае степень полинома поперечной силы  $Q_y$  на единицу выше, чем уравнение интенсивности нагрузки  $q$ , а в уравнении  $M_x$  координата  $z$  имеет показатель степени на единицу выше, чем в уравнении  $Q_y$ .

3. Если на участке балки (идем слева направо):

- $Q_y$  положительно, то  $M_x$  возрастает (алгебраически);
- $Q_y$  отрицательно, то  $M_x$  убывает;
- $Q_y = 0$ , то  $M_x = C$  имеет постоянную величину (чистый изгиб).

4. Ордината эпюры  $Q_y$  в любом сечении численно равна тангенсу угла наклона касательной к эпюре  $M_x$  в том же сечении, а ордината эпюры  $q$  — тангенсу угла наклона касательной к эпюре  $Q_y$ . Следовательно,  $M_x$  достигает экстремального значения в том сечении, где эпюра  $Q_y$  пересекает ось  $z$ . Если эпюра  $Q_y$  (при непрерывном изменении  $Q_y$ ) меняет знак с плюса на минус (идем слева направо), момент имеет аналитический максимум, а если эпюра меняет знак с минуса на плюс, момент имеет аналитический минимум.

5. Поперечная сила в данном сечении численно равна площади эпюры распределенной нагрузки от начала участка до рассматриваемого сечения, сложенной с поперечной силой в начале участка.

Изгибающий момент в данном сечении численно равен площади эпюры поперечной силы от начала участка до рассматриваемого сечения, сложенной с изгибающим моментом в начале участка. При рассмотрении правой части балки площади эпюр  $q$  и  $Q_y$  надо брать с обратным знаком.

Так, в примере 7.1 изгибающий момент в сечении  $D$   $M_x = 40 + 20 = 60 \text{ кн} \cdot \text{м}$ , где  $40 \text{ кн} \cdot \text{м}$  — площадь эпюры  $Q_y$  на втором участке балки, а  $20 \text{ кн} \cdot \text{м}$  — значение изгибающего момента в начале участка. Аналогично при рассмотрении правой части балки момент на опоре  $B$   $M_x = -40 \text{ кн} \cdot \text{м}$ , так как площадь эпюры  $Q_y$  на пятом участке балки равна  $40 \text{ кн} \cdot \text{м}$ , а изгибающий момент в начале участка  $M_0 = 0$ .

6. На криволинейном участке эпюры  $M_x$  ее выпуклость направлена в сторону, противоположную направлению распределенной нагрузки.

Дифференциальные зависимости между  $M_x$ ,  $Q_y$  и  $q$  и вытекающие из них следствия используются для проверки правильности построения эпюр  $Q_y$  и  $M_x$ . Они дают также возможность строить эти эпюры по вычисленным значениям  $Q_y$  и  $M_x$  в характерных сечениях балки, без составления аналитических выражений изгибающих моментов и поперечных сил для отдельных ее участков.

При построении эпюр  $Q_y$  и  $M_x$  по характерным ординатам, помимо указанных следствий из дифференциальных зависимостей, используются следующие положения, вытекающие непосредственно из применения метода сечений:

1. В том месте, где к балке приложена сосредоточенная сила, на эпюре  $Q_y$  получается скачкообразное изменение ординаты («скачок») на величину приложенной силы. На эпюре  $M_x$ , как следует из зависимости (7.3), в этом месте получается излом (смежные участки эпюры не имеют плавного сопряжения).

2. В сечении, где к балке приложена сосредоточенная пара сил (сосредоточенный момент), на эпюре  $M_x$  получается скачкообразное изменение ординат («скачок») на величину приложенного момента.

3. В сечении на конце балки поперечная сила численно равна приложенной к балке в этом месте сосредоточенной силе (активной или реактивной), а изгибающий момент численно равен моменту приложенной в этом месте сосредоточенной пары сил (активной или реактивной).

**Пример 7.3.** Построить эпюры  $Q_y$  и  $M_x$  для балки, показанной на рис. 7.8, а.

Решение. Опорные реакции показаны на рис. 7.8, а.

Балка имеет четыре участка нагружения.

Вычисляем значения поперечных сил в характерных сечениях  $A$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $B$  и  $E$ .

В сечении  $A$   $Q_A = A = 3qa$ .

В конце первого участка (в сечении на бесконечно близком расстоянии слева от сечения  $C$ )

$$Q_C^{\text{лев}} = 3qa - 3q \cdot 4a = -9qa.$$

Так как в сечении  $C$  приложена сосредоточенная сила  $P = 10qa$ , направленная вверх, то на границе  $I$  и  $II$  участков поперечная сила

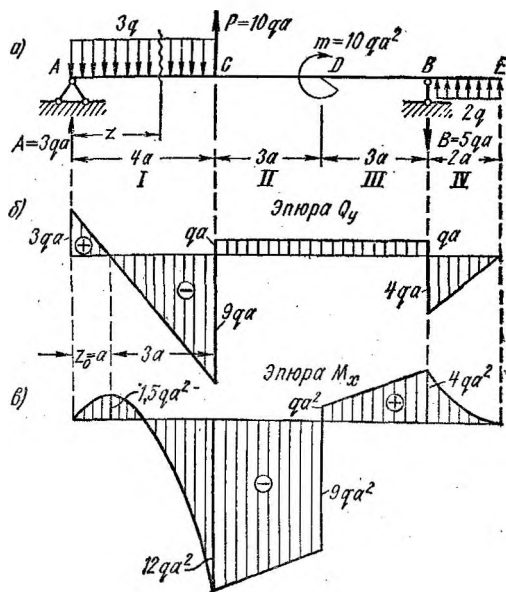


РИС. 7.8

скачком возрастает на  $10qa$  и в начале  $II$  участка (в сечении на бесконечно близком расстоянии справа от сечения  $C$ )

$$Q_C^{\text{прав}} = -9qa + 10qa = qa.$$

От начала  $II$  до конца  $III$  участка поперечная сила остается постоянной, так как эти участки свободны от распределенных нагрузок, а сосредоточенный момент не влияет на величину поперечной силы:

$$Q_C^{\text{прав}} = Q_B^{\text{лев}} = qa.$$

В начале *IV* участка

$$Q_B^{\text{прав}} = qa - 5qa = -4qa.$$

В конце *IV* участка

$$Q_E = 0.$$

По полученным значениям поперечной силы на рис. 7.8, б построена эпюра  $Q_y$ .

В любом сечении первого участка

$$Q_y = A - 3qz.$$

Найдем положение сечения ( $z_0$ ), где поперечная сила равна нулю:

$$A - 3qz_0 = 0; \quad z_0 = \frac{A}{3q} = \frac{3qa}{3q} = a.$$

Вычисляем значения изгибающих моментов в характерных сечениях в сечении *A*  $M_A = 0$ ;

в сечении *C*  $M_C = 3qa \cdot 4a - 3q \cdot 4a \cdot 2a = -12qa^2$ .

Максимальное значение изгибающего момента на *I* участке в сечении, где поперечная сила  $Q_y = 0$ , при  $z_0 = a$

$$M_{\text{max}} = 3qa \cdot a - 3qa \frac{a}{2} = \frac{3}{2} qa^2.$$

В сечении *D* в конце второго участка

$$M_D^{\text{лев}} = 3qa \cdot 7a - 3q \cdot 4a \cdot 5a + 10qa \cdot 3a = -9qa^2.$$

В дальнейшем рассматриваем силы, действующие на правую часть балки:

в сечении *E*  $M_E = 0$ ;

в сечении *B*  $M_B = 2q \cdot 2a \cdot a = 4qa^2$ ;

в сечении *D* в начале *III* участка  $M_D^{\text{прав}} = 2q \cdot 2a \cdot 4a - 5qa \cdot 3a = qa^2$ .

По найденным значениям изгибающих моментов на рис. 7.8, в построена эпюра  $M_x$  с учетом того, что на *I* и *IV* участках эпюра  $M_x$  очерчена по параболам, причем на *I* участке выпуклость параболы направлена вверх, а на *IV* — вниз. На *II* и *III* участках эпюры  $M_x$  идут по наклонным прямым.

На *I* участке аналитический максимум изгибающего момента

$$M_{\text{max}} = \frac{3}{2} qa^2,$$

а наибольший по абсолютному значению изгибающий момент не только для данного участка, но и для всей балки

$$M_{\text{max}} = 12qa^2.$$

По этому моменту и ведется расчет балки на прочность.

#### § 7.4. ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮР ВНУТРЕННИХ СИЛОВЫХ ФАКТОРОВ ДЛЯ ПЛОСКИХ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫХ РАМ

*Рамой* называется стержневая система, стержни которой во всех или некоторых узлах жестко связаны между собой.

У плоской рамы все оси ее элементов лежат в одной плоскости, которая совпадает с плоскостью нагрузки и является главной плоскостью для всех элементов рамы.

Внутренние силы, возникающие в любом поперечном сечении стержня плоской рамы, в общем случае приводятся к трем внутренним силовым факторам: продольной силе  $N_z$ , поперечной силе  $Q_y$  и изгибающему моменту  $M_x$ . При этом ось  $z$  направлена вдоль оси каждого стержня рамы, а оси  $x$  и  $y$  совпадают с главными центральными осями поперечного сечения и из них ось  $x$  перпендикулярна к плоскости нагрузки.

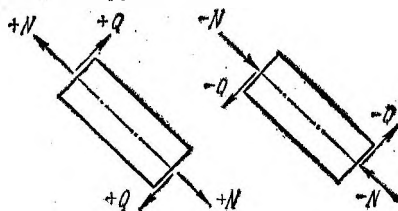


РИС. 7.9

Продольная сила  $N_z$  в каком-либо сечении численно равна алгебраической сумме проекций всех внешних сил, расположенных по одну сторону от сечения, на ось стержня (для криволинейных стержней на касательную к оси в рассматриваемом сечении).

Продольную силу, соответствующую растяжению, считают положительной, а сжатую — отрицательной.

Поперечная сила в произвольном сечении численно равна алгебраической сумме проекций всех внешних сил, расположенных по одну сторону от сечения, на нормаль к оси стержня. Правило знаков для поперечной силы сохраняется таким же, как и для балок.

Правило знаков для  $N$  и  $Q$  показано на рис. 7.9.

Изгибающий момент  $M_x$  в данном сечении численно равен алгебраической сумме моментов внешних сил, расположенных по одну сторону от сечения, относительно нейтральной оси сечения.

Ординаты эпюры изгибающих моментов условимся откладывать со стороны сжатых волокон. В этом случае отпадает необходимость в постановке знаков на эпюре  $M_x$ .

Зависимости между  $M_x$ ,  $Q_y$  и  $q$ , указанные для балки, и выводы, вытекающие из них, остаются в силе и для прямолинейных элементов рам.

Основные принципы построения эпюр  $Q_y$  и  $M_x$  для рам те же, что и для балок, но следует отметить, что для рам границами участков являются не только места приложения внешних сосредоточенных сил и пар сил, начало и конец распределенной нагрузки, но и узлы, где пересекаются оси соседних элементов рамы.

**Пример 7.4.** Построить эпюры  $N_z$ ,  $Q_y$  и  $M_x$  для рамы, показанной на рис. 7.10, а.

**Решение.** Так как рама одним концом зашпелена, то построение эпюр удобнее начинать со свободного конца, при этом отпадает необходимость в предварительном определении опорных реакций.

Рама имеет четыре участка, для каждого из них составляем уравнения продольных и поперечных сил и изгибающих моментов, соблюдая приведенные выше правила знаков.

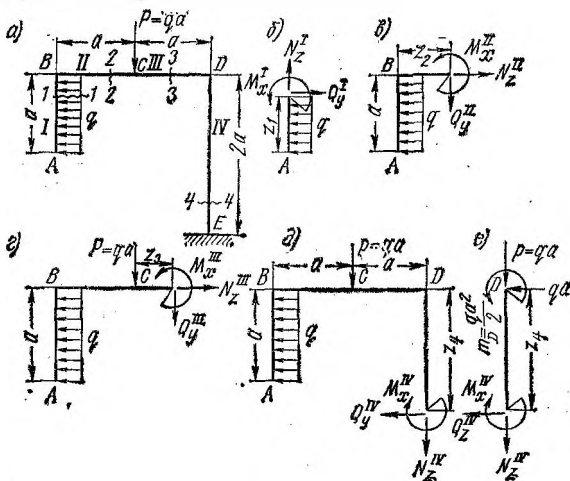


РИС. 7.10

Проводим сечение 1—1 в пределах первого участка на расстоянии  $z_1$  от точки A и из условий равновесия отсеченной части (рис. 7.10, б) определяем:

$$N_z^I = 0; \quad Q_y^I = qz_1; \quad M_x^I = \frac{qz_1^2}{2}.$$

Как следует из полученных уравнений, эпюра  $Q_y^I$  идет по наклонной прямой линии, а эпюра  $M_x$  — по квадратной параболе;

при  $z_1 = 0$   $Q_y^I = 0$  и  $M_x^I = 0$ ;

при  $z_1 = a$   $Q_y^I = qa$  и  $M_x^I = \frac{qa^2}{2}$ .

Эпюру  $Q_y$  откладываем влево от оси стержня (рис. 7.11, б) по направлению внешней силы, действующей на левую отсеченную часть рамы. Так как левые волокна стержня AB на первом участке сжимаются, то и эпюру  $M_x$  тоже откладываем влево от его оси (рис. 7.11, в).

Аналогично проводим поперечные сечения в пределах последующих участков рамы и, рассматривая равновесие отсеченных частей рамы, получаем выражения для  $N_z$ ,  $Q_y$  и  $M_x$ .

Для второго участка рамы (рис. 7.10, б):

$$N_z^{\text{II}} = qa = \text{const}; \quad Q_y^{\text{II}} = 0; \quad M_x^{\text{II}} = \frac{qa^2}{2} = \text{const}.$$

Продольная сила получилась положительной, т. е. на этом участке стержень растянут. Эпюра  $N_z$  откладывается по любую сто-

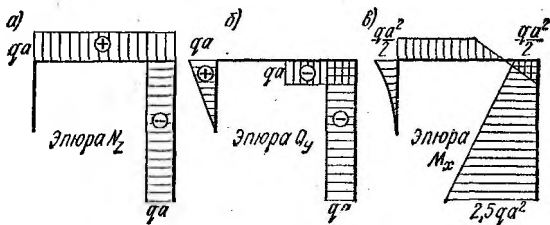


РИС. 7.11

рону от оси стержня с простановкой на эпюре ее знака (рис. 7.11, а). Эпюра  $M_x$  отложена вверх, так как сжаты верхние волокна.

Для третьего участка (рис. 7.10, в)

$$N_z^{\text{III}} = qa = \text{const}; \quad Q_y^{\text{III}} = -P = -qa = \text{const};$$

$$M_x^{\text{III}} = \frac{qa^2}{2} - Pz_3 = \frac{qa^2}{2} - qaz_3;$$

$$\text{при } z_3 = 0 \quad M_x^{\text{III}} = \frac{qa^2}{2}; \quad \text{при } z_3 = a \quad M_x^{\text{III}} = -\frac{qa^2}{2}.$$

Ординаты эпюры  $Q_y$  откладываем вниз, в сторону действия внешней силы  $P$ , а эпюры  $M_x$  — вверх в сечении  $C$  и вниз в сечении  $D$ , т. е. в сторону сжатых волокон (см. рис. 7.11, в).

Для четвертого участка (см. рис. 7.10, д)

$$N_z^{\text{IV}} = -qa; \quad Q_y^{\text{IV}} = -qa;$$

$$M_x^{\text{IV}} = -qa\left(z_4 - \frac{a}{2}\right) - qa^2 = -qaz_4 - \frac{qa^2}{2}.$$

Тот же результат можно получить, если отбросить ломаный стержень  $ABD$  и его действие на вертикальный стержень  $DE$  заменить горизонтальной и вертикальной сосредоточенными силами, равными по  $qa$  каждая, и моментом  $m_D = \frac{qa^2}{2}$ , приложенными в точке

$D$  (рис. 7.10, е). При  $z_4 = 0 \quad M_x^{\text{IV}} = -\frac{qa^2}{2}$ ; при  $z_4 = 2a \quad M_x^{\text{IV}} = -\frac{5qa^2}{2}$ .

Эпюры  $Q_y$  и  $M_x$  на этом участке строим слева от оси стержня  $DE$ .

Эпюры  $N_z$ ,  $Q_y$  и  $M_x$  для рамы даны на рис. 7.11, а, б, в.

Пример 7.5. Построить эпюры внутренних силовых факторов для рамы, представленной на рис. 7.12, а.

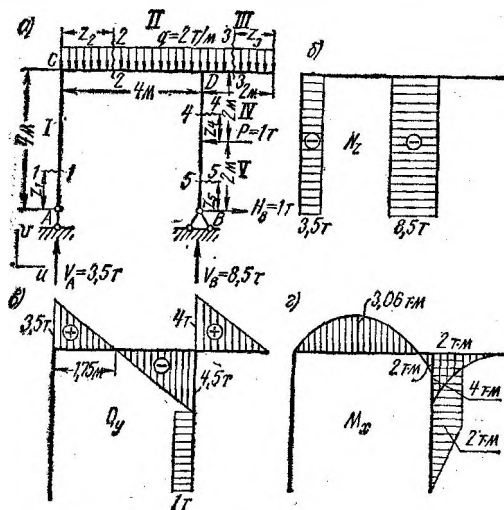


РИС. 7.12

Решение. Составляя уравнения равновесия для сил, действующих на раму, определяем опорные реакции:

$$\Sigma m_A = 0; 2 \cdot 6 \cdot 3 - 1 \cdot 2 - V_B \cdot 4 = 0; V_B = 8,5 \text{ т};$$

$$\Sigma m_B = 0; V_A \cdot 4 - 2 \cdot 6 \cdot 1 - 1 \cdot 2 = 0, V_A = 3,5 \text{ т};$$

$$\Sigma U = 0; -1 + H_B = 0; H_B = 1 \text{ т}.$$

Все реакции получились положительными, следовательно, направления их на рисунке показаны правильно.

Проверка:

$$\Sigma m_C = 0; 2 \cdot 6 \cdot 3 + 1 \cdot 2 - 8,5 \cdot 4 - 1 \cdot 4 = 0; 0 = 0.$$

Значения внутренних силовых факторов в текущих и характерных сечениях даны в табл. 7.2.

По данным, приведенным в табл. 7.2, построены эпюры  $N_z$ ,  $Q_y$  и  $M_x$  (рис. 7.12, б, в и г).

Эпюру  $Q_y$  откладываем по направлению внешней силы, действующей на левую отсеченную часть рамы, и противоположно направлению внешней силы, действующей на правую отсеченную часть.



Таблица 7.2

Номер участка	Пределы изменения координаты $z$	Значения величин		
		$N_{z, \tau}$	$Q_{y, \tau}$	$M_{x, \tau} \cdot м$
I	$0 < z_1 < 4 м$	-3,5	0	0
II	$0 < z_2 < 4 м$ $z_2 = 0$ $z_2 = 4 м$ $z_2 = 1,75 м$	0	$3,5 - 2z_2$ 3,5 -4,5 0	$3,5z_2 - z_2^2$ 0 -2 3,06
III	$0 < z_3 < 2 м$ $z_3 = 0$ $z_3 = 2 м$	0	$2z_3$ 0 4	$-z_3^2$ 0 -4
IV	$0 < z_4 < 2 м$	-8,5	0	2
V	$0 < z_5 < 2 м$ $z_5 = 0$ $z_5 = 2 м$	-8,5	-1	$z_5$ 0 2

Эпюра  $M_x$  построена на сжатых волокнах. На втором участке в сечении  $C$  сжаты верхние волокна, а в сечении  $D$  — нижние, так как по величине изгибающий момент в этом сечении от полной реакции меньше момента от равномерно распределенной нагрузки.

Для проверки правильности построенных эпюр можно использовать следующее положение: любой узел, вырезанный из нагруженной рамы, должен находиться в равновесии под действием сил и моментов, заменяющих действие на него отброшенных элементов.

Так, например, вырежем узел  $D$  рассмотренной рамы и заменим действие отброшенных элементов соответствующими усилиями, взятыми из построенных эпюр (рис. 7.13).

Уравнения равновесия для сил, действующих на узел  $D$ :

$$\begin{aligned} \sum u_i &= 0; \quad 0 = 0; \\ \sum v_i &= 0; \quad 8,5 - 4,5 - 4 = 0; \\ \sum m_D &= 0; \quad 4 - 2 - 2 = 0, \end{aligned}$$

т. е. все уравнения равновесия удовлетворяются.

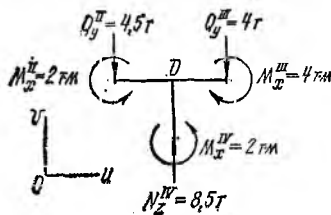


РИС. 7.13

В уравнение моментов моменты поперечных сил не включены, так как плечи их относительно точки  $D$  бесконечно малы. Если к рассматриваемому узлу приложены внешние сосредоточенные силы и моменты, то они также входят в уравнения равновесия.

В процессе построения эпюр для рам, как и для балок, контролем может служить соблюдение дифференциальных и интегральных зависимостей между  $q$ ,  $Q_y$  и  $M_x$ .

### § 7.5. НАПРЯЖЕНИЯ ПРИ ИЗГИБЕ

#### Принимаемые допущения

При определении напряжений при изгибе принимают следующие основные допущения:

- 1) поперечные сечения, плоские до деформации, остаются плоскими и после деформации;
- 2) продольные соседние волокна балки не давят друг на друга, т. е. они испытывают только простое растяжение или сжатие;
- 3) напряжения и деформации в балке связаны между собой законом Гука.

#### Чистый изгиб

При чистом изгибе в поперечных сечениях балки возникают только нормальные напряжения  $\sigma_z$  (рис. 7.14, а), которые определяются по формуле

$$\sigma_z = \frac{M_x y}{J_x}, \quad (7.7)$$

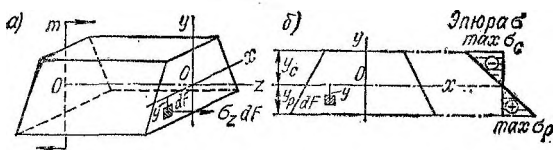


РИС. 7.14

где  $\sigma_z$  — нормальное напряжение в произвольной точке рассматриваемого поперечного сечения;

$M_x$  — изгибающий момент в исследуемом поперечном сечении;

$y$  — расстояние от нейтральной оси до данной точки;

$J_x$  — момент инерции поперечного сечения относительно нейтральной оси.

Нейтральная ось проходит через центр тяжести поперечного сечения и перпендикулярна к силовой плоскости.

Формула (7.7) позволяет определить абсолютную величину нормального напряжения  $\sigma_z$ , а его знак устанавливают в зависимости от того, в сжатой или растянутой зоне находится рассматриваемая точка. Поэтому величины  $M_x$  и  $y$  берутся по абсолютным значениям.

Если же учитывать знаки изгибающего момента  $M_x$  и координаты  $y$ , то для получения нормального напряжения по величине и по знаку надо пользоваться формулой

$$\sigma_z = - \frac{M_x y}{J_x}. \quad (7.7a)$$

Как следует из формулы (7.7), нормальные напряжения  $\sigma_z$  зависят линейно от ординаты  $y$ , и по высоте сечения закон изменения нормальных напряжений (эпюра  $\sigma_z = \sigma$ ) представляет прямую линию (рис. 7.14, б).

Для сечения, несимметричного относительно нейтральной оси, наибольшие растягивающие и сжимающие (по модулю) напряжения в крайних (наиболее удаленных от нейтральной оси) точках сечения определяются по формулам:

$$\max \sigma_p = \frac{M_x y_p}{J_x} = \frac{M_x}{W_{x_p}}, \quad (7.8)$$

$$|\max \sigma_c| = \frac{M_x y_c}{J_x} = \frac{M_x}{W_{x_c}}.$$

Величины  $W_{x_p} = \frac{J_x}{y_p}$  и  $W_{x_c} = \frac{J_x}{y_c}$  зависят только от формы и размеров поперечного сечения и называются:

$W_{x_p}$  — осевой момент сопротивления сечения растяжению;

$W_{x_c}$  — осевой момент сопротивления сечения сжатию.<sup>1</sup>

Если нейтральная ось является осью симметрии сечения, то  $y_c = y_p = 0,5 h$ , и в этом случае

$$\max \sigma_p = |\max \sigma_c| = \frac{M_x \cdot 0,5h}{J_x}. \quad (7.9)$$

Величина  $W_x = \frac{J_x}{0,5h}$  называется *осевым моментом сопротивления сечения*.

#### Поперечный изгиб

При поперечном изгибе в поперечных сечениях балки возникают не только нормальные, но и касательные напряжения  $\tau_{zy}$ <sup>2</sup> (рис. 7.15, а и б).

Наличие касательных напряжений в поперечных и продольных сечениях балки нарушает закон плоских сечений, и сечения, плоские до деформации, при деформации искривляются. Но, как пока-

<sup>1</sup> Следует иметь в виду, что возможны случаи (эпюра  $M_x$  имеет участки разных знаков), когда величина  $W_{x_p}$  для одного поперечного сечения является моментом сопротивления растяжению, а для другого — сжатию.

<sup>2</sup> В зависимости от формы поперечного сечения возникают либо только напряжения  $\tau_{zy}$ , параллельные вектору поперечной силы, либо также и  $\tau_{zx}$ . Соответствующие последним внутренние силы образуют самоуравновешенную систему сил.

зывают теоретические и экспериментальные исследования, для балок, у которых  $\frac{l}{h} > 4$ , искажение поперечных сечений мало влияет на величину и распределение нормальных напряжений, и с достаточной для практики точностью нормальные напряжения при поперечном изгибе можно определять, как и при чистом изгибе, по формуле (7.7).

При расчете балок, у которых отношения длины к высоте поперечного сечения  $\frac{l}{h} < 4$ , нормальные напряжения следует определять методами теории упругости.

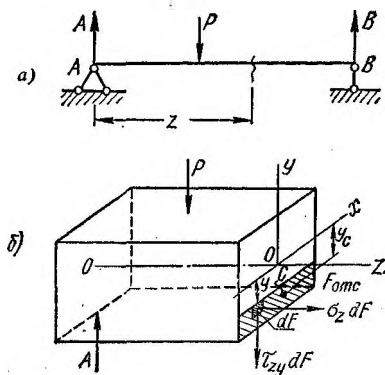


РИС. 7.15

Касательные напряжения, параллельные поперечной силе, определяются по формуле Д. И. Журавского:

$$\tau = \tau_{zy} = \frac{Q_y S_x^{\text{отс}}}{J_x b(y)}, \quad (7.10)$$

где  $\tau = \tau_{zy}$  — касательное напряжение в произвольной точке рассматриваемого поперечного сечения балки;

$Q_y$  — поперечная сила в исследуемом поперечном сечении;  
 $S_x^{\text{отс}}$  — статический момент относительно нейтральной оси  $x$  части поперечного сечения, расположенной по одну сторону от прямой, проведенной через исследуемую точку параллельно нейтральной оси;

$J_x$  — момент инерции всего поперечного сечения относительно нейтральной оси;

$b(y)$  — ширина сечения балки на уровне рассматриваемой точки (для прямоугольного сечения  $b(y) = b = \text{const}$ ).

Чем меньше отношение  $\frac{b}{h}$ , тем точнее формула (7.10). С увеличением отношения  $\frac{b}{h}$  неравномерность распределения касательных напряжений по ширине сечения балки увеличивается. Так, например, при  $\frac{b}{h} = 1$  отклонение от равномерного распределения касательных напряжений равно 12,6 %, а при  $\frac{b}{h} = 0,5$  оно падает до 3,3%.

Примечание. Формула (7.10) выведена Д. И. Журавским для балок прямоугольного сечения. Для балок других сечений полные касательные напряжения в разных точках поперечного сечения могут иметь различные направления, а в точках вблизи контура они всегда направлены по касательной к контуру.

В общем случае формула (7.10) Журавского дает, как было указано (с достаточной точностью), величину составляющей  $\tau_{zy}$  полного касательного напряжения, направленной параллельно поперечной силе  $Q_y$ . Для определения величины второй составляющей  $\tau_{zx}$ , параллельной оси  $x$ , общей формулы нет, но, как показывают специальные исследования, для сплошных сечений большей частью они невелики по сравнению с максимальными  $\tau_{zy}$ .

В отличие от нормальных напряжений распределение касательных напряжений по высоте поперечного сечения зависит от формы сечения.

В табл. 7.3 показано распределение касательных напряжений при изгибе для некоторых форм поперечных сечений.

### § 7.6. РАСЧЕТЫ НА ПРОЧНОСТЬ ПРИ ИЗГИБЕ

Условие прочности по нормальным напряжениям для балок, материал которых одинаково сопротивляется растяжению и сжатию ( $[\sigma_p] = [\sigma_c] \doteq [\sigma]$ ), имеет вид

$$\sigma_{\max} = \frac{\max M_x y_{\max}}{J_x} = \frac{\max M_x}{W_x} \leq [\sigma], \quad (7.11)$$

где  $W_x = \frac{J_x}{y_{\max}}$  — осевой момент сопротивления сечения. Если ней-

тральная линия является осью симметрии, то  $y_{\max} = \frac{h}{2}$ ;

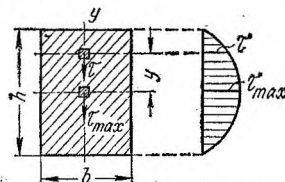
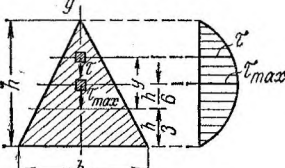
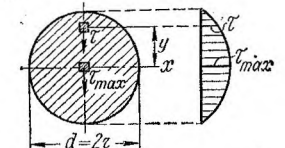
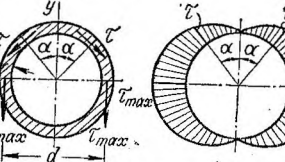
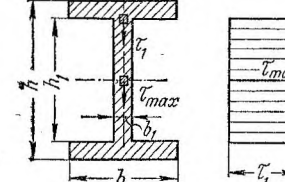
$[\sigma]$  — допускаемое нормальное напряжение, величина его берется такой же, как и при растяжении-сжатии (см. гл. 2).

Формула (7.11) используется для проверочных расчетов.

Для подбора сечения балки (проектного расчета) из условия прочности (7.11) определяют необходимую величину осевого момента сопротивления:

$$W_x \geq \frac{\max M_x}{[\sigma]}. \quad (7.12)$$

## Касательные напряжения при прямом поперечном изгибе

<p>Прямоугольник</p> 	$\tau = \frac{3}{2} \frac{Q}{F} \left[ 1 - \left( \frac{2y}{h} \right)^2 \right];$ $\tau_{\max} = \frac{3}{2} \frac{Q}{F}$
<p>Треугольник</p> 	$\tau = \frac{4}{3} \frac{Q}{bh^2} (2h - 3y) (h + 3y);$ $\tau_{\max} = \frac{3}{2} \frac{Q}{F}$
<p>Круг</p> 	$\tau = \frac{4}{3} \frac{Q}{F} \left[ 1 - \left( \frac{y}{r} \right)^2 \right];$ $\tau_{\max} = \frac{4}{3} \frac{Q}{F}$
<p>Тонкостенное кольцо</p> 	$\tau = \frac{2Q}{\pi d^2} \sin \alpha;$ $\tau_{\max} = \frac{2Q}{\pi d \delta}$
<p>Двутавр</p> 	$\tau_1 = \frac{Qb (h^2 - h_1^2)}{8b_1 J_x};$ $\tau_{\max} = \frac{Q}{8b_1 J_x} [bh^2 - (b - b_1) h_1^2],$ <p>где <math>J_x</math> — осевой момент инерции поперечного сечения относительно нейтральной оси</p>

По найденному моменту сопротивления  $W_x$ , выбрав форму поперечного сечения, находят его размеры.

Наибольший допустимый по условию прочности изгибающий момент определяется выражением

$$[M_{\max}] \leq W_x [\sigma]. \quad (7.13)$$

Имея величину  $[M_{\max}]$  и эпюру изгибающих моментов, можно определить допустимую величину нагрузки, действующей на балку.

При равенстве допустимых напряжений на растяжение или сжатие ( $[\sigma_p] = [\sigma_c]$ ) выгодно подбирать поперечные сечения балок, симметричные относительно нейтральной оси, так как в этом случае наибольшие растягивающие и наибольшие сжимающие напряжения равны по величине.

Если допустимые напряжения на растяжение и сжатие различны (для хрупких и хрупко-пластичных материалов  $[\sigma_p] < [\sigma_c]$ ), то целесообразно применять балки с поперечными сечениями, несимметричными относительно нейтральной оси, и располагать их таким образом, чтобы в сечении, где возникает максимальный по абсолютному значению изгибающий момент, наиболее удаленные от нейтральной оси точки находились в сжатой зоне.

Для балок несимметричного профиля при однозначной эпюре опасным сечением будет то, где возникает наибольший по абсолютному значению изгибающий момент.

Проверку прочности в этом случае надо производить в опасном сечении для точек, в которых возникают наибольшие растягивающие

напряжения, при  $\frac{y_c}{y_p} < \frac{[\sigma_c]}{[\sigma_p]}$  по формуле

$$\max \sigma_p = \frac{\max M_x y_p}{J_x} \leq [\sigma_p] \quad (7.14)$$

или для точек, в которых возникают наибольшие сжимающие на-

пряжения, при  $\frac{y_c}{y_p} > \frac{[\sigma_c]}{[\sigma_p]}$  по формуле

$$\max \sigma_c = \frac{\max M_x y_c}{J_x} \leq [\sigma_c], \quad (7.14a)$$

где  $y_p$  и  $y_c$  — наибольшие расстояния от нейтральной оси до крайних точек растянутой и сжатой зон сечения.

Материал балки несимметричного сечения будет использован наиболее целесообразно тогда, когда коэффициенты запаса прочности по растягивающим и сжимающим напряжениям будут равны. Для этого необходимо, чтобы

$$\frac{y_c}{y_p} = \frac{[\sigma_c]}{[\sigma_p]}.$$

В этом случае формулы (7.14) и (7.14a) равносильны.

Если эпюра изгибающих моментов имеет участки разных знаков, то необходимо произвести, кроме рассмотренной, дополнительную проверку прочности балки по наибольшему растягивающим напряжениям в поперечном сечении с наибольшим по величине моментом, знак которого противоположен знаку максимального изгибающего момента (см. пример 7.9).

В балках сплошного сечения обычно величина касательных напряжений по сравнению с нормальными невелика, и большей частью производить проверку прочности балки по касательным напряжениям нет необходимости.

В коротких балках, сильно нагруженных вблизи опор, и в балках тонкостенного профиля касательные напряжения могут иметь сравнительно большую величину, и в этом случае проверка прочности по касательным напряжениям производится по формуле

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max}}{J_x} \left( \frac{S_{0xc}}{b(y)} \right)_{\max} \leq [\tau],$$

где  $[\tau]$  — допускаемое касательное напряжение при изгибе.

Для стальных балок обычно принимают  $[\tau] \approx 0,6[\sigma]$ .

**Пример 7.6.** Для деревянной балки прямоугольного сечения, показанной на рис. 7.16, а, требуется:

1. Построить эпюры  $Q_y$  и  $M_x$ ; проверить прочность балки по нормальным и касательным напряжениям при  $[\sigma] = 110 \text{ кг/см}^2$  и  $[\tau] = 12 \text{ кг/см}^2$ .

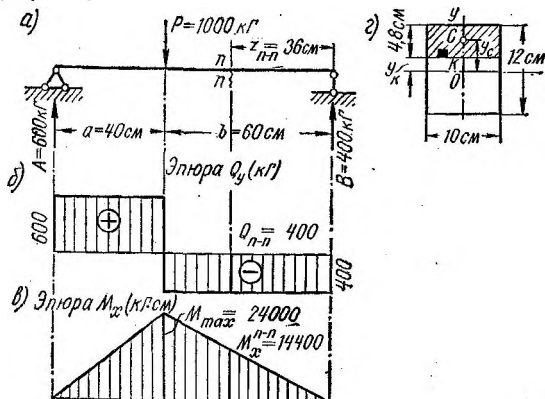


РИС. 7.16

2. Определить нормальное и касательное напряжения для точки К сечения  $n-n$ .

Решение. Из уравнений равновесия определяем опорные реакции:

$$A = \frac{Pb}{l} = \frac{1000 \cdot 60}{100} = 600 \text{ кг}; \quad B = \frac{Pa}{l} = \frac{1000 \cdot 40}{100} = 400 \text{ кг}.$$



Эпюры  $Q_y$  и  $M_x$  построены, как изложено в § 7.3 (рис. 7.16, б и в). Прочность балки по нормальным напряжениям проверяем по формуле (7.11).

В сечении под силой  $P$  изгибающий момент имеет максимальное значение  $\max M_x = 24\,000 \text{ кг} \cdot \text{см}$ .

Момент сопротивления прямоугольника относительно нейтральной оси:

$$W_x = \frac{bh^2}{6} = \frac{10 \cdot 12^2}{6} = 240 \text{ см}^3;$$

$$\sigma_{\max} = \frac{24\,000}{240} = 100 \text{ кг/см}^2 < [\sigma].$$

Прочность балки по касательным напряжениям на участке, где поперечная сила  $Q_y$  имеет наибольшее значение  $Q_{\max} = 600 \text{ кг}$ , проверяем по формуле (см. табл. 7.2)

$$\tau_{\max} = \frac{3Q_{\max}}{2bh} = \frac{3 \cdot 600}{2 \cdot 10 \cdot 12} = 7,5 \text{ кг/см}^2 < [\tau].$$

Нормальные напряжения в точке  $K$  сечения  $n-n$

$$\sigma_K^{n-n} = \frac{M_x^{n-n} \cdot y_K}{J_x}$$

Изгибающий момент в сечении  $n-n$

$$M_x^{n-n} = B \cdot z_{n-n} = 400 \cdot 36 = 14\,400 \text{ кг} \cdot \text{см}.$$

Расстояние от нейтрального слоя до точки  $K$

$$y_K = \frac{12}{2} - 4,8 = 1,2 \text{ см}.$$

Момент инерции прямоугольника относительно нейтральной оси

$$J_x = \frac{bh^3}{12} = \frac{10 \cdot 12^3}{12} = 1440 \text{ см}^4.$$

Следовательно,

$$\sigma_K^{n-n} = \frac{14\,400 \cdot 1,2}{1440} = 12 \text{ кг/см}^2.$$

Касательное напряжение в точке  $K$  (рис. 7.16, г) определяем по формуле Журавского:

$$\tau_K^{n-n} = \frac{Q_y^{n-n} \cdot S_x^{\text{отс}}}{b_{(y)} J_x}.$$

Как видно из эпюры  $Q_y$ , поперечная сила в сечении  $n-n$   $Q_y = 400 \text{ кг}$ .

Статический момент заштрихованной части сечения относительно нейтральной оси

$$S_x^{\text{отс}} = F_{\text{отс}} \cdot y_c = 10 \cdot 4,8 \cdot 3,6 = 172,8 \text{ см}^3.$$

Ширина сечения балки на уровне точки  $K$   $b_{(y)} = b = 10$  см

и

$$\tau_K^{n-n} = \frac{400 \cdot 172,8}{10 \cdot 1440} = 4,8 \text{ кг/см}^2.$$

**Пример 7.7.** Для стальной балки (рис. 7.17, а) требуется:

1. Построить эпюры  $Q_y$  и  $M_x$ .
2. Подобрать двутавровое сечение.
3. Определить в балке  $\sigma_{\max}$  в сечении, опасном по нормальным напряжениям, и  $\tau_{\max}$  в сечении, опасном по касательным напряжениям.

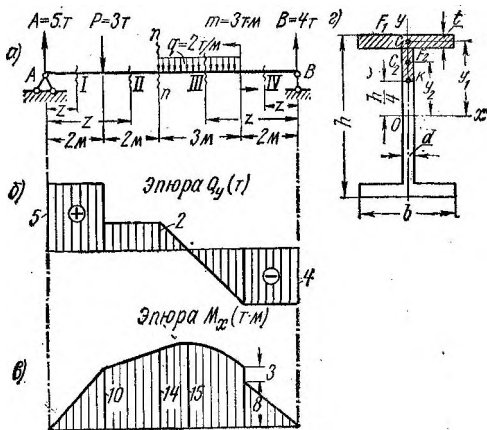


РИС. 7.17

4. Найти величины нормального и касательного напряжений ( $\sigma_K^{n-n}$  и  $\tau_K^{n-n}$ ) в точке  $K$  поперечного сечения  $n-n$  балки.

Материал балки — сталь Ст. 3; допускаемые напряжения:

$$[\sigma] = 1600 \text{ кг/см}^2 \text{ и } [\tau] = 1000 \text{ кг/см}^2.$$

**Решение.**

1. Определяем опорные реакции:

$$\Sigma m_B = 0; -A \cdot 9 + 3 \cdot 7 + 2 \cdot 3 \cdot 3,5 + 3 = 0; A = 5 \text{ т.}$$

$$\Sigma m_A = 0; -3 \cdot 2 - 2 \cdot 3 \cdot 5,5 + 3 + B \cdot 9 = 0; B = 4 \text{ т.}$$

Проверка:  $\Sigma Y = 0; 5 - 3 - 2 \cdot 3 + 4 = 0.$

Для определения  $Q_y$  и  $M_x$  на участках I и II удобно рассматривать левую часть балки, а на участках III и IV — правую. Эпюры  $Q_y$  и  $M_x$  представлены на рис. 7.17, б, в.

2. Определяем требуемый момент сопротивления поперечного сечения балки:

$$W_x = \frac{\max M_x}{[\sigma]} = \frac{15 \cdot 10^5}{1600} = 938 \text{ см}^3.$$

По таблице сортамента принимаем двутавр № 40, для которого  $W_x = 947 \text{ см}^3$ ;  $b = 155 \text{ мм}$ ;  $t = 13 \text{ мм}$ ;  $d = 8 \text{ мм}$ ;  $J_x = 18\,930 \text{ см}^4$ .

3. Определяем максимальное нормальное напряжение в сечении, где возникает наибольший изгибающий момент:

$$\sigma_{\max} = \frac{\max M_x}{W_x} = \frac{15 \cdot 10^5}{947} = 1584 \text{ кг/см}^2.$$

Балка недогружена на 1%.

Определяем максимальные касательные напряжения в балке, которые возникают по ее нейтральному слою на первом участке, где поперечная сила имеет наибольшую величину:

$$\tau_{\max} = \frac{Q_y \cdot S_x^{\text{отс}}}{b_{(y)} \cdot J_x} = \frac{5000 \cdot 540}{0,8 \cdot 18\,930} = 178 \text{ кг/см}^2 < [\tau].$$

Величина статического момента полусечения двутавра относительно нейтральной оси  $S_x^{\text{отс}} = 540 \text{ см}^3$ , так же как и величины  $J_x$  и  $b_{(y)}$  взяты из ГОСТ 8239—56\*.

4. Нормальное напряжение в точке  $K$  сечения  $n-n$  (рис. 7.17, г):

$$\sigma_K^{n-n} = \frac{M_x^{n-n} y_K}{J_x} = \frac{14 \cdot 10^5 \cdot 10}{18\,930} = 741 \text{ кг/см}^2.$$

Касательное напряжение в точке  $K$  сечения  $n-n$ :

$$\tau_K^{n-n} = \frac{Q_y^{n-n} \cdot S_x^{\text{отс}}}{b_{(y)} \cdot J_x} = \frac{2000 \cdot 490}{0,8 \cdot 18\,930} = 65 \text{ кг/см}^2,$$

где

$$S_y^{\text{отс}} = F_1 y_1 + F_2 y_2 = 15,5 \cdot 1,3 \cdot 19,35 + 0,8 \cdot 8,7 \cdot 14,35 = 490 \text{ см}^3.$$

**Пример 7.8.** Для стальной балки кольцевого поперечного сечения (рис. 7.18, а) построить эпюры  $Q_y$  и  $M_x$  и определить допускаемую величину максимальной интенсивности ( $q$ ) нагрузки, распределенной по закону треугольника, если допускаемое напряжение  $[\sigma] = 1600 \text{ кг/см}^2$ .

**Решение.** Для определения опорных реакций заменим распределенную нагрузку сосредоточенной силой  $\frac{ql}{2}$ , приложенной в центре тяжести треугольника:

$$\sum m_B = 0; \quad -Al + \frac{ql}{2} \cdot \frac{l}{3} = 0; \quad A = \frac{ql}{6};$$

$$\sum m_A = 0; \quad -\frac{ql}{2} \cdot \frac{2l}{3} + Bl = 0; \quad B = \frac{ql}{3}.$$

Проверка:  $\Sigma Y = 0$ ;  $A + B - \frac{ql}{2} = 0$ ;  $\frac{1}{6}ql + \frac{1}{3}ql - \frac{1}{2}ql = 0$ .

Проводим поперечное сечение на произвольном расстоянии  $z$  от опоры  $A$  и, рассматривая левую часть балки, составляем выражения для  $Q_y$  и  $M_x$ , заменив треугольную нагрузку с наибольшей интенсивностью  $\frac{q}{l}z$  равнодействующей силой  $\frac{1}{2} \cdot \frac{q}{l} \cdot z \cdot z$ , приложенной в центре тяжести  $C_1$  треугольника:

$$Q_y = A - \frac{qz^2}{2l} = \frac{ql}{6} - \frac{qz^2}{2l} = \frac{q}{6l}(l^2 - 3z^2); \quad (a)$$

$$M_x = Az - \frac{qz^2}{2l} \cdot \frac{z}{3} = \frac{ql}{6}z - \frac{qz^3}{6l} = \frac{qz}{6l}(l^2 - z^2). \quad (б)$$

Как следует из полученных выражений (а) и (б), эпюра  $Q_y$  представляет собой квадратную, а эпюра  $M_x$  — кубическую параболы.

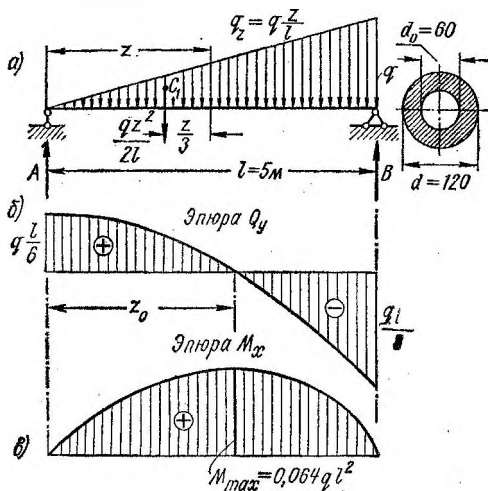


РИС. 7.18

Приравняв правую часть выражения (а) нулю, вычислим координату сечения, где поперечная сила равна нулю, а изгибающий момент имеет максимальное значение:

$$\frac{q}{6l}(l^2 - 3z_0^2) = 0; \quad z_0 = \frac{l}{\sqrt{3}} \approx 0,577l.$$

Подставив полученное значение  $z_0$  в уравнение (б), найдем

$$M_{\max} = \frac{q}{6l} \frac{l}{\sqrt{3}} \left[ l^2 - \left( \frac{l}{\sqrt{3}} \right)^2 \right] = \frac{ql^2}{9\sqrt{3}} \approx 0,064ql^2.$$

Эпюры  $Q_y$  и  $M_x$  показаны на рис. 7.18, б и в.

Величина наибольшего допускаемого по условию прочности изгибающего момента определяется по формуле

$$[M_{\max}] = W_x [\sigma] = \frac{\pi d^3}{32} (1 - c^4) [\sigma].$$

Для кругового кольца

$$W_x = \frac{\pi d^3}{32} \left[ 1 - \left( \frac{d_0}{d} \right)^4 \right] = \frac{\pi d^3}{32} (1 - c^4).$$

С другой стороны, как следует из эпюры,

$$[M_{\max}] = 0,064 [q] l^2,$$

следовательно,

$$0,064 [q] l^2 = \frac{\pi d^3}{32} (1 - c^4) [\sigma]$$

и

$$[q] = \frac{\pi d^3 (1 - c^4) [\sigma]}{32 \cdot 0,064 l^2} = \frac{3,14 \cdot 12^3 (1 - 0,5^4) \cdot 1600}{32 \cdot 0,064 \cdot 500^2} = 16 \text{ кг/см.}$$

**Пример 7.9.** Проверить прочность чугунной балки (рис. 7.19, а), предварительно выбрав рациональное расположение сечения, если

$$[\sigma_p] = 400 \text{ кг/см}^2 \text{ и } [\sigma_c] = 1200 \text{ кг/см}^2.$$

**Решение.** На рис. 7.19, б показана эпюра  $M_x$  для заданной балки.

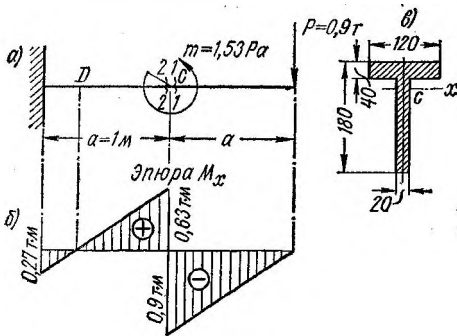


РИС. 7.19

Наибольший (по абсолютному значению) изгибающий момент, как следует из эпюры  $M_x$ , будет в сечении 1—1, расположенном бесконечно близко справа от сечения С:

$$M_{1-1} = 0,9 \text{ т} \cdot \text{м.}$$

В этом сечении сжатые волокна находятся внизу, и рациональное расположение сечения балки показано на рис. 7.19, в. При таком

расположении сечения наиболее удаленные от нейтральной линии точки сечения находятся в сжатой зоне.

Определим положение центра тяжести заданного сечения (рис. 7.20, а):

$$y_c = \frac{S_u}{F} = \frac{F_1 \cdot v_1 + F_2 \cdot v_2}{F_1 + F_2} = \frac{2 \cdot 14 \cdot 7 + 12 \cdot 4 \cdot 16}{28 + 48} = 12,7 \text{ см}$$

и

$$y_p = y_c = 12,7 \text{ см, а } y_p = 18 - 12,7 = 5,3 \text{ см.}$$

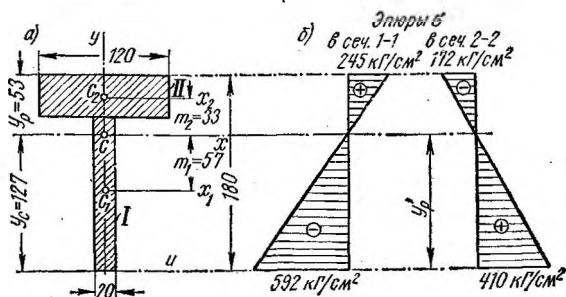


РИС. 7.20

Вычисляем величину момента инерции сечения относительно нейтральной оси:

$$\begin{aligned} J_x &= J_x^I + J_x^{II} = J_{x_1}^I + F_1 \cdot m_1^2 + J_{x_2}^{II} + F_2 \cdot m_2^2 = \\ &= \frac{b_1 h_1^3}{12} + F_1 \cdot m_1^2 + \frac{b_2 h_2^3}{12} + F_2 \cdot m_2^2. \end{aligned}$$

Подставив числовые значения, получим

$$J_x = \frac{2 \cdot 14^3}{12} + 28 \cdot 5,7^2 + \frac{12 \cdot 4^3}{12} + 48 \cdot 3,3^2 = 1950 \text{ см}^4.$$

В рассматриваемом примере

$$\frac{y_c}{y_p} = \frac{12,7}{5,3} \approx 2,4, \text{ а } \frac{[\sigma_c]}{[\sigma_p]} = \frac{1200}{400} = 3,$$

следовательно,

$$\frac{y_c}{y_p} < \frac{[\sigma_c]}{[\sigma_p]},$$

и проверку прочности производим по наибольшим растягивающим напряжениям по формуле (7.14):

$$\max \sigma_p = \frac{\max M_x \cdot y_p}{J_x} = \frac{0,9 \cdot 10^5 \cdot 5,3}{1950} = 245 \text{ кг/см}^2 \leq [\sigma_p].$$

На участке  $CD$  балки эпюра изгибающих моментов имеет знак, противоположный знаку максимального изгибающего момента. Поэтому необходимо проверить прочность балки по наибольшим растягивающим напряжениям на этом участке в сечении 2—2, бесконечно близком слева от сечения  $C$ , где момент имеет наибольшую величину  $M_{2-2} = 0,63 \text{ т} \cdot \text{м}$  и наиболее удаленные точки находятся в растянутой зоне:

$$\max \sigma_p = \frac{M_{2-2} \cdot y_p'}{J_x} = \frac{0,63 \cdot 10^5 \cdot 12,7}{1950} = 410 \text{ кг/см}^2 > [\sigma_p],$$

где  $y_p' = y_c$  (см. рис. 7.20).

Перенапряжение составляет

$$\frac{410 - 400}{400} \cdot 100 = 2,5 \%,$$

что является допустимым, и прочность балки можно считать достаточной.

Таким образом, опасным оказалось сечение непосредственно слева от сечения  $C$ , хотя величина изгибающего момента в этом сечении не является максимальной.

Эпюры нормальных напряжений для исследуемых сечений 1—1 и 2—2 показаны на рис. 7.20, б.

Если тавр расположить полкой вниз, то в этом случае перенапряжение для растянутых волокон в опасном сечении составит около 50%.

## § 7.7. ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ПРИ ПРЯМОМ ИЗГИБЕ

### Основные понятия

Под действием внешних сил, вызывающих прямой изгиб балки, ее первоначально прямая ось искривляется, превращаясь в кривую линию, которая называется *изогнутой осью* или *упругой линией балки* (рис. 7.21).

Вследствие искривления оси балки центр тяжести ее поперечного сечения (точка  $C$ ) получает линейное перемещение перпендикулярно к оси недеформированной балки, которое называется *прогибом (y) сечения*, а поперечное сечение, оставаясь плоским и нормальным к изогнутой оси балки, поворачивается вокруг нейтральной оси на угол  $\theta$ , который называется *углом поворота сечения*.

Максимальный прогиб называют *стрелой прогиба* и обозначают  $f$ . Центры тяжести поперечных сечений при деформации балки получают линейные перемещения как перпендикулярно, так и параллельно к ее оси, но последние при действии на балку только сил, перпендикулярных к ее оси, очень малы по сравнению с прогибами, и ими при расчетах пренебрегают.

Угол наклона к оси  $z$  касательной к изогнутой оси в любой точке равен углу поворота поперечного сечения, проходящего через

эту точку. Вследствие этого между углом поворота и прогибом существует следующая зависимость:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{dy}{dz}.$$

Для балок угол  $\theta$  обычно не превышает  $1^\circ$ , поэтому  $\operatorname{tg} \theta \approx \theta$  и

$$\theta = \frac{dy}{dz}. \quad (7.15)$$

Влияние поперечных сил на перемещения при изгибе невелико и зависит главным образом от отношения пролета балки  $l$  к высоте

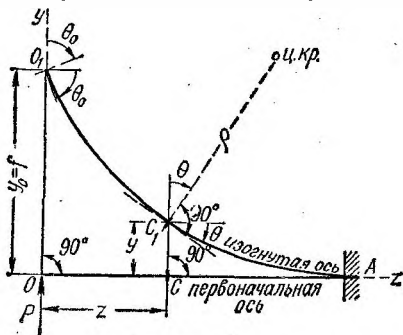


РИС. 7.21

$h$  ее поперечного сечения. С увеличением отношения  $\frac{l}{h}$  это влияние уменьшается. Так, например, для балки прямоугольного сечения при  $\frac{l}{h} = 10$  погрешность в определении прогиба без учета влияния поперечных сил составляет не больше 3% от прогиба, обусловленного изгибом. При  $\frac{l}{h} \geq 10$  влияние поперечных сил на перемещения не учитывают.

#### Дифференциальное уравнение упругой линии и его интегрирование

При чистом изгибе кривизна изогнутой оси определяется по формуле

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_x}{EJ_x}, \quad (7.16)$$

где  $EJ_x$  — жесткость поперечного сечения балки при изгибе. Эта же формула верна и при поперечном изгибе, если пренебречь влиянием поперечных сил.

Если ось  $y$  направлена вниз, правая часть равенства (7.16) берется со знаком минус.



При малых перемещениях упругая линия представляет собой весьма пологую кривую, и с достаточной точностью можно принять, что кривизна упругой линии равна второй производной от ее уравнения  $y = f(z)$ :

$$\frac{1}{\rho} \approx \frac{d^2 y}{dz^2} = y'' \quad (7.16a)$$

Таким образом, приближенное дифференциальное уравнение, изогнутой оси имеет вид

$$y'' = \frac{M_x}{EJ_x} \quad (7.17)$$

Практически уравнением (7.17) можно пользоваться, если  $\frac{y_{\max}}{l} \leq 0,05$ .

После первого интегрирования уравнения (7.17) получается уравнение углов поворота поперечных сечений (углов наклона касательных к упругой линии)

$$\theta = y' = \frac{1}{EJ_x} \left[ \int M_x dz + C \right] \quad (7.18)$$

после второго интегрирования — уравнение прогибов

$$y = \frac{1}{EJ_x} \left[ \int dz \int M_x dz + Cz + D \right] \quad (7.19)$$

В полученных уравнениях  $C$  и  $D$  — постоянные интегрирования, которые определяются из условий на опорах балки и на границах ее участков.

**Пример 7.10.** Для консоли, нагруженной, как показано на рис. 7.22, составить уравнение углов поворота и уравнение упругой линии и определить наибольшие по абсолютной величине значения угла поворота и прогиба.

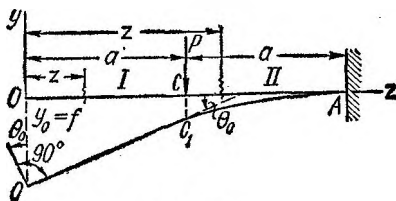


РИС. 7.22

**Решение.** Рассматриваемая балка имеет два участка:  $OC$  и  $CA$ , в пределах каждого из которых справедливо свое уравнение изгибающего момента.

Для первого участка ( $0 \leq z \leq a$ )

$$M_x^I = 0$$

и дифференциальное уравнение изогнутой оси

$$y_1'' = 0,$$

а уравнения углов поворота и прогибов [см. выражения (7.18) и (7.19)] имеют вид:

$$\theta_1 = y_1' = \frac{1}{EJ_x} C_1; \quad (a)$$

$$y_1 = \frac{1}{EJ_x} [C_1 z + D_1]. \quad (б)$$

Аналогично для второго участка ( $a \leq z \leq 2a$ )

$$M_x^{II} = -P(z-a);$$

$$y_2'' = -\frac{P}{EJ_x}(z-a);$$

$$\theta_2 = y_2' = \frac{1}{EJ_x} \left[ -\int P(z-a) dz + C_2 \right]; \quad \theta_2 = \frac{1}{EJ_x} \left[ -\frac{P(z-a)^2}{2} + C_2 \right]; \quad (в)$$

$$y_2 = \frac{1}{EJ_x} \left[ -\int \frac{P(z-a)^2}{2} dz + C_2 z + D_2 \right];$$

$$y_2 = \frac{1}{EJ_x} \left[ -\frac{P(z-a)^3}{6} + C_2 z + D_2 \right]. \quad (г)$$

Для определения полученных четырех постоянных интегрирования  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $D_1$  и  $D_2$  имеем четыре граничных условия.

Изогнутая ось балки представляет собой непрерывную и плавную линию. Отсюда следует, что прогибы и углы поворота для двух примыкающих участков в сечении  $C$  равны, что дает следующие два условия:

$$1) z = a; y_1' = y_2' \text{ или } \theta_1 = \theta_2;$$

$$2) z = a; y_1 = y_2.$$

В сечении  $A$  второго участка вследствие жесткого защемления балки отсутствуют прогиб и угол поворота. Это дает еще два условия:

$$3) z = 2a; y_2' = \theta_2 = 0;$$

$$4) z = 2a; y_2 = 0.$$

Из уравнений (а) и (в) и условия 1 получим

$$C_1 = C_2, \quad (д)$$

а из уравнений (б) и (г) и условия 2, учитывая, что  $C_1 = C_2$ , имеем

$$D_1 = D_2, \quad (е)$$

Использование условия 3 и выражения (в) приводит к уравнению

$$0 = \frac{1}{EJ_x} \left[ -\frac{P(2a-a)^2}{2} + C_2 \right],$$

из которого следует:

$$C_2 = \frac{Pa^2}{2}. \quad (\text{ж})$$

Применяя условие 4 к уравнению (г), получаем

$$0 = \frac{1}{EJ_x} \left[ -\frac{P(2a-a)^3}{6} + \frac{Pa^2}{2} 2a + D_2 \right],$$

откуда

$$D_2 = -\frac{5}{6} Pa^3. \quad (\text{з})$$

Подставив значения произвольных постоянных в уравнения (а), (б), (в) и (г), получим уравнения углов поворота и прогибов:

на первом участке

$$\theta_1 = \frac{Pa^2}{2EJ_x} = \text{const}; \quad (\text{I})$$

$$y_1 = \frac{1}{EJ_x} \left[ \frac{Pa^2}{2} z - \frac{5}{6} Pa^3 \right]; \quad (\text{I}')$$

на втором участке

$$\theta_2 = \frac{1}{EJ_x} \left[ -\frac{P(z-a)^2}{6} + \frac{Pa^2}{2} \right]; \quad (\text{II})$$

$$y_2 = \frac{1}{EJ_x} \left[ -\frac{P(z-a)^3}{6} + \frac{Pa^2}{2} z - \frac{5}{6} Pa^3 \right]. \quad (\text{II}')$$

Как следует из уравнений (I') и (II'), упругая линия на I участке представляет собой прямую линию, а на II — кубическую параболу.

Угловые и линейные перемещения любого поперечного сечения в пределах I участка определяются из уравнений (I) и (I'), а в пределах II — из уравнений (II) и (II') подстановкой в соответствующее уравнение значения координаты  $z$  сечения, перемещение которого надо определить.

Наибольший прогиб в точке  $O$  (начало координат) определяется из уравнения (I') при  $z = 0$ :

$$y_0 = y_{\text{max}} = -\frac{5Pa^3}{6EJ_x}.$$

Знак минус указывает, что точка  $O$  перемещается в сторону, обратную направлению оси  $y$ , т. е. вниз.

Наибольший угол поворота в любом сечении первого участка

$$\theta_{\text{max}} = \theta_1 = \frac{Pa^2}{2EJ_x}.$$

Знак плюс означает, что сечение поворачивается против часовой стрелки.

## § 7.8. ОБОБЩЕННОЕ УРАВНЕНИЕ УПРУГОЙ ЛИНИИ

Определение перемещений методом непосредственного интегрирования дифференциального уравнения изогнутой оси при нескольких участках приводит к громоздким вычислениям, так как для каждого участка необходимо составлять выражение изгибающего момента, дважды интегрировать дифференциальное уравнение изогнутой оси и при  $n$  участках определять  $2n$  постоянных интегрирования.

Значительно удобнее определение перемещений при помощи обобщенного уравнения упругой линии, которое получается в результате использования специальных приемов рационального интегрирования приближенного дифференциального уравнения упругой линии.

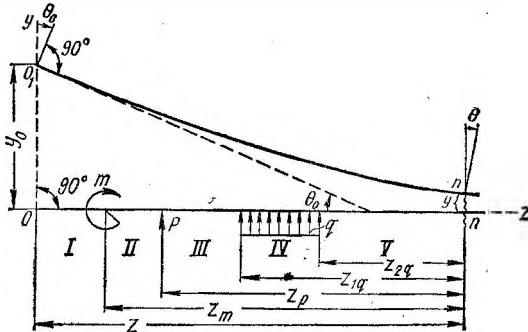


РИС. 7.23

Для балки постоянного поперечного сечения, находящейся в равновесии под действием приложенных нагрузок и опорных реакций, угол поворота и прогиб сечения  $n-n$  (рис. 7.23) определяются по формулам:

$$EJy = EJy_0 + EJ\theta_0 z \Big|_I + \frac{mz_m^2}{2} \Big|_{II} + \frac{Pz_p^3}{6} \Big|_{III} + \frac{qz_{1q}^4}{24} \Big|_{IV} - \frac{qz_{2q}^4}{24} \Big|_V \quad (7.20)$$

$$EJ\theta = EJ\theta_0 \Big|_I + mz_m \Big|_{II} + \frac{Pz_p^2}{2} \Big|_{III} + \frac{qz_{1q}^2}{6} \Big|_{IV} - \frac{qz_{2q}^2}{6} \Big|_V \quad (7.21)$$

Уравнения (7.20) и (7.21) называются *универсальными* или *обобщенными уравнениями упругой линии и углов поворота*.

В этих уравнениях:

$\theta$  и  $y$  — угол поворота и прогиб сечения, находящегося на расстоянии  $z$  от начала координат;

$\theta_0$  и  $y_0$  — так называемые начальные параметры: угол поворота и прогиб крайнего сечения балки, в котором помещено начало координат.

На рис. 7.23 начало координат расположено на левом конце балки и ось  $z$  направлена вправо, можно также начало координат располагать на правом конце балки, направив ось  $z$  влево. Расположить начало координат в каком-либо промежуточном сечении не следует.

Значения начальных параметров  $\theta_0$  и  $y_0$  определяются из граничных условий на опорах балки.

Если начало координат совпадает с защемлением балки (рис. 7.24, а), то оба начальных параметра  $\theta_0$  и  $y_0$  равны нулю.

При совпадении начала координат с шарнирной опорой (рис. 7.24, б)  $y_0 = y_A = 0$ , а значение  $\theta_0$  определяется из условия, что прогиб на опоре  $B$  равен нулю ( $y_B = 0$ ).

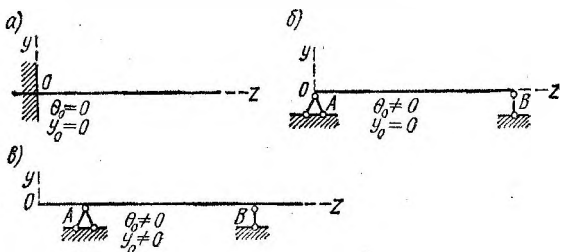


РИС. 7.24

Если начало координат совпадает со свободным концом балки (рис. 7.24, в), то оба начальных параметра заранее неизвестны и их значения определяются из условий равенства нулю прогибов на опорах  $A$  и  $B$  ( $y_A = 0$ ;  $y_B = 0$ ).

Подставив найденные значения начальных параметров  $\theta_0$  и  $y_0$  в универсальные уравнения (7.20) и (7.21), можно определить прогиб и угол поворота любого поперечного сечения; при этом в соответствующее уравнение должны быть включены только те нагрузки, которые приложены к балке между рассматриваемым сечением и началом координат. Нагрузки, расположенные по другую сторону от сечения, исключаются. Так, например, для определения прогибов и углов поворота сечений в пределах  $n$ -го участка балки в уравнениях (7.20) и (7.21) сохраняются слагаемые, расположенные слева от вертикальной черты с индексом  $n$ . Для балки по рис. 7.23  $n$  может принимать значения I, II, III, IV и V.

Силы (моменты)  $m$ ,  $p$  и  $q$  подставляют в универсальные уравнения с учетом их знаков: со знаком плюс, если они вызывают в рассматриваемом сечении положительный изгибающий момент (рис. 7.25, а), и со знаком минус — отрицательный изгибающий момент (рис. 7.25, б).

Если данный вид нагрузки ( $m$ ,  $p$  или  $q$ ) повторяется на балке несколько раз, то и соответствующие члены уравнений должны быть повторены столько же раз, а при отсутствии того или иного вида нагрузки соответствующий ему член в универсальных уравнениях должен быть исключен.

Расчетные данные для однопролетных статически

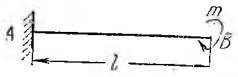
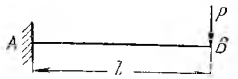
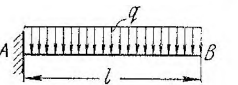
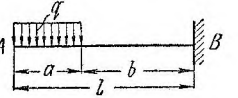
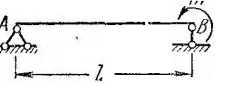
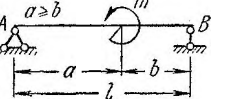
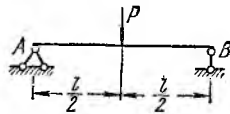
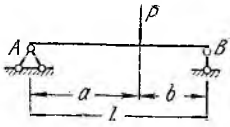
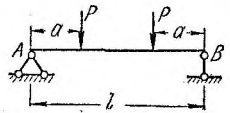
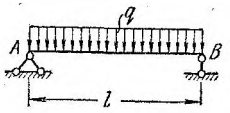
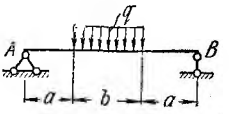
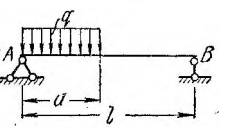
№ п.п.	Схема нагружения балки	Расчетное значение $M_x$ при $z$	$EJy_{\max}$
1		$m$	$\begin{matrix} \text{от} \\ z=0 \\ \text{до} \\ z=l \end{matrix} -\frac{ml^2}{2}$
2		$Pl$	$0$
3		$\frac{ql^2}{2}$	$0$
4		$\frac{qa(l+b)}{2}$	$l$
5		$m$	$l$
6		$\frac{ma}{l}$	$a$

Таблица 7.4

определимых балок постоянного сечения

при $z$	$EJ^0_A$	$EJ^0_B$
$l$	0	$-ml$
$l$	0	$-\frac{Pl^2}{2}$
$l$	0	$-\frac{ql^3}{6}$
0	$\frac{ql^3}{6} \left(1 - \frac{b^3}{l^3}\right)$	0
$\frac{l}{\sqrt{3}}$	$-\frac{ml}{6}$	$\frac{ml}{3}$
$l \sqrt{2 \frac{a}{l} - \frac{2}{3} - \frac{a^2}{l^2}}$	$-\frac{ma}{6} \left(6 - \frac{2l}{a} - \frac{3a}{l}\right)$	$-\frac{mb}{6} \left(6 - \frac{2l}{b} - \frac{3b}{l}\right)$

№ п.п.	Схема нагружения балки	Расчетное значение $M_x$ при $z$	$EJy_{max}$
7		$\frac{Pl}{4}$ $\frac{l}{2}$	$-\frac{Pl^3}{48}$
8		$\frac{Pab}{l}$ $a$	$-\frac{Pb}{3l} \left( \frac{a^2 + 2ab}{3} \right)^{\frac{3}{2}}$
9		$Pa$ от $z = a$ до $z = l - a$	$-\frac{Pa}{24} (3l^2 - 4a^2)$
10		$\frac{ql^2}{8}$ $\frac{l}{2}$	$-\frac{5ql^4}{384}$
11		$\frac{q}{8} (l^2 - 4a^2)$ $\frac{l}{2}$	$-\frac{ql^4}{24} \left( \frac{5}{16} - \frac{3a^2}{2l^2} + \frac{a^4}{l^4} \right)$
12		$\frac{q}{8} \left[ \frac{a}{l} \times \right.$ $\left. \times (2l - a) \right]^2$ $a \left( 1 - \frac{a}{2l} \right)$	$\frac{qa^3b}{24} \left( 4 - \frac{3a}{l} \right)^*$

Примечание. Начало координат совпадает с левым концом балки (точка А).  
Большой прогиб, умноженный на  $EJ$ , что отмечено звездочкой (\*).

Продолжение табл. 7.4

при $z$	$EJ^0_A$	$EJy_B$
$\frac{l}{2}$	$-\frac{Pl^2}{16}$	$\frac{Pl^2}{16}$
$\sqrt{\frac{a^2 + 2ab}{3}}$	$-\frac{Pab(l+b)}{6l}$	$\frac{Pab(l+a)}{6l}$
$\frac{l}{2}$	$-\frac{Pa(l-a)}{2}$	$\frac{Pa(l-a)}{2}$
$\frac{l}{2}$	$-\frac{ql^3}{24}$	$\frac{ql^3}{24}$
$\frac{l}{2}$	$-\frac{qb(l^2 + 2al - 2a^2)}{24}$	$\frac{qb(l^2 + 2al - 2a^2)}{24}$
$a$	$-\frac{qa^2l}{24} \left( 2 - \frac{a}{l} \right)^2$	$\frac{qa^2l}{24} \left( 2 - \frac{a}{l} \right)^2$

Ось  $y$  направлена вверх, а ось  $z$  — вправо. Для балки (случай 12) указан не наи-

Универсальные уравнения можно распространить на нагрузки, распределенные по закону наклонной прямой и параболы любой степени, если в них добавить соответствующие члены (см. работы [43, 51, 55, 71]).

Универсальные уравнения (7.20) и (7.21) можно также применять для определения перемещений в балках ступенчато-переменного сечения, если последние предварительно преобразованы в эквивалентные им в деформационном отношении балки постоянной жесткости по методу, предложенному проф. Б. Н. Жемочкиным (см. работу [43]).

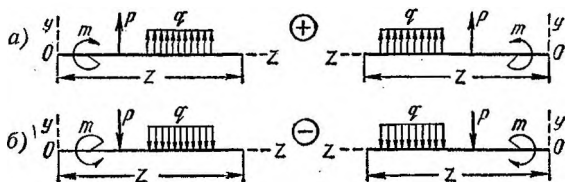


РИС. 7.25

В табл. 7.4 приведены значения  $\theta$  и  $y$  в характерных сечениях некоторых часто встречающихся балок.

**Пример 7.11.** Для консоли  $AB$ , нагруженной, как показано на рис. 7.26, написать универсальные уравнения упругой линии и углов поворота сечений и определить прогибы и углы поворота сечений  $B$  и  $C$ .

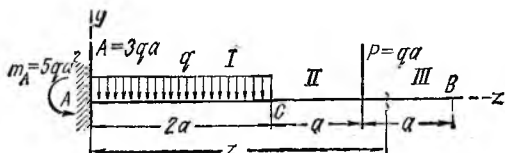


РИС. 7.26

**Решение.** Определяем опорную реакцию и опорный момент, возникающие в защемлении:

$$A = 3qa; \quad m_A = 5qa^2.$$

Начало координат выбираем в защемлении, тогда начальные параметры  $\theta_0 = 0$  и  $y_0 = 0$ .

Проведем произвольное поперечное сечение на последнем, третьем, участке балки и запишем универсальные уравнения перемещений для нашего случая:

$$EJy = -\frac{m_A z^2}{2} + \frac{Az^3}{6} - \frac{gz^4}{24} + \frac{gz^2 a}{24} - \frac{Pz^3}{6}$$



и

$$EJ\theta = -mz_m + \frac{Az_A^2}{2} + \frac{qz_{1q}^2}{6} + \frac{gz_{2q}}{6} - \frac{Pz_P^2}{2};$$

$$EJy = -\frac{5qa^3z^2}{2} + \frac{3qaz^3}{6} - \frac{qz^4}{24} \Big|_I + \frac{q(z-2a)^4}{24} \Big|_{II} - \frac{qa(z-3a)^3}{6} \Big|_{III}; \quad (A)$$

$$EJ\theta = -5qa^2z + \frac{3qaz^2}{2} - \frac{qz^3}{6} \Big|_I + \frac{q(z-2a)^3}{6} \Big|_{II} - \frac{qa(z-3a)^2}{2} \Big|_{III}. \quad (B)$$

Для свободного конца балки (сечения  $B$ ), подставив в уравнения (A) и (B)  $z = 4a$ , получим

$$EJy_B = -40qa^4 + 32qa^4 - \frac{64qa^4}{6} + \frac{4qa^4}{6} - \frac{qa^4}{6},$$

откуда

$$y_B = -\frac{109}{6EJ} qa^4,$$

и

$$EJ\theta_B = -20qa^3 + 24qa^3 - \frac{64qa^3}{6} + \frac{8qa^3}{6} - \frac{qa^3}{2};$$

$$\theta_B = -\frac{35}{6EJ} qa^3.$$

В этих формулах  $y_B$  и  $\theta_B$  получились со знаком минус; это означает, что сечение  $B$  опустилось вниз и повернулось по часовой стрелке.

Для определения перемещений сечения  $C$  границы  $I$  и  $II$  участков достаточно в слагаемые, находящиеся левее вертикальной черты с индексом  $I$ , подставить значение  $z = 2a$ :

$$EJy_C = -10qa^4 + 4qa^4 - \frac{2}{3} qa^4 \text{ или } y_C = -\frac{20qa^4}{3EJ}$$

и

$$EJ\theta_C = -10qa^3 + 6qa^3 - \frac{4}{3} qa^3, \text{ откуда } \theta_C = -\frac{16qa^3}{3EJ}.$$

Наибольший прогиб по абсолютному значению будет на свободном конце консоли, т. е. стрела прогиба

$$f = \frac{109qa^4}{6EJ}.$$

**Пример 7.12.** Составить уравнение упругой линии для балки, показанной на рис. 7.27. Определить углы поворота опорных сечений, прогибы посередине пролета и под силой  $P$ , а также положение и величину наибольшего прогиба ( $a > b$ ).

Решение. Опорные реакции балки

$$A = \frac{Pb}{l}; \quad B = \frac{Pa}{l}.$$

Начало координат берем на левой опоре, тогда начальный параметр  $y_0 = y_A = 0$  и уравнение упругой линии для второго участка балки

$$EJy = EJ\theta_0 z + \frac{Pbz^3}{6l} \Big|_I - \frac{P(z-a)^3}{6} \Big|_{II} \quad (a)$$

Значение второго начального параметра  $\theta_0$  определяем из условия, что прогиб сечения над опорой  $B$  равен нулю, для чего в уравнение (a) подставляем  $y = 0$  и  $z = l$ :

$$0 = EJ\theta_0 l + \frac{Pbl^3}{6l} - \frac{Pb^3}{6},$$

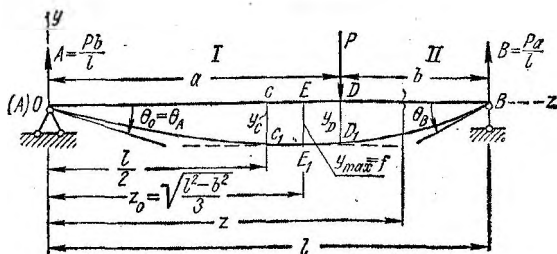


РИС. 7.27

откуда

$$EJ\theta_0 = -\frac{Pb(l^2 - b^2)}{6l}; \quad \theta_A = \theta_0 = -\frac{Pb(l^2 - b^2)}{6EJl} \quad (6)$$

и универсальные уравнения перемещений имеют следующий окончательный вид:

$$EJy = -\frac{Pb(l^2 - b^2)}{6l} z + \frac{Pbz^3}{6l} \Big|_I - \frac{P(z-a)^3}{6} \Big|_{II} \quad (A)$$

$$EJ\theta = -\frac{Pb(l^2 - b^2)}{6l} + \frac{Pbz^2}{2l} \Big|_I - \frac{P(z-a)^2}{2} \Big|_{II} \quad (B)$$

Угол поворота на опоре  $B$  определяется из уравнения (B) подстановкой  $z = l$ :

$$\begin{aligned} EJ\theta_B &= -\frac{Pb}{6l} (l^2 - b^2) + \frac{Pb}{2l} l^2 - \frac{Pb^2}{2} = \\ &= \frac{Pb}{6l} [-(l^2 - b^2) + 3l^2 - 3bl] = \frac{Pb}{6l} [-(l-b)(l+b) + 3l(l-b)] = \\ &= \frac{P(l-a)}{6l} [a(l+a)] = \frac{Pa}{6l} (l^2 - a^2); \\ \theta_B &= \frac{Pa}{6EJl} (l^2 - a^2). \end{aligned} \quad (6)$$

Подставив в уравнение (А) для  $l$  участка  $z = 0,5l$ , найдем прогиб посередине пролета балки:

$$EJy_C = -\frac{Pb(l^2 - b^2)}{6l} \frac{l}{2} + \frac{Pb}{6l} \frac{l^3}{8}$$

или

$$y_C = -\frac{Pb}{48EJ} (3l^2 - 4b^2). \quad (г)$$

Из того же уравнения при  $z = a$  определим прогиб сечения  $D$  под силой  $P$ :

$$\begin{aligned} EJy_D &= -\frac{Pb(l^2 - b^2)a}{6l} + \frac{Pba^3}{6l} = -\frac{Pba}{6l} (l^2 - b^2 - a^2) = \\ &= -\frac{Pab}{6l} 2ab \end{aligned}$$

и

$$y_D = -\frac{Pa^2b^2}{3EJl}. \quad (д)$$

Наибольший прогиб будет в сечении  $l$  участка балки, где касательная к изогнутой оси параллельна оси  $z$ , т. е.  $\frac{dy}{dz} = \theta = 0$ .

Для определения положения этого сечения необходимо в уравнение (Б) для  $l$  участка подставить  $\theta = 0$ , тогда

$$0 = -\frac{Pb(l^2 - b^2)}{6l} - \frac{Pb}{6l} 3z_0^2,$$

откуда

$$z_0 = \sqrt{\frac{l^2 - b^2}{3}}. \quad (е)$$

Подставляя найденное значение  $z_0$  в уравнение (А), получим

$$EJy_{\max} = -\frac{Pb(l^2 - b^2)}{6l} \sqrt{\frac{l^2 - b^2}{3}} + \frac{Pb}{6l} \left( \sqrt{\frac{l^2 - b^2}{3}} \right)^3$$

и

$$y_{\max} = -\frac{Pb\sqrt{(l^2 - b^2)^3}}{9\sqrt{3}EJ}. \quad (ж)$$

При  $b = \frac{l}{2}$ , как следует из формулы (е),  $z_0 = \frac{l}{2}$ , т. е. максимальный прогиб будет под силой  $P$ . При приближении силы  $P$  к опоре  $B$   $b$  уменьшается, а координата  $z$  сечения, имеющего наибольший прогиб, увеличивается. При  $b \rightarrow 0$   $z = \frac{l}{\sqrt{3}} \approx 0,577l$ , т. е. сечение, прогиб которого максимален, находится на расстоянии  $0,577l$

от середины пролета, и, как следует из формул (г) и (ж), в этом случае максимальный прогиб отличается от прогиба посередине пролета не более чем на 3%. Поэтому в расчетной практике при действии на двухопорную бесконсольную балку только сосредоточенных сил, направленных в одну сторону, условно считают, что наибольший прогиб получается посередине пролета.

В частном случае, когда сила  $P$  приложена посередине балки,  $a = b = \frac{l}{2}$  из формул (б), (в) и (д), получим:

$$\theta_A = -\theta_B = -\frac{Pl^2}{16EJ}; y_{\max} = -\frac{Pl^3}{48EJ}.$$

**Пример 7.13.** Определить прогиб левого свободного сечения одноконсольной балки (рис 7.28).

Решение. Опорные реакции  $A = \frac{2}{3}P$  и  $B = \frac{1}{3}P$ . Начало координат в данном случае целесообразнее выбрать на правом конце балки, совпадающем с опорой  $B$ , так как в этом случае один из начальных параметров  $y_0 = y_B = 0$ . Ось  $z$  направляем влево. В этом случае правило знаков для прогибов сохраняется прежним, а для углов поворота меняется на обратное, и если угол поворота получился положительным, то сечение поворачивается по часовой стрелке, а если отрицательным, — против.

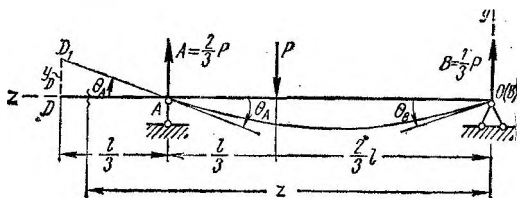


РИС. 7.28

Используя формулы (б) и (в) предыдущего примера и учитывая, что в нашем случае  $a = \frac{l}{3}$  и  $b = \frac{2l}{3}$ , определим:

$$\theta_0 = \theta_B = -\frac{Pa}{6EJl} (l^2 - a^2) = -\frac{P \frac{1}{3} l}{6EJl} \left[ l^2 - \left( \frac{l}{3} \right)^2 \right] = -\frac{4Pl^2}{81EJ}$$

$$\theta_A = \frac{Pb}{6EJl} (l^2 - b^2) = \frac{P \frac{2}{3} l}{6EJl} \left[ l^2 - \left( \frac{2}{3} l \right)^2 \right] = \frac{5Pl^2}{81EJ}$$

Уравнение упругой линии для нашей балки

$$EJy = -\frac{4}{81} Pl^2 z + \frac{Pz^3}{3 \cdot 6} \Big|_I - \frac{P \left( z - \frac{2}{3} l \right)^3}{6} \Big|_{II} + \frac{2P(z-l^3)}{3 \cdot 6} \Big|_{III} \quad (A)$$

Для получения прогиба сечения  $D$  в уравнение (А) подставляем  $z = \frac{4}{3}l$ , тогда

$$EJy_D = -\frac{4}{81}Pl^2 \frac{4}{3}l + \frac{P}{3} \frac{\left(\frac{4}{3}l\right)^3}{6} - \frac{P}{6} \frac{\left(\frac{2}{3}l\right)^3}{6} + \frac{2P}{3} \frac{\left(\frac{l}{3}\right)^3}{6},$$

откуда

$$y_D = \frac{5}{243} \cdot \frac{Pl^3}{EJ}.$$

Прогиб получился со знаком плюс; это значит, что сечение перемещается вверх.

Так как на III участке балки  $AD$  изгибающий момент равен нулю, то упругая линия на этом участке представляет прямую линию и прогиб сечения  $D$  можно также определить по формуле

$$y_D = AD \cdot \theta_A = \frac{l}{3} \cdot \frac{5Pl^2}{81EJ} = \frac{5}{243} \cdot \frac{Pl^3}{EJ}.$$

**Пример 7.14.** Составить универсальное уравнение прогибов для двухконсольной балки, нагруженной, как показано на рис. 7.29.

Решение. Опорные реакции  $A = 2qa$  и  $B = 4qa$ .

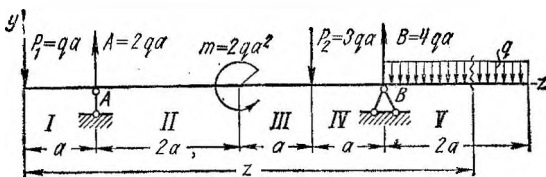


РИС. 7.29

Начало координат совмещаем с левым концом балки. Оба начальных параметра неизвестны. Их величины определяем из условий, что прогибы на опорах  $A$  и  $B$  равны нулю:

$$\begin{aligned} EJy_A &= EJy_0 + EJ\theta_0 a - \frac{qa a^3}{6} = 0; \\ EJy_B &= EJy_0 + EJ\theta_0 5a - \frac{qa (5a)^3}{6} + \frac{2qa (4a)^3}{6} - \\ &\quad - \frac{2qa^2 (2a)^2}{2} - \frac{3qa a^3}{6} = 0. \end{aligned}$$

Решая систему двух уравнений с двумя неизвестными, определяем величины неизвестных  $y_0$  и  $\theta_0$ :

$$EJy_0 = -\frac{19}{24} qa^3$$

и

$$EJ\theta_0 = \frac{23}{24} qa^3.$$

Обобщенное уравнение прогибов

$$EJy = -\frac{19}{24} qa^4 + \frac{23}{24} qa^3z - \frac{qaz^3}{6} \Big|_I + \frac{2qa(z-a)^3}{6} \Big|_{II} - \frac{2qa^2(z-3a)^2}{2} \Big|_{III} - \frac{3qa(z-4a)^3}{6} \Big|_{IV} + \frac{4qa(z-5a)^3}{6} - \frac{q(z-5a)^4}{24} \Big|_V.$$

### § 7.9. ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ УПРУГОЙ ДЕФОРМАЦИИ ПРИ ИЗГИБЕ

Полная потенциальная энергия, накапливаемая в балке при прямом поперечном изгибе, определяется по формуле

$$U = \sum \int \frac{M_x^2 dz}{2EJ_x} + \sum k \int \frac{Q_y^2 dz}{2GF}, \quad (7.22)$$

где  $k$  — безразмерный коэффициент, характеризующий неравномерность распределения касательных напряжений по высоте поперечного сечения балки.

Величина коэффициента  $k$  зависит только от геометрической формы сечения и для каждого вида поперечного сечения определяется по формуле

$$k = \frac{F}{J_x^2} \int \frac{(S_x^{отс})^2}{b(y)^3} dF. \quad (7.23)$$

Интегрирование в данном случае проводится по всей высоте сечения, а величины  $S_x^{отс}$ ,  $J_x$  и  $b_y$  имеют те же значения, что и в формуле (7.10).

Значения коэффициента  $k$  для некоторых сечений приведены ниже.

Сечение	Величина $k$
Прямоугольник	1,2
Треугольник	1,2
равносторонний	$\frac{32}{27} \approx 1,18$
Круг	2,0
Тонкостенное	
круговое кольцо	$\frac{F \text{ (пл. двугавра)}}{F_c \text{ (пл. стенки)}}$
Двугавр	

В формуле (7.22) после интегрирования в пределах каждого участка необходимо произвести суммирование потенциальной энергии по всем ее участкам.

В практических расчетах большей частью потенциальная энергия сдвига значительно меньше потенциальной энергии изгиба, и ею обычно пренебрегают.

**Пример 7.15.** Определить полную потенциальную энергию деформации для балки прямоугольного сечения, нагруженной, как показано на рис. 7.30, и оценить влияние поперечной силы по отношению к влиянию изгибающего момента.

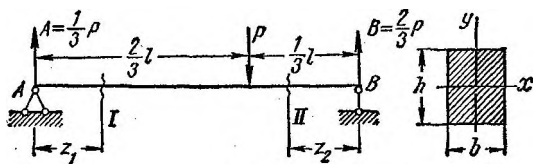


РИС. 7.30

Решение. Опорные реакции  $A = \frac{1}{3} P$ ;  $B = \frac{2}{3} P$ . Балка имеет два участка.

Для I участка с началом координат в точке A  $(0 \leq z_1 \leq \frac{2}{3} l)$

$$M_x = \frac{1}{3} P z_1; \quad Q_y = \frac{1}{3} P.$$

Подставив эти значения в формулу (7.22), найдем

$$\begin{aligned} U^I &= U_M^I + U_Q^I = \frac{\left(\frac{1}{3} P\right)^2}{2EJ_x} \int_0^{\frac{2}{3} l} z_1^2 dz_1 + \frac{\left(\frac{1}{3} P\right)^2}{2GF} k \int_0^{\frac{2}{3} l} dz_1 = \\ &= \frac{8P^2 l^3}{18 \cdot 81EJ_x} + k \frac{2P^2 l}{18 \cdot 3GF}. \end{aligned}$$

Для II участка балки с началом координат в точке B  $(0 \leq z_2 \leq \frac{1}{3} l)$

$$M_x = \frac{2}{3} P z_2; \quad Q_y = \frac{2}{3} P$$

И

$$\begin{aligned}
 U^{\text{II}} &= U_M^{\text{II}} + U_Q^{\text{II}} = \left(\frac{2}{3}P\right)^2 \int_0^l z^2 dz_2 + \left(\frac{2}{3}P\right)^2 \int_0^l dz_2 = \\
 &= \frac{4P^2 l^3}{18 \cdot 81EJ_x} + k \frac{4P^2 l}{18 \cdot 3GF}.
 \end{aligned}$$

Потенциальная энергия, накапливаемая всей балкой:

1) соответствующая изгибающему моменту

$$U_M = U_M^{\text{I}} + U_M^{\text{II}} = \frac{8P^2 l^3}{18 \cdot 81EJ_x} + \frac{4P^2 l^3}{18 \cdot 81EJ_x} = \frac{2}{243} \cdot \frac{P^2 l^3}{EJ_x};$$

2) соответствующая поперечной силе

$$U_Q = U_Q^{\text{I}} + U_Q^{\text{II}} = k \frac{2P^2 l}{54GF} + k \frac{4P^2 l}{54GF} = k \frac{6P^2 l}{54GF}.$$

Полная потенциальная энергия деформации

$$\begin{aligned}
 U &= U_M + U_Q = \frac{4P^2 l^3}{486EJ_x} + k \frac{6P^2 l}{54GF} = \\
 &= \frac{4}{486} \frac{P^2 l^3}{EJ_x} \left(1 + 13,5k \frac{E}{G} \cdot \frac{J_x}{F} \cdot \frac{1}{l^2}\right).
 \end{aligned}$$

Для прямоугольника  $k = 1,2$ , а  $\frac{J_x}{F} = \frac{bh^3}{12bh} = \frac{h^2}{12}$ .

Приняв коэффициент Пуассона  $\mu = 0,25$ , получим

$$\frac{E}{G} = 2(1 + \mu) = 2,5$$

И

$$\begin{aligned}
 U &= \frac{4}{486} \cdot \frac{P^2 l^3}{EJ_x} \left[1 + \frac{13,5 \cdot 1,2 \cdot 2,5}{12} \left(\frac{h}{l}\right)^2\right] = \\
 &= \frac{4}{486} \cdot \frac{P^2 l^3}{EJ_x} \left[1 + 3,4 \left(\frac{h}{l}\right)^2\right].
 \end{aligned}$$

Как следует из последнего выражения, потенциальная энергия, накапливаемая в балке в результате деформации сдвига, пропорциональна квадрату отношения высоты балки к ее длине.

При  $\frac{h}{l} = \frac{1}{10}$  она составляет  $3,4 \left(\frac{1}{10}\right)^2 \cdot 100 = 3,4\%$  энергии, на-

капливаемой в результате изгиба, а при  $\frac{h}{l} = \frac{1}{20}$  эта величина снижа-

ется до  $3,4 \left(\frac{1}{20}\right)^2 \cdot 100 = 0,85\%$ .



## § 7.10. ИНТЕГРАЛ МОРА

Наиболее общей формулой, позволяющей находить линейные и угловые перемещения стержневой системы по любому направлению, является формула (интеграл) Мора.

Формула Мора для определения перемещения произвольного сечения (точки) плоской стержневой системы<sup>1</sup> имеет следующий вид:

$$\Delta_{1P} = \sum \int \frac{M_P M_1 ds}{EJ} + \sum k \int \frac{Q_P Q_1 ds}{GF} + \sum \int \frac{N_P N_1 ds}{EF}, \quad (7.24)$$

где  $\Delta_{1P}$  — искомое перемещение (линейное или угловое) по заданному направлению под действием заданной нагрузки, обозначенной условно буквой  $P$ ;

$M_P, Q_P, N_P$  — текущие значения внутренних силовых факторов в поперечных сечениях рассматриваемого участка стержня от заданной (действительной) нагрузки;

$M_1, Q_1, N_1$  — то же от единичной нагрузки, приложенной в точке, перемещение которой определяется; при определении линейного перемещения единичная сила направлена вдоль этого перемещения; при определении углового перемещения прикладывают единичный момент;

$k$  — безразмерный коэффициент, значение которого указано в § 7.9. Величина  $k$  приведена на стр. 224.

$EJ, GF, EF$  — жесткость сечения стержня при изгибе, сдвиге и растяжении (сжатии);

$ds$  — длина элемента оси участка стержня. Для прямолинейного стержня  $ds = dz$ .

Интегрирование по формуле (7.24) производится по длине каждого участка стержня, а суммирование распространяется на все участки.

Формула Мора для отдельных частных случаев принимает более простой вид.

1. Для фермы с узловой нагрузкой, стержни которой подвергаются только деформации растяжения или сжатия, изгибающие моменты и поперечные силы равны нулю, и в правой части формулы (7.24) сохранится только последнее слагаемое:

$$\Delta_{1P} = \sum \int \frac{N_P N_1 dz}{EF}. \quad (7.25)$$

Если в пределах длины стержня фермы продольные силы  $N_P, N_1$  и площади  $F$  постоянны, то

$$\Delta_{1P} = \sum \frac{N_P N_1 l}{EF}. \quad (7.25a)$$

2. Для балок и рам, состоящих из прямолинейных стержней, перемещения, соответствующие продольным и поперечным силам,

<sup>1</sup> Систему называют плоской при условии, что не только оси всех составляющих ее стержней лежат в одной плоскости, но в той же плоскости действуют все внешние силы.

большей частью весьма малы по сравнению с перемещениями, соответствующими изгибающим моментам, и ими обычно пренебрегают; тогда формула Мора принимает следующий вид:

$$\Delta_{1P} = \sum \int \frac{M_P M_1 dz}{EJ}. \quad (7.26)$$

Формулами (7.24) и (7.26) можно пользоваться и для криволинейных стержней малой кривизны, для которых отношение радиуса кривизны к высоте сечения  $\frac{R}{h} > 5$ ; при этом в формуле (7.26) вместо  $dz$  должно быть принято  $ds$ .

Для определения перемещений по формуле Мора необходимо:

1) составить выражения текущих изгибающих моментов  $M_P$  для каждого участка конструкции от всех действующих на нее сил;

2) снять с конструкции все действующие на нее силы и приложить в месте искомого перемещения по заданному направлению единичную нагрузку (при линейном перемещении — единичную силу, а при угловом — единичный момент);

3) составить выражения текущих изгибающих моментов  $M_1$  для каждого участка конструкции от единичной нагрузки;

4) подставить найденные значения  $M_P$  и  $M_1$  в формулу (7.24) или (7.26) и после интегрирования по участкам в пределах всей конструкции вычислить искомое перемещение.

Если вычисленное перемещение получилось отрицательным, то это означает, что действительное перемещение противоположно принятому направлению единичной нагрузки.

Формула Мора дает перемещение в заданном направлении, которое равно проекции полного перемещения на заданное направление. Поэтому для определения полного перемещения точки  $A$  следует геометрически сложить ее частные перемещения по двум взаимно перпендикулярным направлениям (рис. 7.31).

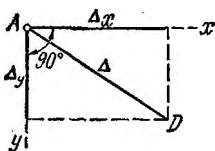


РИС. 7.31

7.16. Для балки, показанной на рис. 7.32, а, найти прогиб под силой  $P$ , пренебрегая влиянием поперечных сил.

Решение. Составляем выражения текущих изгибающих моментов от заданной нагрузки.

Для I участка балки ( $0 \leq z_1 \leq a$ )

$$M_P^I = \frac{Pb}{l} z_1;$$

для II участка балки ( $0 \leq z_2 \leq b$ )

$$M_P^{II} = \frac{Pa}{l} z_2.$$

К балке, освобожденной от нагрузки, прикладываем в точке  $D$  вертикальную силу, равную единице (рис. 7.32, б), и составляем вы-

ражения изгибающих моментов по участкам для этого вспомогательного фиктивного состояния балки:

$$M_1^I = \frac{b}{l} z_1 \quad \text{и} \quad M_1^{II} = \frac{a}{l} z_2.$$

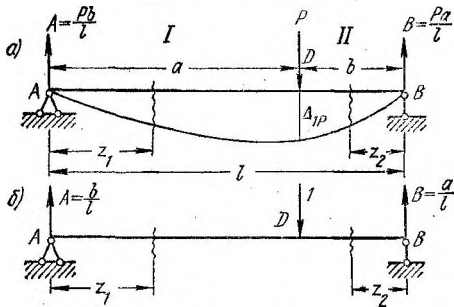


РИС. 7.32

Определяем по формуле Мора прогиб точки  $D$ , равный вертикальному перемещению этой точки:

$$\begin{aligned} \Delta_{1P} = y_D &= \sum \int \frac{M_P M_1 dz}{EJ} = \int_0^a \frac{M_P^I M_1^I dz_1}{EJ} + \int_0^b \frac{M_P^{II} M_1^{II} dz_2}{EJ} = \\ &= \frac{1}{EJ} \left( \frac{Pb^2}{l^2} \int_0^a z_1^2 dz_1 + \frac{Pa^2}{l^2} \int_0^b z_2^2 dz_2 \right) = \\ &= \frac{1}{EJ} \left( \frac{Pb^2 a^3}{3l^2} + \frac{Pa^2 b^3}{3l^2} \right) = \frac{Pa^2 b^3}{3EJ}. \end{aligned}$$

Положительный результат показывает, что точка  $D$  перемещается по направлению единичной силы, т. е. вниз.

**Пример 7.17.<sup>1</sup>** Определить сближение концов фасонной стальной пружины, изображенной на рис. 7.33, *а*. Принять  $E = 2,1 \cdot 10^4 \text{ кг/мм}^2$ .

**Решение.** Пружина представляет собой брус малой кривизны; пренебрегая влиянием продольных и поперечных сил, определяем перемещение по формуле (7.26). Искомое перемещение не изменится, если считать один из концов пружины защемленным и принять расчетную схему по рис. 7.33, *б*.

Уравнение изгибающих моментов составляем в полярных координатах. Для текущего сечения, определяемого углом  $\varphi$  (см. рис. 7.33, *б*), имеем

$$M_P = PR \sin \varphi.$$

<sup>1</sup> Примеры 7.17, 7.18, 7.21 составил Г. М. Ицкович.

Освободив пружину от заданной нагрузки, прикладываем к свободному концу горизонтально направленную единичную силу (рис. 7.33, в). Уравнение соответствующих изгибающих моментов

$$M_1 = 1 \cdot R \sin \varphi.$$

Искомое перемещение

$$\begin{aligned} \Delta_{1P} &= \int_s \frac{M_P M_1 ds}{EJ} = \int_0^\pi \frac{(PR \sin \varphi)(R \sin \varphi) R d\varphi}{EJ} = \\ &= \frac{PR^3}{EJ} \int_0^\pi \sin^2 \varphi d\varphi = \frac{\pi}{2} \frac{PR^3}{EJ}. \end{aligned}$$

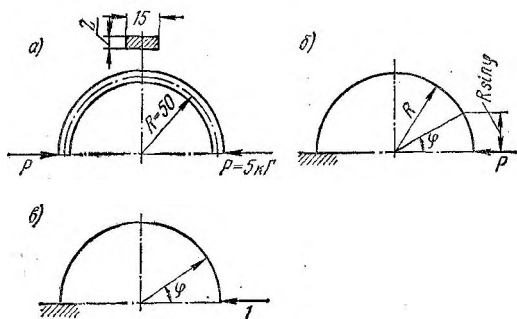


РИС. 7.33

Момент инерции поперечного сечения пружины (см. рис. 7.33, а)

$$J = \frac{2^3 \cdot 15}{12} = 10 \text{ мм}^4.$$

Сближение концов пружины

$$\Delta_{1P} = \frac{3,14}{2} \cdot \frac{5 \cdot 50^3}{2,1 \cdot 10^4 \cdot 10} = 4,67 \text{ мм}.$$

**Пример 7.18.** Определить стрелу прогиба бруса равного сопротивления изгибу (рис. 7.34, а). Местные уширения бруса вблизи опор не учитывать. Принять  $E = 2,2 \cdot 10^4 \text{ кг/мм}^2$ . Влиянием поперечных сил пренебречь.

**Решение.** Опорные реакции показаны на рис. 7.34, а. Максимальным, очевидно, является прогиб посередине пролета. В силу симметрии бруса интегрирование по формуле (7.26) выполним для одной его половины и результат удвоим.

Изгибающий момент от заданной нагрузки

$$M_P = \frac{P}{2} z.$$

Вспомогательное состояние бруса показано на рис. 7.34, б. Изгибающий момент от единичной силы

$$M_1 = \frac{1}{2} z.$$

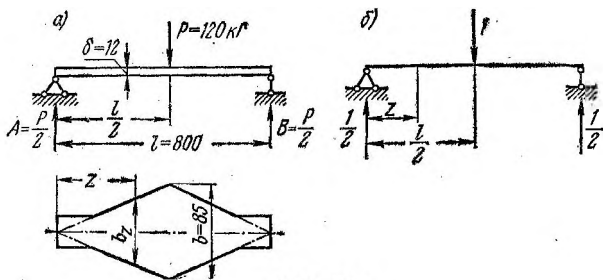


РИС. 7.34

Момент инерции поперечного сечения бруса переменен:

$$J = \frac{b_z \delta^3}{12},$$

где  $b_z = \frac{2b}{l} z$  (см. рис. 7.34, а) и  $J = \frac{2b\delta^3}{12} \frac{z}{l} = \frac{b\delta^3}{6} \frac{z}{l}$ .

Стрела прогиба

$$\begin{aligned} \Delta_{1P} = f &= 2 \cdot \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{\left(\frac{1}{2} Pz\right) \left(\frac{1}{2} z\right) dz}{E \frac{b\delta^3}{6} \frac{z}{l}} = \frac{3}{8} \frac{Pf^3}{Eb\delta^3} = \\ &= \frac{3 \cdot 120 \cdot 800^3}{8 \cdot 2,2 \cdot 10^4 \cdot 85 \cdot 12^3} = 7,2 \text{ мм.} \end{aligned}$$

#### § 7. 11. ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛА МОРА ПО ПРАВИЛУ ВЕРЕЩАГИНА

На рис. 7.35, а, б для прямолинейного участка бруса постоянной жесткости показаны эпюры изгибающих моментов от внешних сил  $M_P$  (грузовая эпюра) и от единичной нагрузки  $M_1$  (единичная эпюра).

Сущность правила Верещагина при определении перемещений заключается в том, что интеграл Мора [формула (7.26)] вычисляют графо-аналитическим способом, путем так называемого «правила перемножения эпюр»:

$$\int M_P M_1 dz = \omega \eta. \quad (7.27)$$

Подставив найденное значение интеграла (7.27) в формулу (7.26), получим формулу для определения перемещений:

$$\Delta_{1P} = \sum \frac{\omega \eta}{EJ}. \quad (7.28)$$

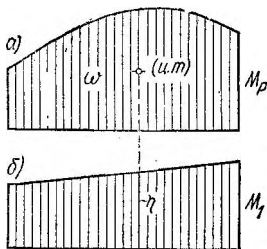


РИС. 7.35

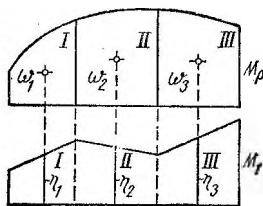


РИС. 7.36

По правилу Верещагина интеграл Мора в пределах данного участка равен произведению площади нелинейной (криволинейной или ломаной) эпюры на ординату линейной эпюры, взятую под центром тяжести нелинейной эпюры, деленному на жесткость сечения участка.

Правило Верещагина справедливо для любого интеграла, входящего в формулу (7.24).

Произведение  $\omega \eta$  берется со знаком плюс, если эпюры  $M_P$  и  $M_1$  расположены с одной стороны оси бруса, и со знаком минус, если они расположены по разные стороны от оси.

Если на рассматриваемом участке бруса обе эпюры  $M_P$  и  $M_1$  прямолинейны, то безразлично, из какой эпюры брать площадь и из какой — ординату.

Правило Верещагина неприменимо для кривого бруса, а также в случае, когда поперечное сечение прямого бруса переменное. При ступенчато-переменном поперечном сечении правило Верещагина применимо.

В формуле (7.28) суммирование распространяется на все участки системы, число которых устанавливается с учетом эпюры моментов от единичной нагрузки, ее знака и постоянства жесткости в пределах данного участка.

Так, например, для случая, показанного на рис. 7.36, когда единичная эпюра ограничена ломаной линией, по правилу Верещагина получим

$$\Delta_{1P} = \frac{1}{EJ} (\omega_1 \eta_1 + \omega_2 \eta_2 + \omega_3 \eta_3).$$

На рис. 7.37 единичная эпюра прямолинейна, но из условия построения жесткости в пределах каждого участка имеем три участка, и по правилу Верещагина

$$\Delta_{1P} = \frac{\omega_1 \eta_1}{EJ_1} + \frac{\omega_2 \eta_2}{EJ_2} + \frac{\omega_3 \eta_3}{EJ_3}.$$

Если обе эпюры представляют трапеции (рис. 7.38), то в этом случае целесообразно одну из них разбить на прямоугольник и треугольник или два треугольника, и по правилу Верещагина

$$\Delta_{1P} = \frac{\omega_1 \eta_1 + \omega_2 \eta_2}{EJ}.$$

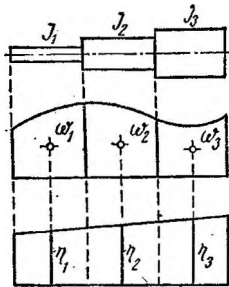


РИС. 7.37

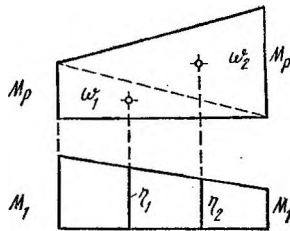


РИС. 7.38

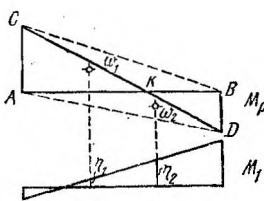


РИС. 7.39

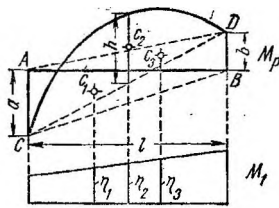



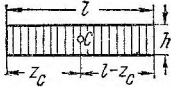

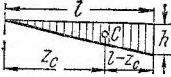
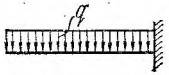
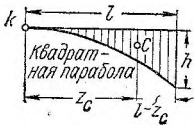
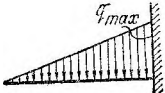
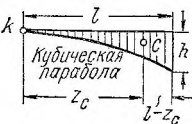

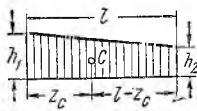
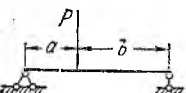
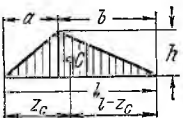
РИС. 7.40

Аналогично поступают, если одна или обе эпюры состоят из двух треугольников разных знаков (рис. 7.39). Добавляя два равновеликих треугольника противоположных знаков  $CBK$  и  $ADK$ , что не влияет на результат вычислений, заменяем верхнюю эпюру двумя треугольниками  $ACB$  и  $ADB$ , расположенными по разные стороны от оси, и в этом случае

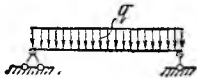


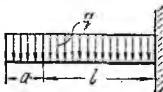
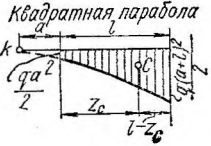
$$\sum \omega \eta = \omega_1 \eta_1 - \omega_2 \eta_2.$$

Грузовую параболическую эпюру (рис. 7.40) можно заменить двумя треугольниками  $ABC$  и  $ABD$  и параболической эпюрой,

Площади и координаты центра тяжести некоторых элементарных фигур

Нагрузка	Эпюра $M$	Площадь $\omega$	Расстояние центра тяжести	
			$z_C$	$l - z_C$
		$\frac{lh}{1}$	$\frac{1}{2} l$	$\frac{1}{2} l$
		$\frac{lh}{2}$	$\frac{2}{3} l$	$\frac{1}{3} l$
		$\frac{lh}{3}$	$\frac{3}{4} l$	$\frac{1}{4} l$
		$\frac{lh}{4}$	$\frac{4}{5} l$	$\frac{1}{5} l$
		$\frac{(h_1 + h_2) l}{2}$	$\frac{h_1 + 2h_2}{3(h_1 + h_2)} l$	$\frac{h_2 + 2h_1}{3(h_1 + h_2)} l$
		$\frac{lh}{2}$	$\frac{a + l}{3}$	$\frac{b + l}{3}$



Нагрузка	Эпюра $M$	Площадь $\omega$	Расстояние центра тяжести	
			$z_C$	$l - z_C$
	<p>Квадратная парабола</p> 	$\frac{2}{3} lh$	$\frac{1}{2} l$	$\frac{1}{2} l$
	<p>Половина квадратной параболы</p> 	$\frac{2}{3} \cdot \frac{l}{2} \cdot h$	$\frac{5}{18} l$	$\frac{3}{16} l$
	<p>Квадратная парабола</p> 	$\frac{ql}{6} [l^2 + 3a(a+l)]$	$z_C = \frac{l}{4} \frac{6a^2l + 8al^2 + 3l^3}{3a^2l + 3al^2 + l^3}$	$l - z_C = \frac{l}{4} \frac{6a^2l + 4a^2l + l^3}{3a^2l + 3al^2 + l^3}$

Примечание. Для всех парабол точка  $K$  является вершиной.

площадь которой  $\omega_2 = \frac{2}{3}lh$ , где  $h$  — средняя ордината эпюры. Перемножение эпюр дает

$$\sum \omega\eta = -\omega_1\eta_1 + \omega_2\eta_2 + \omega_3\eta_3 = -\frac{al}{2}\eta_1 + \frac{2}{3}lh\eta_2 + \frac{bl}{2}\eta_3.$$

Если найденное перемещение оказалось отрицательным, то это означает, что перемещение направлено против действия единичной нагрузки.

Для облегчения расчетов в табл. 7.5 приведены часто встречающиеся в практике эпюры изгибающих моментов и даны величины их площадей и положения их центров тяжести, а в табл. 7.6 — значения интеграла Мора для наиболее распространенных эпюр  $M_i$  и  $M_k$ .

В тех случаях, когда грузовая эпюра имеет сложное очертание, с целью облегчения вычислений при перемножении эпюр целесообразно ее расщлнить, т. е. вместо полной эпюры построить отдельные эпюры изгибающих моментов от каждой силы (момента). Эти эпюры имеют вид прямоугольников и прямолинейных и параболических треугольников, для которых значения площадей и положение центров тяжести приведены в табл. 7.5.

Применение способа расщлнения эпюры показано в примерах 7.22 (2-й способ) и 7.28.

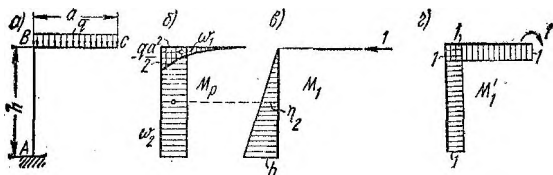


РИС. 7.41

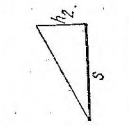
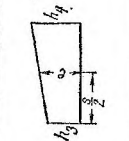
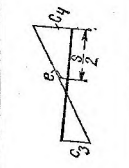
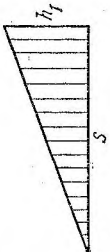
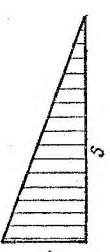

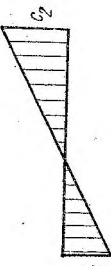

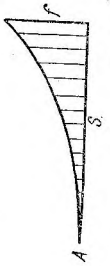
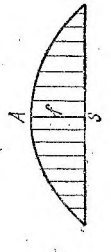
**Пример 7.19.** Для ломаного бруса (рис. 7.41, а) определить горизонтальное перемещение и угол поворота его свободного конца (сечения С). Жесткость поперечного сечения ( $EJ$ ) постоянна по всей длине.

**Решение.** Для определения линейного и углового перемещений сечения С по методу Мора с применением правила Верещагина строим эпюры изгибающих моментов для заданного бруса от внешних сил (рис. 7.41, б) и от единичной горизонтальной силы и единичного момента, приложенных в точке С (рис. 7.41, в, г).

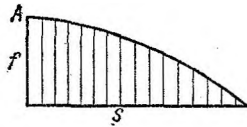
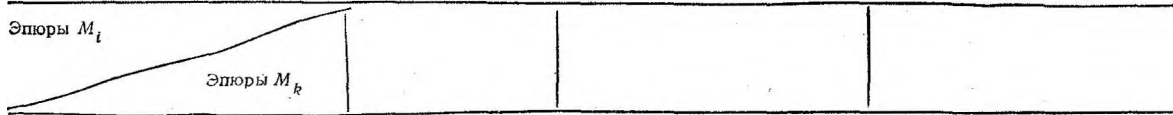
По формуле (7.28), перемножая эпюры  $M_p$  и  $M_1$ , получим горизонтальную составляющую перемещения сечения С, а перемножая

Таблица 7.6

Формулы для подсчета интеграла Мора  $\int M_1 M_2 ds$  (s — основание всех площадей)

Эпоры $M_1$			
Эпоры $M_k$		$\frac{sh_1 h_2}{3}$	$\frac{sh_1}{6} (2c_3 + c_4)$
	$\frac{sh_1 h_2}{6}$	$\frac{sh_1}{6} (2h_3 + h_4)$	$\frac{sh_1}{6} (-2c_3 + c_4)$
	$\frac{sh_5}{6} (2h_3 + h_4)$	$\frac{s}{6} [h_3 (2h_3 + h_4) + h_4 (2h_4 + h_3)]$	$-\frac{s}{6} [h_3 (-2c_3 + c_4) + h_4 (2c_3 - c_4)]$
	$\frac{sh_2}{6} (2c_3 - c_1)$	$\frac{s}{6} [-c_1 (2h_3 + h_4) + c_2 (h_3 + h_4)] - \frac{s}{6} [-c_1 (-2c_3 + c_4) + c_2 (2c_3 - c_4)]$	
	$\frac{sfh_2}{12}$	$\frac{sf}{12} (3h_3 + h_4)$	$\frac{sf}{12} (-3c_3 + c_4)$
	$\frac{sfh_2}{4}$	$\frac{sf}{12} (3h_1 + h_2)$	$\frac{sf}{12} (3c_3 - c_4)$
	$\frac{sfh_2}{3}$	$\frac{sf}{3} (h_3 + h_4)$	$\frac{sf}{3} (-c_3 + c_4)$

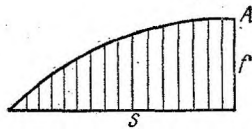
Формулы для подсчета интеграла Мора  $\int M_i M_k d_s$  ( $s$  — основание всех площадей)



$$\frac{sfh_2}{4}$$

$$\frac{sf}{12} (5h_2 + 3h_1)$$

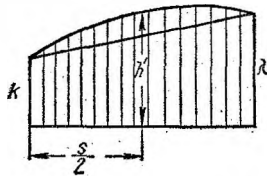
$$\frac{sf}{12} (-5c_2 + 3c_1)$$



$$\frac{5}{12} sfh_2$$

$$\frac{sf}{12} (5h_1 + 3h_2)$$

$$\frac{sf}{12} (5c_1 - 3c_2)$$



$$\frac{s}{6} h_2 (2h' + \lambda)$$

$$\frac{s}{6} (h_2 k + 4eh' + h_1 \lambda)$$

$$\frac{s}{6} (-c_2 k + 4eh' + c_1 \lambda)$$

Примечание. Все кривые — квадратные параболы с вершиной в точке А.

эпюры  $M_P$  и  $M_I'$ , определим угол поворота сечения  $C$ . Величину площади  $\omega_1$  параболического треугольника определяем по табл. 7.5:

$$\omega_1 = \frac{1}{3} a \frac{qa^2}{2} = \frac{qa^3}{6};$$

$$\Delta_{1P}^{\text{гор}} = -\frac{\omega_2 \gamma_2}{EJ} = -\frac{qa^2 h}{2} \frac{h}{2EJ} = -\frac{qa^2 h^2}{4EJ}$$

(знак минус показывает, что сечение  $C$  по горизонтали перемещается в сторону, противоположную действию единичной силы, т. е. вправо);

$$\begin{aligned} \Delta_{1P}^{\text{уг}} &= \frac{\omega_1 \gamma_1'}{EJ} + \frac{\omega_2 \gamma_2'}{EJ} = \\ &= \frac{1}{EJ} \left( \frac{qa^3}{6} \cdot 1 + \frac{qa^2 h}{2} \cdot 1 \right) = \frac{qa^2}{6EJ} (a + 3h). \end{aligned}$$

Результат получился положительным. Это означает, что сечение  $C$  поворачивается в сторону действия единичного момента, т. е. по часовой стрелке.

**Пример 7.20.** Для рамы (рис. 7.42, а), стержни которой имеют постоянную жесткость сечения  $EJ$ , определить сближение точек  $A$  и  $B$ .

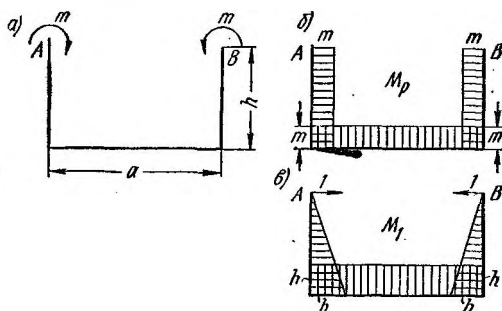


РИС. 7.42

**Решение.** В тех случаях, когда необходимо определить взаимное перемещение двух каких-либо сечений одного относительно другого, следует в местах искомого перемещений приложить единичные нагрузки или в виде двух единичных сил, если определяется взаимное линейное перемещение, или в виде двух единичных моментов, если определяется взаимное угловое перемещение.

Грузовая и единичная эпюры показаны на рис. 7.42, б, в.

Так как на всех трех участках обе эпюры прямолинейны и при этом изгибающий момент от заданной нагрузки имеет неизменную ве-

личину на всех участках, то несколько проще умножить площадь единичной эпюры  $\omega$  на ординату грузовой  $\eta = m$ :

$$\Delta_{1P} = \sum \frac{\omega \eta}{EJ} = \frac{2 \frac{h^2}{2} m + ahm}{EJ} = \frac{mh(h+a)}{EJ}.$$

**Пример 7.21.** Определить прогиб посередине пролета балки, изображенной на рис. 7.43, а.

**Решение.** Определяем опорные реакции (показаны на рис. 7.43, а). К балке, освобожденной от заданной нагрузки, прикладываем в точке К вертикально направленную единичную силу (рис. 7.43, б). Строим грузовую и единичную эпюры изгибающих моментов (рис. 7.43, в, г).

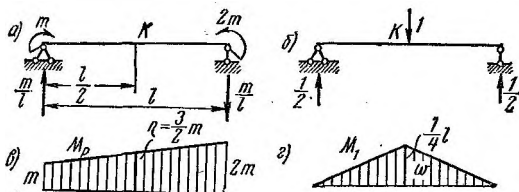


РИС. 7.43

В данном случае грузовая эпюра линейна на всем протяжении балки, а единичная эпюра нелинейна (ломаная), следовательно, площадь надо взять на единичной эпюре, а ординату — на грузовой. Применяя правило Верещагина, получим

$$\Delta_{1P} = \frac{1}{EJ} \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} l \cdot l \right) \frac{3}{2} m = \frac{3ml^2}{16EJ}.$$

**Пример 7.22.** Для балки, изображенной на рис. 7.44, а, определить прогиб посередине пролета.

**Решение.** Значения опорных реакций, найденных из уравнений статики, даны на рис. 7.44, а.

Эпюра изгибающих моментов от внешней нагрузки, действующей на балку, приведена на рис. 7.44, б.

**1-й способ.** Чтобы определить прогиб сечения С, прикладываем к балке, освобожденной от заданной нагрузки, вертикальную единичную силу в точке С (рис. 7.44, в). Эпюра изгибающих моментов от единичной силы ( $M_1$ ) показана на рис. 7.44, г.

Для перемножения эпюр по правилу Верещагина имеем два участка: АС и СВ. Для упрощения вычислений разбиваем грузовую эпюру на первом участке на две части: параболу и треугольник, а на втором участке — на три: параболу, треугольник и пятиугольник (см. рис. 7.44, б).

Значения ординат эпюры  $M_1$  под центрами тяжести соответствующих площадей грузовой эпюры даны на рис. 7.44, г.

Вычислим прогиб сечения  $C$ :

$$\begin{aligned}
 y_C = \Delta_{1P} &= \frac{1}{EJ} \sum \omega \eta = \frac{1}{EJ} (\omega_1 \eta_1 + \omega'_1 \eta'_1 + \omega_2 \eta_2 + \omega'_2 \eta'_2 + \\
 &+ \omega''_2 \eta''_2) = \frac{1}{EJ} \left[ \frac{q(2a)^3 a}{12 \cdot 2} + \frac{1}{2} 2a \cdot 2qa^2 \cdot \frac{2}{3} a + \frac{qa^3}{12} \cdot \frac{3}{4} a + \right. \\
 &+ \left. \frac{1}{2} a \cdot 1,5qa^2 \cdot \frac{5}{6} a + \left( 2a \cdot 0,5qa^2 + \frac{1}{2} 2a \cdot qa^2 \right) \frac{a}{2} \right] = \frac{161qa^4}{48EJ}
 \end{aligned}$$

2-й способ. Расслаиваем грузовую эпюру моментов относительно сечения  $C$ , где единичная эпюра  $M_1$  имеет перелом, т. е. вместо пол-

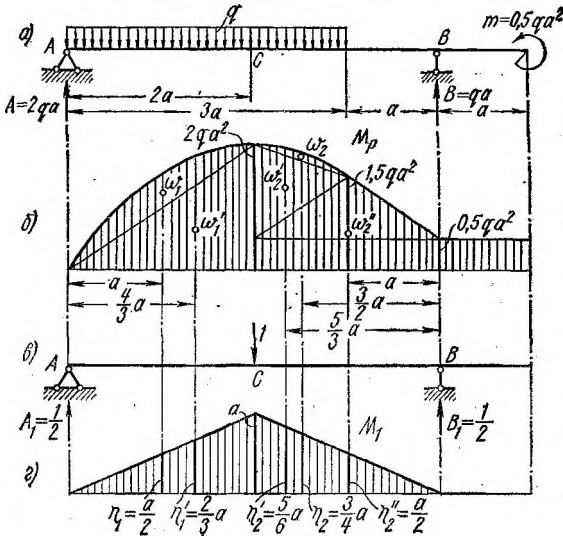


РИС. 7.44

ной эпюры строим отдельные эпюры от каждой нагрузки, расположенной как слева, так и справа от сечения  $C$ . Схема нагружения балки повторена на рис. 7.45, а.

«Расслоенная» эпюра моментов  $M_p$  изображена на рис. 7.45, б.

Единичная эпюра  $M_1$  сохраняет свой вид (рис. 7.45, в).

Перемножая эпюры, получаем

$$\begin{aligned}
 y_C = \Delta_{1P} &= \frac{1}{EJ} (\omega_1 \eta_1 - \omega'_1 \eta'_1 + \omega_2 \eta_2 + \omega'_2 \eta'_2 - \omega''_2 \eta''_2) = \\
 &= \frac{1}{EJ} \left( \frac{1}{2} 2a \cdot 4qa^2 \cdot \frac{2}{3} a - \frac{1}{3} 2a \cdot 2qa^2 \cdot \frac{3}{4} a + \right. \\
 &+ \left. \frac{1}{2} 2a \cdot 2qa^2 \cdot \frac{2}{3} a + 2a \cdot 0,5qa^2 \cdot \frac{a}{2} - \frac{1}{3} a \cdot 0,5qa^2 \cdot \frac{7}{8} a \right) = \frac{161qa^4}{48EJ}
 \end{aligned}$$

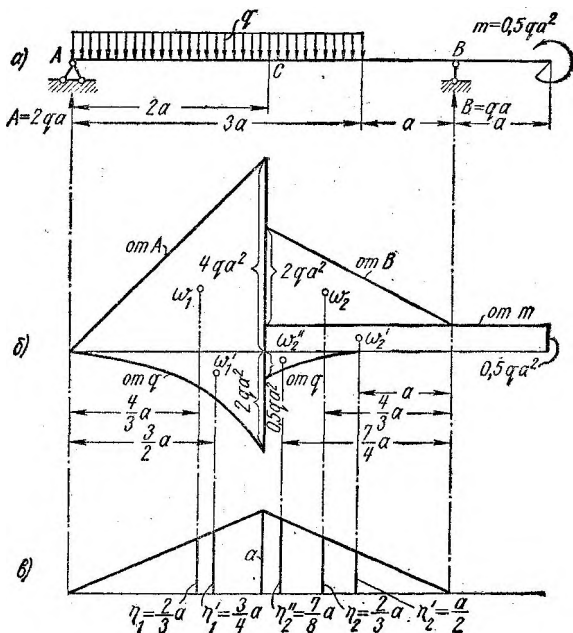


РИС. 7.45

### § 7.12. ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛА МОРА СПОСОБОМ ПЕРЕМНОЖЕНИЯ МОМЕНТНЫХ ФАКТОРОВ<sup>1</sup>

Для прямого бруса ступенчато-переменного сечения, нагруженного сосредоточенным моментом  $m$ , сосредоточенной силой  $P$ , равномерно распределенной нагрузкой  $q$  и нагрузкой, распределенной по закону треугольника (рис. 7.46, а), по предлагаемому способу перемещения определяются по формуле

$$EJ_0 \Delta_K = \sum_n \Phi_n f m D r, \quad (7.29)$$

где  $\Delta_K$  — искомое перемещение сечения  $K$  (линейное или угловое);

$EJ_0$  — жесткость любого сечения балки;

$\Phi_n$  — грузовой моментный фактор  $n$ -го порядка, величина, направление и положение которого зависят от вида нагрузки, как пока-

<sup>1</sup> Этот способ впервые предложен в 1965 г. кандидатом технических наук С. В. Рабиновичем в статье «Определение перемещений в балках ступенчато-переменного сечения по методу Мора с применением способа перемножения моментных факторов» (В сб.: «Расчеты на прочность», вып. 11. М., 1965).



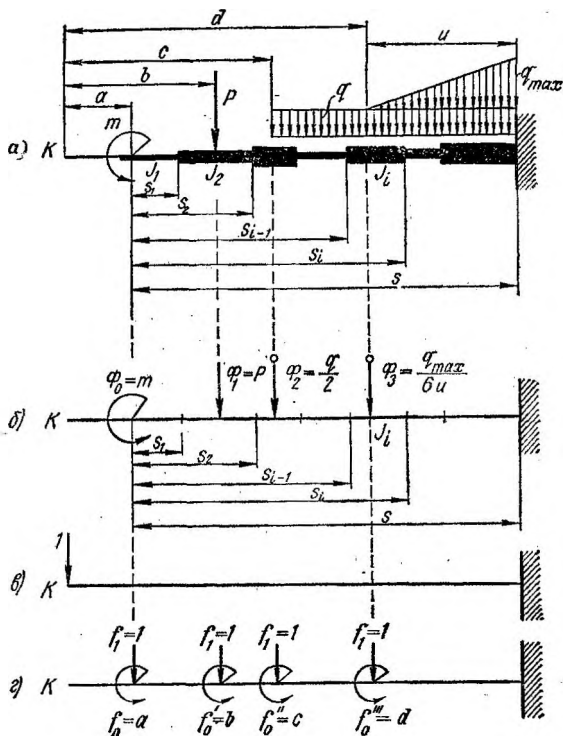


РИС. 7.46

зано на схеме грузовых моментных факторов, т. е.  $\Phi_0 = m$ ;  $\Phi_1 = P_1$ ;  $\Phi_2 = \frac{q}{2}$ ;  $\Phi_3 = \frac{q_{max}}{6u}$  (рис. 7.46, б). Для рассматриваемых

нагрузок индекс  $n$  может иметь значения 0, 1, 2 и 3;

$f_m$  — единичный моментный фактор  $m$ -го порядка в сечении балки, нагруженной единичным силовым фактором (рис. 7.46, в), под точкой приложения грузового моментного фактора. Индекс  $m$  может иметь значения 0 и 1 (см. схему единичных моментных факторов на рис. 7.46, г);

$$D_r = \frac{1}{r} \sum \frac{s_i^r - s_{i-1}^r}{j_i} —$$
 геометрический фактор  $r$ -го порядка, зависящий от размеров ступеней бруса;  $r = n + m + 1$ , а  $s_i$  и  $s_{i-1}$  — расстояния от точки приложения рассматриваемого силового фактора до конца и начала  $i$ -й ступени (на рис. 7.46, б эти расстояния показаны только для одного моментного фактора  $\Phi_0$ );  $j_i = \frac{EJ_i}{EJ_0}$  — относительная жесткость  $i$ -й ступени бруса. В частном случае, когда брус имеет постоянную жесткость,  $D_r = \frac{s^r}{r}$ .

Произведение факторов  $\Phi_n/m$  берут со знаком плюс, если они изгибают балку в одном и том же направлении, и со знаком минус — в противоположных.

Для определения углового перемещения в любом сечении следует в этом сечении приложить единичный момент.

**Пример 7.23.** Балка постоянного сечения длиной  $l$ , зашлепленная одним концом, изгибается сосредоточенной силой  $P$ , приложенной на свободном конце (рис. 7.47, а). Найти прогиб свободного конца.

Решение. По методу Мора освобождаем балку от заданной нагрузки и прикладываем в сечении  $K$  вертикально направленную силу, равную единице (рис. 7.47, б).

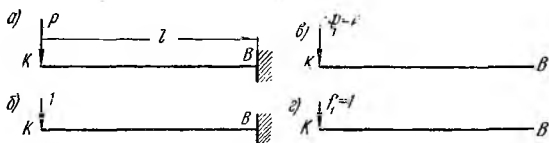


РИС. 7.47

Схемы грузовых и единичных моментных факторов изображены на рис. 7.47, в и г.

По формуле 7.29 находим:

$$EJ\Delta_K = \Phi_1 f_1 D_3 = P \cdot 1 \cdot \frac{l^3}{3}; \Delta_K = y_K = \frac{Pl^3}{3EJ}.$$

Знак плюс указывает на то, что перемещение сечения  $K$  происходит в направлении приложенной единичной силы.

**Пример 7.24.** Определить угол поворота опорного сечения  $B$  для балки, свободно лежащей на двух опорах и нагруженной сплошной нагрузкой, распределенной по закону треугольника (рис. 7.48, а);  $EJ = \text{const}$ .

Решение. Освободим балку от заданной нагрузки и приложим в сечении *B* единичный момент (рис. 7.48, б). Схемы грузовых и единичных моментных факторов показаны на рис. 7.48, в и г.

По формуле 7.29 определяем:

$$EJ\theta_B = \Phi_{1/1}D_3 - \Phi_{3/1}D_6 = \frac{ql}{6} \cdot \frac{1}{l} \cdot \frac{l^3}{3} - \frac{q}{6l} \cdot \frac{1}{l} \cdot \frac{l^3}{5} =$$

$$= ql^3 \left( \frac{1}{18} - \frac{1}{30} \right) = \frac{ql^3}{45}.$$

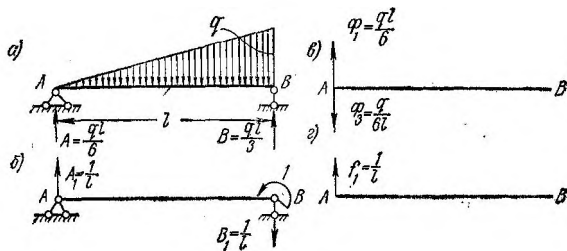


РИС. 7.48

Пример 7.25. Определить максимальный прогиб для балки постоянного сечения, показанной на рис. 7.49, а.

Решение. Максимальный прогиб будет, очевидно, в сечении *C*. Равномерно распределенную нагрузку интенсивностью  $q$ , действующую на левую и правую части балки, продолжаем до исследуемого

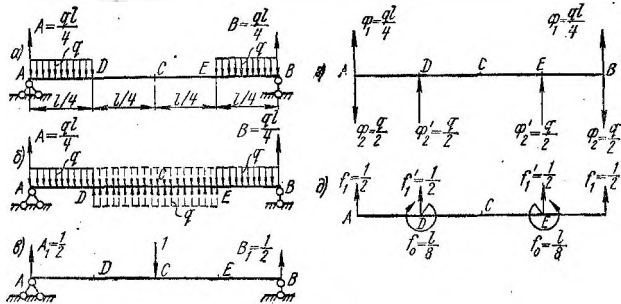


РИС. 7.49

сечения *C* и прикладываем компенсирующую нагрузку той же интенсивности, но противоположного знака (рис. 7.49, б). К балке, освобожденной от заданной нагрузки, прикладываем в сечении *C* единичную силу (рис. 7.49, в).

Единичная сила *C* делит балку на два участка: *AC* и *BC*, и в данном случае целесообразно производить перемножение моментных

факторов (рис. 7.49,  $\alpha$  и  $\delta$ ), подходя к точке  $C$  с двух сторон. Вследствие симметрии перемножаем факторы [по формуле (7.29)] с одной стороны и результат удваиваем:

$$\begin{aligned} EJy_C &= 2(\Phi_1 f_1 D_3^{AC} - \Phi_2 f_1 D_4^{AC} + \Phi_2' f_0 D_3^{DC} + \Phi_2' f_1 D_4^{DC}) = \\ &= 2 \left[ \frac{ql}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \left(\frac{l}{2}\right)^3 - \frac{q}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \left(\frac{l}{2}\right)^4 + \frac{q}{2} \cdot \frac{l}{8} \cdot \frac{1}{3} \left(\frac{l}{4}\right)^3 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{q}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \left(\frac{l}{4}\right)^4 \right] = \frac{23}{6144} ql^4. \end{aligned}$$

**Пример 7.26.** Для балки с участками, имеющими различные жесткости, определить прогиб сечения  $C$  (рис. 7.50,  $a$ ).

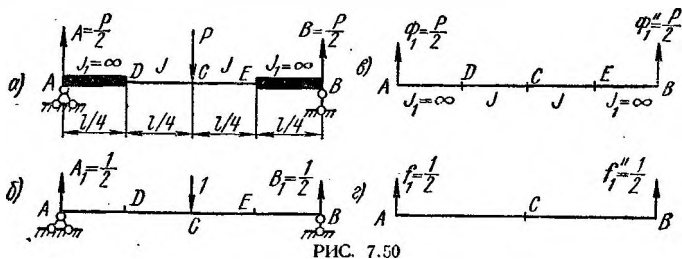


РИС. 7.50

**Решение.** Как и в примере 7.25, перемножаем моментные факторы (рис. 7.50,  $\delta$  и  $\epsilon$ ), подходя к точке  $C$  с двух сторон. Учитывая симметрию, можно идти с одной стороны и результат удвоить. Приняв  $J_0 = J$ , получим  $f_1 = \frac{EJ_1}{EJ_0} = \infty$ ;  $f_2 = \frac{EJ_2}{EJ_0} = \frac{EJ}{EJ} = 1$ . По формуле (7.29) имеем:

$$\begin{aligned} EJy_C &= 2\Phi_1 f_1 D_3^{AC} = 2 \frac{P}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \left[ \frac{\left(\frac{l}{4}\right)^3}{\infty} + \frac{\left(\frac{l}{2}\right)^3 - \left(\frac{l}{4}\right)^3}{1} \right] = \\ &= \frac{Pl^3}{6} \left( \frac{1}{8} - \frac{1}{64} \right) = \frac{7}{384} Pl^3; \quad y_C = \frac{7Pl^3}{384EJ}. \end{aligned}$$

**Пример 7.27.** Для консоли, нагруженной на свободном конце сосредоточенным моментом  $m$ , определить прогиб сечения  $C$ ;  $EJ = \text{const}$  (рис. 7.51,  $a$ ).

**Решение.** Схемы грузовых и единичных моментных факторов показаны на рис. 7.51,  $\delta$  и  $\epsilon$ . На участке  $AC$  (рис. 7.51,  $\delta$ ) интеграл Мора равен нулю, и в этом случае геометрический фактор следует определять только в пределах участка  $CB$ :

$$\begin{aligned} EJy_C &= \Phi_0 f_0 D_1^{CB} - \Phi_0 f_1 D_2^{CB} = ma(l-a) - \frac{m \cdot l(l^2 - a^2)}{2} = \\ &= m(l-a) \left( a - \frac{l+a}{2} \right) = -m(l-a) \frac{(l-a)}{2} = -\frac{mb^2}{2}. \end{aligned}$$

Еще проще можно получить искомый результат, если грузовой моментный фактор  $\Phi_0$  перенести в сечение  $C$  (рис. 7.51,  $\delta$  и  $e$ ), тогда

$$EJy_C = -\Phi_0 f_1 D_2^{CB} = -m \cdot 1 \frac{b^2}{2}.$$

Знак минус указывает на то, что линейное перемещение точки  $C$  происходит в сторону, обратную направлению единичной силы, т. е. вверх.

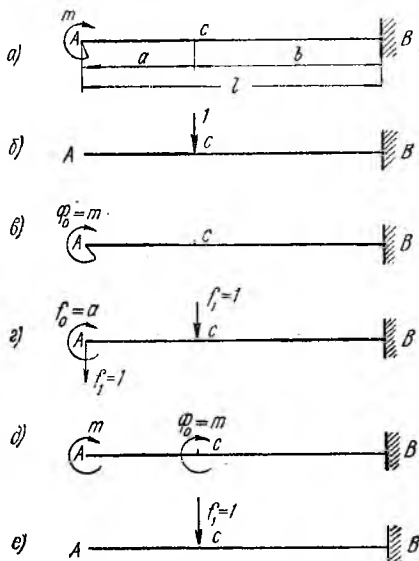


РИС. 7.51

**Пример 7.28.** Определить прогиб свободного конца консоли ступенчато-переменного сечения, нагруженной распределенной нагрузкой по закону треугольника с максимальной интенсивностью  $q$  (рис. 7.52,  $a$ )

Решение.

1. По способу Верещагина

Для балки на рис. 7.52,  $b$  дана грузовая эпюра ( $M_P$ ), т. е. эпюра моментов от заданной нагрузки, а на рис. 7.52,  $ж$  — эпюра моментов  $M_1$  от единичной силы, приложенной по вертикали в сечении  $A$  балки, освобожденной от заданной нагрузки.

На втором и третьем участках балки эпюры  $M_P$  расслоены на четыре более простые эпюры (рис. 7.52,  $в, г, д, е$ ), центры тяжести и площади которых определяются по табличным данным (см. табл. 7.5.). Значения величин площадей  $\omega_i$  грузовой эпюры и ординат  $\eta_i$  единичной эпюры даны в следующей таблице:

$l$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\omega_l$	$\frac{qa^3}{72}$	$\frac{qa^3}{72}$	$\frac{qa^3}{18}$	$\frac{qa^3}{12}$	$\frac{qa^3}{18}$	$\frac{qa^3}{72}$	$\frac{2qa^3}{18}$	$\frac{2qa^3}{6}$	$\frac{8qa^3}{18}$
$\eta_l$	$\frac{4}{5}a$	$\frac{9}{5}a$	$\frac{7}{4}a$	$\frac{5}{3}a$	$\frac{3}{2}a$	$\frac{14}{5}a$	$\frac{11}{4}a$	$\frac{8}{3}a$	$\frac{5}{2}a$

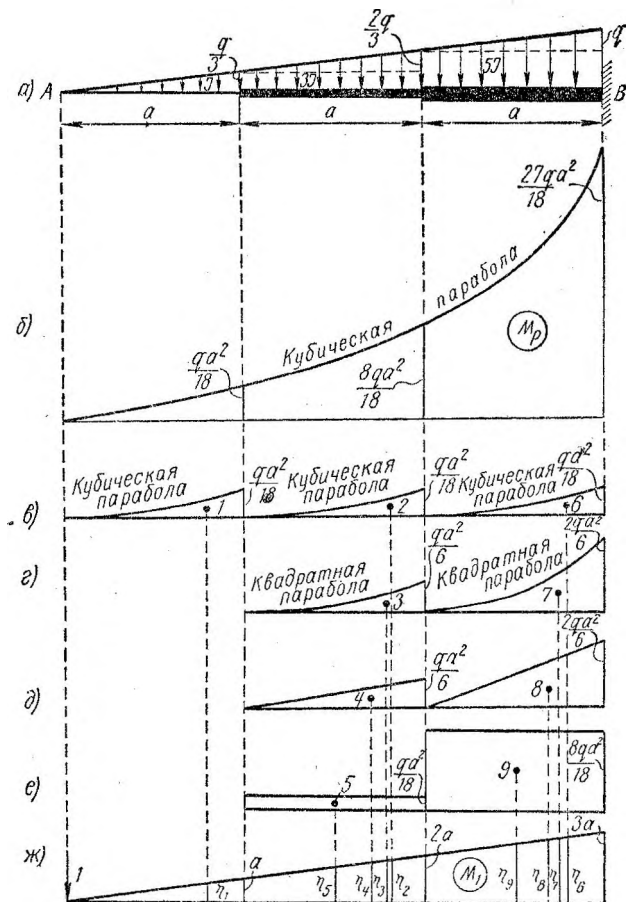


РИС. 7.52

Прогиб сечения  $A$  получим, разделив сумму произведений  $\omega_i \eta_i$  на каждом участке на жесткость соответствующего участка:

$$y_A = \frac{\omega_1 \eta_1}{EJ} + \frac{\omega_2 \eta_2 + \omega_3 \eta_3 + \omega_4 \eta_4 + \omega_5 \eta_5}{3EJ} +$$

$$+ \frac{\omega_6 \eta_6 + \omega_7 \eta_7 + \omega_8 \eta_8 + \omega_9 \eta_9}{5EJ};$$

$$y_A = \frac{qa^4}{EJ} \left( \frac{1}{72} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{1} + \frac{1}{72} \cdot \frac{9}{5} + \frac{1}{18} \cdot \frac{7}{4} + \frac{1}{12} \cdot \frac{5}{3} + \frac{1}{18} \cdot \frac{3}{2} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{72} \cdot \frac{14}{5} + \frac{2}{18} \cdot \frac{11}{4} + \frac{2}{6} \cdot \frac{8}{3} + \frac{8}{18} \cdot \frac{5}{2} \right) =$$

$$= \frac{qa^4}{1080EJ} (12 + 9 + 35 + 50 + 30 + 8,4 + 66 + 192 + 240) =$$

$$= \frac{642,4qa^4}{1080EJ}.$$

$$y_A \approx \frac{0,595qa^4}{EJ}.$$

2. По способу перемножения моментных факторов (рис. 7.53, а) Освобождаем балку от заданной нагрузки и нагружаем ее единичной силой в точке  $A$  (рис. 7.53, б).

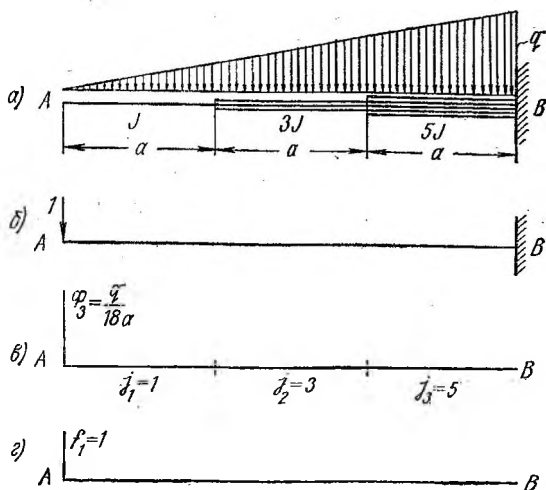


РИС. 7.53

Схемы расположения грузового и единичного моментных факторов даны на рис. 7.53, в и г.

По формуле (7.29)

$$\begin{aligned}
 EJy_A &= \Phi_3 f_1 D_6 = \frac{q}{18a} \cdot \frac{1}{5} \left( \frac{a^5}{1} + \frac{(2a)^5 - a^5}{3} - \frac{(3a)^5 - (2a)^5}{5} \right) = \\
 &= \frac{qa^4}{1350} (15 + 155 + 633) = \frac{803}{1350} qa^4; \quad y_A = \frac{0,595qa^4}{EJ}.
 \end{aligned}$$

В рассматриваемом примере

$$\begin{aligned}
 J_0 &= J; \quad s_1 = a; \quad s_2 = 2a; \quad s_3 = 3a; \\
 i_1 &= 1; \quad i_2 = 3; \quad i_3 = 5;
 \end{aligned}$$



ПРОСТЕЙШИЕ ПЛОСКИЕ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫЕ СТЕРЖНЕВЫЕ СИСТЕМЫ

§ 8.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

*Стержневой системой* называется сооружение, состоящее из стержней (или брусьев). Стержень является частным случаем стержневой системы.

Стержневые системы по способу их образования разделяют на:

1) *геометрически неизменяемую* — систему соединенных между собой тел, не допускающую относительного перемещения ее частей без их деформации (рис. 8.1, а);

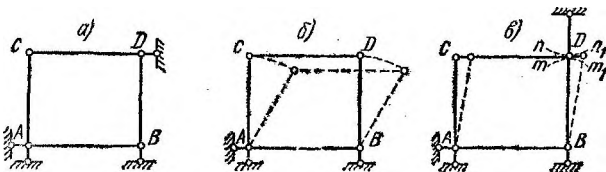


РИС. 8.1

2) *геометрически изменяемую* — систему соединенных между собой тел, допускающую относительное перемещение ее частей без их деформации (рис. 8.1, б);

3) *мгновенно изменяемую* — систему соединенных между собой тел, допускающую лишь бесконечно малое относительное перемещение ее частей без их деформации (рис. 8.1, в).

В несущих конструкциях применяются только геометрически неизменяемые системы.

Наиболее распространенными основными типами стержневых конструкций являются рамы и фермы.

*Рамой* называется стержневая система с жестко связанными между собой во всех или некоторых узлах стержнями, которая теряет геометрическую неизменяемость, если все узлы заменены шарнирными.

*Фермой* называется стержневая система, остающаяся геометрически неизменяемой, если в ней все жесткие узлы заменены шарнирными. Стержневая геометрически неизменяемая система, у которой все узлы шарнирные, называется *шарнирной фермой*.

У рамы стержни, ее составляющие, в основном работают на изгиб, а у фермы — на растяжение или сжатие.

### § 8.2. СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫЕ СИСТЕМЫ. СТЕПЕНЬ СТАТИЧЕСКОЙ НЕОПРЕДЕЛИМОСТИ

*Статически неопределимой стержневой системой* называется такая геометрически неизменяемая система, у которой опорные реакции или все внутренние суммарные силовые факторы, возникающие в сечениях ее элементов при действии произвольной нагрузки, не могут быть определены из уравнений равновесия статики.

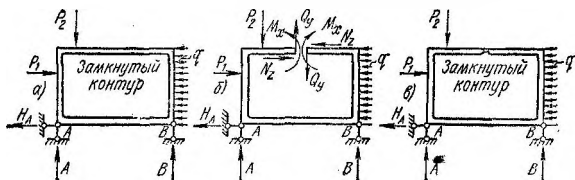


РИС. 8.2

Статически неопределимые системы имеют так называемые избыточные, или лишние, связи. *Избыточными* или *лишними связями* называются связи, которые имеются в системе сверх необходимых и могут быть удалены из системы без нарушения ее геометрической неизменяемости и неподвижности.

Усилия, возникающие в лишней связи, называются *лишними неизвестными*. За лишние связи не могут быть приняты *абсолютно необходимые связи*,<sup>1</sup> т. е. такие связи, удаление которых из статически неопределимой конструкции превращает ее в геометрически изменяемую.

Некоторые авторы различают внешне статически неопределимые системы с лишними *внешними связями* (опорными закреплениями) и внутренне статически неопределимые системы с лишними *внутренними связями* (ограничениями, накладываемыми на взаимные смещения элементов системы).

Такое различие для систем с лишними опорными связями имеет условный характер, так как для таких систем степень внутренней и внешней статической неопределимости зависит от того, какие связи принимаются за лишние.

На рис. 8.2, а показана рама в виде замкнутого контура, опирающаяся на три опорных стержня. При произвольной внешней нагрузке реакции опор  $A$ ,  $H_A$  и  $B$  могут быть определены из трех уравнений равновесия статики, и система является внешне статически определенной. Разрежем горизонтальный стержень рамы (рис. 8.2, б). В сечении в общем случае возникают три неизвестных внутренних силовых фактора  $M_x$ ,  $Q_y$  и  $N_x$ , которые не могут быть определены из уравнений равновесия, и замкнутая рама является, таким образом, трижды внутренне статически неопределимой. Степень статической

<sup>1</sup> Термины «абсолютно необходимая связь» и «условно необходимая связь» введены проф. И. М. Рабиновичем в его работе «К теории статически неопределимых ферм». М., 1933.

неопределенности рамы, состоящей из  $K$  замкнутых контуров, равна  $3K_{\text{зам}}$ .

Замкнутая рама с промежуточным шарниром (рис. 8.2, в) является дважды статически неопределимой, так как шарнир, соединяющий два стержня (рис. 8.3, а), допускает взаимный их поворот (изгибающий момент в шарнире равен нулю) и снижает степень стати-



РИС. 8.3

ческой неопределенности на единицу. Такой шарнир называется *одиночным* или *простым*. Если шарнир соединяет  $n$  стержней ( $n > 2$ ), то такой шарнир (рис. 8.3, б) называют *общим* или *сложным*. Он эквивалентен  $n - 1$  простым шарнирам и снижает степень статической неопределенности на  $n - 1$ .

Число лишних неизвестных, или полную степень статической неопределенности плоской системы, можно определять по формуле

$$L = (C_{\text{оп}} - 3) + 3K - Ш, \quad (8.1)$$

где  $L$  — число лишних неизвестных (степень статической неопределенности);

$C_{\text{оп}}$  — число опорных стержней;

$K$  — количество замкнутых контуров в предположении полного отсутствия шарниров;

$Ш$  — количество одиночных (простых) шарниров.

Количество лишних неизвестных (связей) шарнирно-стержневой фермы определяется по формуле

$$L = C + C_{\text{оп}} - 2У, \quad (8.2)$$

где  $C$  — число стержней фермы;

$C_{\text{оп}}$  — число опорных стержней;

$У$  — количество узлов, связывающих стержни фермы друг с другом.

Для рамы (рис. 8.4)  $C_{\text{оп}} = 5$  (закрепление эквивалентно трем опорным стержням),  $K = 2$ ,  $Ш = 2$  и степень ее статической неопределенности

$$L = 5 - 3 + 3 \cdot 2 - 2 = 6.$$

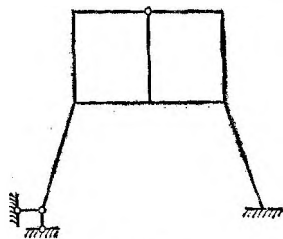


РИС. 8.4

Для балки (рис. 8.5)  $C_{\text{оп}} = 6$ ,  $K = 0$ ,  $Ш = 1$  и степень ее статической неопределимости

$$L = 6 - 3 - 1 = 2.$$

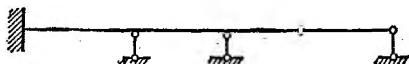


РИС. 8.5

### § 8.3. ОСНОВНАЯ И ЭКВИВАЛЕНТНАЯ СИСТЕМЫ. КАНОНИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ МЕТОДА СИЛ

Для расчета статически неопределимых систем существует несколько методов. Основными являются метод сил и метод перемещений (деформаций). В дальнейшем рассматривается только метод сил, имеющий наибольшее распространение в машиностроении.

*Методом сил* называется метод определения усилий и перемещений в статически неопределимой системе, при котором в качестве основных неизвестных выбираются силы (усилия или реакции связей).

«Основными являются те неизвестные, которые должны быть найдены в первую очередь и при посредстве которых, после того как они найдены, легко определяются все остальные неизвестные» [46].

*Основной* называется статически определимая, геометрически неизменяемая система, полученная из заданной (исходной) статически неопределимой путем удаления действующей заданной нагрузки и лишних связей (внешних или внутренних). Так как за лишние связи могут быть приняты различные связи, как внешние, так и внутренние, то при выборе основной системы для заданной возможны различные варианты.

Взамен отброшенных связей вводятся неизвестные силовые факторы  $X_1, X_2, X_3, X_4, \dots, X_n$ , представляющие собой реакции связей. Отброшенная связь, препятствующая линейному перемещению сечения, заменяется силой, а препятствующая угловому перемещению, — моментом.

Основная система, нагруженная заданной внешней нагрузкой и силами, заменяющими действие отброшенных связей, называется *эквивалентной* по отношению к заданной статически неопределимой системе.

В эквивалентной и заданной системах усилия, возникающие в соответствующих сечениях, и их перемещения тождественны.

Неизвестные силовые факторы определяются из условий перемещений. В дальнейшем перемещения (линейные и угловые) будем обозначать от заданной нагрузки через  $\Delta$ , а от нагрузки, равной единице (единичной нагрузки), через  $\delta$  с двумя индексами внизу. Первый индекс при  $\Delta$  и  $\delta$  указывает точку и направление перемещения, а второй — причину перемещения. Так, например,  $\Delta_{ik}$  — перемещение по направлению силы  $P_i$  под действием силы  $P_k$ , а  $\delta_{ik}$  — перемещение по направлению силы  $P_i$  под действием силы  $P_k = 1$ . Учитывая линейную зависимость между силами и соответствующими

перемещениями, можно представить перемещение  $\Delta_{ik}$  как произведение силы  $P_k$  на перемещение от единичной силы  $\delta_{ik}$ :

$$\Delta_{ik} = P_k \delta_{ik}. \quad (8.3)$$

Перемещения будем определять по формуле Мора (7.24) с использованием, где это возможно, правила Верещагина [см. формулу (7.28)].

При расчете статически неопределимых систем очень большое практическое значение имеет установленная Максвеллом теорема о взаимности перемещений, которая гласит: «Перемещение в направ-

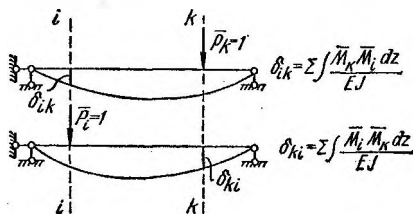


РИС. 8.6

лении  $i$  от единичного силового фактора  $k$  равно перемещению в направлении  $k$  от единичного фактора  $i$ » (рис. 8.6):

$$\delta_{ik} = \delta_{ki}. \quad (8.4)$$

Доказательство этой теоремы непосредственно следует из сопоставления интегралов Мора для определения  $\delta_{ik}$  и  $\delta_{ki}$ .

Неизвестные силовые факторы ( $X_1, X_2, X_3, \dots, X_i, \dots, X_n$ ) определяются из уравнений перемещений для эквивалентной системы, исходя из условий, которые накладываются связями заданной статически неопределимой системы на перемещения эквивалентной системы, а именно: абсолютные перемещения по направлению лишних неизвестных, вызванные абсолютно жесткими внешними связями, и взаимные перемещения по направлению лишних неизвестных, вызванные внутренними связями, равны нулю.

Отсутствие перемещения в эквивалентной системе по направлению любой неизвестной  $X_i$  под действием всех заданных и лишних неизвестных сил на основании принципа независимости действия сил и формулы (8.3) может быть записано в следующем виде:

$$\begin{aligned} \Delta_i [X_1, X_2, \dots, X_i, \dots, X_n, P] &= \Delta_{iX_1} + \Delta_{iX_2} + \\ &+ \dots + \Delta_{iX_i} + \dots + \Delta_{iX_n} + \Delta_{iP} = X_1 \delta_{i1} + X_2 \delta_{i2} + \\ &+ \dots + X_i \delta_{ii} + \dots + X_n \delta_{in} + \Delta_{iP} = 0. \end{aligned} \quad (8.5)$$

В формуле (8.5) через  $P$  обозначены все внешние силовые факторы, действующие на систему.

Если система имеет  $n$  лишних неизвестных, т. е.  $n$  раз статически неопределима, то можно написать  $n$  уравнений перемещений, аналогичных уравнению (8.5):

$$\left. \begin{aligned} X_1 \delta_{11} + X_2 \delta_{12} + \dots + X_i \delta_{1i} + \dots + X_n \delta_{1n} + \Delta_{1P} &= 0; \\ X_1 \delta_{21} + X_2 \delta_{22} + \dots + X_i \delta_{2i} + \dots + X_n \delta_{2n} + \Delta_{2P} &= 0; \\ X_1 \delta_{i1} + X_2 \delta_{i2} + \dots + X_i \delta_{ii} + \dots + X_n \delta_{in} + \Delta_{iP} &= 0; \\ \dots & \\ X_1 \delta_{n1} + X_2 \delta_{n2} + \dots + X_i \delta_{ni} + \dots + X_n \delta_{nn} + \Delta_{nP} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (8.6)$$

Уравнения (8.6), составленные по определенному правилу (канону), называются *каноническими уравнениями метода сил*.

В сокращенном виде канонические уравнения метода сил могут быть записаны так:

$$\Delta_i = \sum_{k=1}^n X_k \delta_{ik} + \Delta_{iP} = 0, \quad (8.6a)$$

где  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ .

Канонические уравнения метода сил представляют собой систему  $n$  линейных неоднородных алгебраических уравнений с  $n$  неизвестными. Решив эту систему, определим все неизвестные и раскроем статическую неопределимость заданной стержневой конструкции.

#### § 8.4. ВЫЧИСЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ И СВОБОДНЫХ ЧЛЕНОВ КАНОНИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Для решения канонических уравнений метода сил необходимо предварительно вычислить коэффициенты при неизвестных (единичные перемещения)  $\delta_{ik}$ , которые не зависят от заданной нагрузки, и свободные члены (грузовые перемещения)  $\Delta_{iP}$ , зависящие от заданной нагрузки.

Единичные перемещения с одинаковыми индексами называются *главными*, а с разными индексами — *побочными*. Главные перемещения ( $\delta_{ii}$ ) всегда положительны, а побочные ( $\delta_{ik}$ ) и грузовые перемещения ( $\Delta_{iP}$ ) могут быть положительными, отрицательными и равными нулю.

В  $n$  канонических уравнениях имеется  $n$  свободных членов (грузовых перемещений) и  $n^2$  коэффициентов при неизвестных (единичных перемещений), из них главных перемещений  $n$  и побочных  $n(n-1)$ . На основании теоремы о взаимности перемещений побочные перемещения, расположенные симметрично относительно главной диагонали, равны друг другу:  $\delta_{ik} = \delta_{ki}$ . Поэтому необходимо определить только  $\frac{n(n-1)}{2}$  побочных перемещений.

Вычисляя коэффициенты при неизвестных и свободных членах канонических уравнений, для балок и рам большей частью учитывают только изгибающие моменты, а влиянием поперечных и продольных сил на величину перемещений пренебрегают и пользуются формулой Мора (7.26):

$$\left. \begin{aligned} \delta_{ik} &= \sum \int \frac{\bar{M}_i \bar{M}_k ds}{EJ}; \\ \delta_{ii} &= \sum \int \frac{\bar{M}_i^2 ds}{EJ}; \\ \Delta_{iP} &= \sum \int \frac{M_P \bar{M}_i ds}{EJ}. \end{aligned} \right\} \quad (8.7)$$

Если конструкция состоит из прямолинейных стержней, то интеграл Мора проще вычислить графо-аналитически по правилу перемножения эпюр (правило Верещагина). Для этого необходимо построить одну грузовую эпюру моментов  $M_P$  для основной системы, нагруженной заданной нагрузкой, и  $n$  единичных эпюр ( $\bar{M}_i$ ) для той же системы, нагруженной поочередно только одной единичной силой  $\bar{X}_i = 1$ , где  $i = 1, 2, 3, \dots, n$  ( $n$  — степень статической неопределимости системы).

Единичные перемещения  $\delta_{ik}$  вычисляются перемножением единичных эпюр  $\bar{M}_i$  и  $\bar{M}_k$ , а грузовые перемещения  $\Delta_{iP}$  — перемножением единичной эпюры  $\bar{M}_i$  на грузовую  $M_P$ .

При вычислении главных перемещений  $\delta_{ii}$  площадь и ординату следует брать из одной и той же эпюры  $\bar{M}_i$  или, как говорят, надо эпюру  $\bar{M}_i$  умножить саму на себя.

При вычислении коэффициентов и свободных членов канонических уравнений возможны ошибки вследствие неправильного построения единичных и грузовой эпюр для основной системы и неправильного перемножения эпюр по правилу Верещагина. Для проверки правильности вычисления коэффициентов и свободных членов канонических уравнений следует построить для основной системы, нагруженной всеми единичными силовыми факторами, так называемую суммарную эпюру единичных моментов:

$$\bar{M}_s = \bar{M}_1 + \bar{M}_2 + \dots + \bar{M}_i + \dots + \bar{M}_n. \quad (8.8)$$

Эпюру  $\bar{M}_s$  рекомендуется строить независимо от единичных эпюр, а не путем сложения последних, когда проверяется только правильность подсчета коэффициентов по готовым эпюрам.

Тогда

$$\begin{aligned} \delta_{si} &= \sum \int \frac{\bar{M}_s \bar{M}_i ds}{EJ} = \\ &= \sum \int \frac{(\bar{M}_1 + \bar{M}_2 + \dots + \bar{M}_i + \dots + \bar{M}_n) M_i ds}{EJ} = \\ &= \delta_{i1} + \delta_{i2} + \dots + \delta_{ii} + \dots + \delta_{in}, \end{aligned} \quad (8.9)$$

т. е. произведение суммарной эпюры  $\bar{M}_s$  на единичную эпюру  $\bar{M}_i$  ст  $\bar{X}_i = 1$  равно сумме коэффициентов  $i$ -го канонического уравнения. Эта проверка называется *постройной*.

Аналогично

$$\delta_{ss} = \sum \int \frac{M_s^2 ds}{EJ} =$$

$$= \sum \int \frac{(\bar{M}_1 + \bar{M}_2 + \dots + \bar{M}_i + \dots + \bar{M}_n) (\bar{M}_1 + \bar{M}_2 + \dots + \bar{M}_i + \dots + \bar{M}_n) ds}{EJ}.$$

После раскрытия скобок получим

$$\delta_{ss} = \sum_{\substack{l=1, 2, \dots, n \\ k=1, 2, \dots, n}} \delta_{lk} = \sum \delta_{ii} + \sum_{l \neq k} \delta_{lk}. \quad (8.10)$$

Таким образом, произведение суммарной единичной эпюры самой на себя равно сумме всех коэффициентов. Такая проверка называется *универсальной проверкой всех единичных перемещений*.

Для проверки свободных членов (грузовых перемещений) проводится постолбцовая проверка на основании следующего равенства:

$$\Delta_{sP} = \sum \int \frac{(\bar{M}_1 + \bar{M}_2 + \dots + \bar{M}_i + \dots + \bar{M}_n) M_P ds}{EJ} =$$

$$= \Delta_{1P} + \Delta_{2P} + \dots + \Delta_{iP} + \dots + \Delta_{nP}. \quad (8.11)$$

Произведение суммарной единичной эпюры на грузовую дает сумму всех свободных членов.

После подстановки коэффициентов и свободных членов в канонические уравнения, решив последние, находим значения лишних неизвестных. Для проверки правильности решения канонических уравнений следует найденные значения лишних неизвестных подставить в каждое каноническое уравнение и убедиться, что в пределах точности расчета они обращаются в тождество.

Если степень статической неопределимости  $n > 3$ , то решение системы канонических уравнений является весьма трудоемкой частью расчета, и в этом случае для сокращения работы применяют специальные методы решения канонических уравнений: метод последовательных приближений (способ итерации) и метод (алгоритм) Гаусса, изложенные в работах [14, 20, 29].

Современная машинная вычислительная техника позволяет механизировать вычислительные процессы. При помощи быстродействующих электронных вычислительных машин (ЭВМ) решение системы канонических уравнений с большим числом неизвестных не представляет трудностей. В настоящее время на ЭВМ рассчитываются системы с сотнями неизвестных.

Обзор работ советских и зарубежных ученых и литературу по применению ЭВМ к расчету строительных конструкций см. в кн.: Болотин В., Гольденблат И., Смирнов А. Современные проблемы строительной механики. М., 1964.

Значительное сокращение вычислительной работы может быть достигнуто также рациональным выбором варианта основной системы,



которая лежит в основе всего дальнейшего расчета по методу сил. Основная система считается выбранной удачно, если она удовлетворяет следующим существенным требованиям:

1) возможно большее количество побочных перемещений обращается в нуль. В идеальном случае все побочные перемещения равны нулю, и система канонических уравнений приводится к  $n$  уравнениям с одним неизвестным в каждом:

$$\begin{aligned} X_1 \delta_{11} + \Delta_{1P} &= 0; \\ X_2 \delta_{22} + \Delta_{2P} &= 0; \\ \dots &\dots \\ X_i \delta_{ii} + \Delta_{iP} &= 0; \\ \dots &\dots \\ X_n \delta_{nn} + \Delta_{nP} &= 0; \end{aligned}$$

2) она должна быть наиболее простой для расчета, и построенные для нее эпюры единичных и грузовых моментов должны иметь относительно наименьшую протяженность.

#### § 8.5. ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮР ИЗГИБАЮЩИХ МОМЕНТОВ, ПОПЕРЕЧНЫХ И ПРОДОЛЬНЫХ СИЛ

После определения лишних неизвестных построение окончательной (суммарной) эпюры изгибающих моментов  $M_x$  производится двумя способами.

*1-й способ.* Основная система нагружается заданной нагрузкой и найденными силами  $X_1, X_2, \dots, X_i, \dots, X_n$ , направление которых берется с учетом их знаков. Для полученной эквивалентной системы строится эпюра изгибающих моментов обычным способом, как для любой статически определимой системы. Эта эпюра является одновременно также и эпюрой  $M_x$  для заданной статически неопределимой системы, которая тождественна эквивалентной.

*2-й способ (способ наложения).* Предварительно нужно построить так называемые исправленные эпюры от известных сил  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , которые получаютя перемножением ординат единичных эпюр на соответствующие найденные значения неизвестных с учетом их знаков. На основании принципа независимости действия сил изгибающий момент в любом сечении

$$M_x = M_P + X_1 \bar{M}_1 + X_2 \bar{M}_2 + \dots + X_i \bar{M}_i + \dots + X_n \bar{M}_n, \quad (8.12)$$

где  $M_P$  — изгибающий момент в любом сечении основной системы, только от заданной нагрузки;

$X_i \bar{M}_i = M_{x_i}$  — изгибающий момент в том же сечении основной системы только от силы  $X_i$ .

Для получения окончательной эпюры  $M_x$ , как видно из выражения (8.12), следует с учетом знаков наложить на эпюру  $M_P$  «исправленные» эпюры. Определив значения изгибающих моментов в характерных сечениях системы, строят эпюру  $M_x$  на сжатых волокнах.

Окончательные эпюры поперечных и продольных сил легко построить для эквивалентной системы, как для всякой статически определимой системы. Эти эпюры и будут эпюрами  $Q_y$  и  $N_z$  для заданной статически неопределимой системы. Для определения величин  $Q_y$  и  $N_z$  в любом сечении стержня и их знаков следует руководствоваться указаниями, изложенными в § 7.4.

Построенные окончательные эпюры  $M_x$ ,  $Q_y$  и  $N_z$  необходимо проверить. Особое внимание следует обратить на правильность построения эпюры изгибающих моментов, которая является исходной и основной.

Правильно построенные эпюры должны удовлетворять условию равновесия и условию деформации заданной системы. В связи с этим различают статическую и деформативную проверку правильности окончательных эпюр.

*Статическая проверка* заключается в проверке равновесия любого узла системы и любой ее части, полученной с помощью разреза, под действием внешних и внутренних силовых факторов, приложенных к выделенной части. Значения внутренних силовых факторов берут непосредственно из окончательных эпюр. Ограничиваться лишь статической проверкой окончательных эпюр нельзя, так как она контролирует только правильное суммирование эпюр и может удовлетворяться при ошибочно найденных значениях лишних неизвестных.

*Деформативная проверка* исходит из условия неразрывности перемещений в отдельных точках системы и позволяет контролировать как правильность окончательных эпюр, так и правильность значений вычисленных лишних неизвестных.

Так как у эквивалентной системы перемещения  $\Delta_i$  в направлении любого неизвестного  $X_i$  равно нулю, то отсюда следует, что интеграл Мора

$$\sum \int \frac{M_x \bar{M}_i ds}{EJ} = \Delta_i [X_1, X_2, \dots, X_i, \dots, X_n P] = 0$$

или по правилу Верещагина произведение окончательной (суммарной) эпюры моментов  $M_x$  на любую единичную эпюру  $\bar{M}_i$  основной системы (с учетом жесткостей) должно равняться нулю. Количество деформативных проверок соответствует степени статической неопределимости заданной системы. При проверке для большей надежности рекомендуется выбрать вариант основной системы, отличный от принятого в расчете.

Эпюры поперечных сил и изгибающих моментов должны удовлетворять дифференциальной зависимости между  $Q_y$  и  $M_x$ :

$$Q_y = \frac{dM_x}{dz}.$$

Это может служить проверкой окончательной эпюры  $Q_y$  после того, когда не обнаружено ошибок в эпюре  $M_x$ .

Эпюра  $N_z$  проверяется исследованием условий равновесия поперечных и продольных сил.

Для надежной проверки окончательных эпюр  $M_x$ ,  $Q_y$  и  $N_z$  можно также выбрать новый вариант основной системы и провести для него

расчет до конца. Окончательные эпюры, полученные при решении по обоим вариантам, должны полностью совпадать.

Расчет рам на прочность большей частью ведут из условия прочности по нормальным напряжениям, возникающим под действием изгибающих моментов и продольных сил.

**§ 8.6. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ В СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМАХ ОТ НАГРУЗКИ**

Для расчета статически неопределимой системы на жесткость необходимо уметь определять упругие перемещения (линейные и угловые) любого сечения системы.

После раскрытия статической неопределимости заданной системы перемещения определяют в эквивалентной ей статически определимой системе, так как окончательные эпюры и перемещения для заданной и эквивалентной систем одинаковы. Для этого необходимо в эквивалентной системе определить текущие значения внутренних силовых факторов, к основной системе приложить единичную силу (или единичный момент) в направлении искомого перемещения, определить текущие значения внутренних единичных силовых факторов  $M_i$ ,  $Q_i$  и  $N_i$  и воспользоваться формулой Мора (7.24):

$$\Delta_i = \sum \int \frac{M_x \bar{M}_i ds}{EJ} + \sum k \int \frac{Q_y \bar{Q}_i ds}{GF} + \sum \int \frac{N_z \bar{N}_i ds}{EF}$$

Для балок и рам, пренебрегая влиянием на перемещения поперечных и продольных сил, ограничиваются первым интегралом Мора:

$$\Delta_i = \sum \int \frac{M_x \bar{M}_i ds}{EJ}$$

При использовании правила Верещагина искомое перемещение определяется произведением окончательной (суммарной) эпюры моментов  $M_x$  на единичную  $\bar{M}_i$ . В качестве основной системы может быть принята любая геометрически неизменяемая статически определяемая система, получаемая из заданной путем удаления соответствующего количества лишних связей. Исходя из этого рекомендуется выбирать такой вариант основной системы, при котором построение эпюры от единичной нагрузки было возможно более простым.

В том случае, если необходимо определить взаимное перемещение линейное (или угловое) двух сечений, нужно две противоположные единичные силы (или два противоположных единичных момента) приложить в соответствующем направлении к основной системе и в дальнейшем определять перемещения обычным способом.

**§ 8.7. ПРИМЕРЫ РАСЧЕТА ПРОСТЕЙШИХ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ МЕТОДОМ СИЛ**

**Пример 8.1.** Построить эпюры  $M_x$ ,  $Q_y$ , и  $N_z$  и определить угол поворота сечения  $D$  для статически неопределимой рамы, показанной на рис. 8.7, а. Жесткость всех участков рамы на изгиб  $EJ = \text{const}$ .

Решение 1. Определяем степень статической неопределимости, или число лишних неизвестных, рамы по формуле (8.1):

$$L = (C_{оп} - 3) + 3K - Ш = 5 - 3 = 2,$$

т. е. рама дважды статически неопределима.

2. Для расчета берем основную систему, получаемую из заданной отбрасыванием лишних связей неподвижной шарнирной опоры В (рис. 8.7, б).

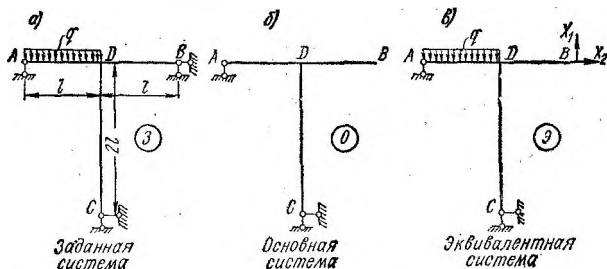


РИС. 8.7

3. Нагружаем основную систему заданной внешней нагрузкой и лишними неизвестными  $X_1$  и  $X_2$ , возникающими в лишних связях. Это и будет эквивалентная система (рис. 8.7, в).

4. Неизвестные силы  $X_1$  и  $X_2$  определяются из условий тождественности перемещений эквивалентной и заданной систем, что выражается следующими каноническими уравнениями метода сил:

$$X_1 \delta_{11} + X_2 \delta_{12} + \Delta_{1P} = 0;$$

$$X_1 \delta_{21} + X_2 \delta_{22} + \Delta_{2P} = 0.$$

Первое уравнение утверждает, что суммарное линейное перемещение по направлению  $X_1$  равно нулю, а, согласно второму, суммарное линейное перемещение по направлению  $X_2$  равно нулю.

5. Для вычисления грузовых и единичных перемещений ( $\Delta_{iP}$  и  $\delta_{ik}$ ) нагружаем основную систему поочередно заданной нагрузкой и каждой единичной силой  $\bar{X}_1 = 1$ ,  $\bar{X}_2 = 1$  (рис. 8.8, а, б и в) и строим грузовую и единичные эпюры моментов (рис. 8.9, а, б и в).

Перемещения определяем по правилу Верещагина перемножением соответствующих эпюр моментов. В дальнейшем для краткости операцию перемножения эпюр  $M_P$  и  $M_i$  будем условно обозначать в виде  $M_P \cdot M_i$ .

Грузовые перемещения  $\Delta_{1P}$  и  $\Delta_{2P}$  получаем перемножением эпюры  $M_P$  на эпюры  $\bar{M}_1$  и  $\bar{M}_2$ :

$$\Delta_{1P} = M_P \cdot \bar{M}_1 = \frac{1}{EJ} \cdot \frac{ql^3}{12} \cdot \frac{l}{2} = \frac{ql^4}{24EJ},$$

где  $\frac{ql^3}{12}$  — площадь эпюры  $M_P$ ;

$\frac{l}{2}$  — ордината эпюры  $\bar{M}_1$  (под центром тяжести площади эпюры  $M_P$ ).

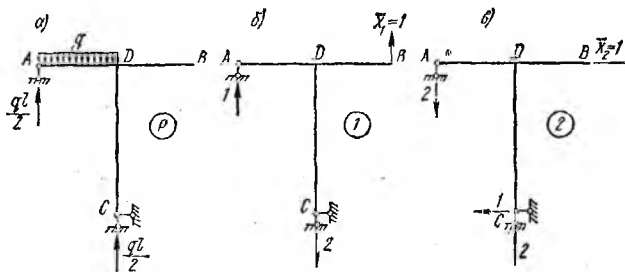


РИС. 8.8

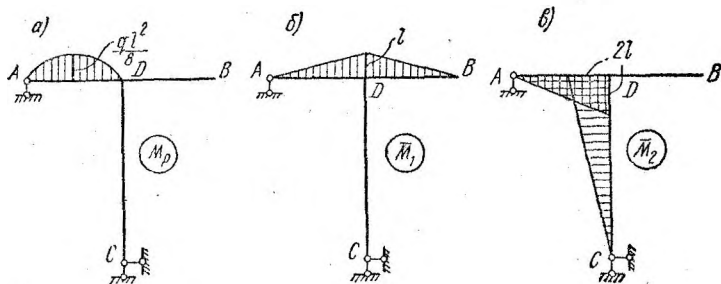


РИС. 8.9

Аналогично

$$\Delta_{2P} = M_P \cdot \bar{M}_2 = -\frac{1}{EJ} \cdot \frac{ql^3}{12} \cdot \frac{l}{2} = -\frac{ql^4}{12EJ}.$$

Главные перемещения  $\delta_{11}$  и  $\delta_{22}$  вычисляем перемножением эпюр  $\bar{M}_1$  и  $\bar{M}_2$  самих на себя:

$$\delta_{11} = \bar{M}_1 \cdot \bar{M}_1 = \frac{1}{EJ} \left( \frac{l^2}{2} \cdot \frac{2}{3} l \right) \cdot 2 = \frac{2l^3}{3EJ};$$

$$\delta_{22} = \bar{M}_2 \cdot \bar{M}_2 = \frac{1}{EJ} \left( l^2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2l + 2l^2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2l \right) = \frac{4l^3}{EJ}.$$

Перемножением эпюр  $\bar{M}_1$  и  $\bar{M}_2$  находим побочные перемещения:

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \bar{M}_1 \cdot \bar{M}_2 = -\frac{1}{EJ} \left( \frac{l^2}{2} \cdot \frac{2}{3} 2l \right) = -\frac{2l^3}{3EJ}.$$

Для проверки правильности вычисленных единичных и грузовых перемещений строим для основной системы, нагруженной одновре-

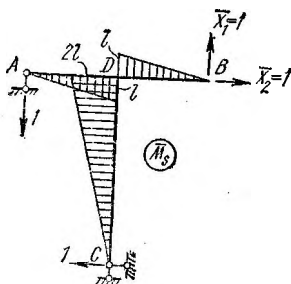


РИС. 8.10

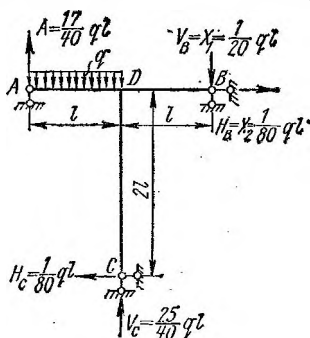


РИС. 8.11

менно силами  $\bar{X}_1 = 1$  и  $\bar{X}_2 = 1$ , суммарную эпюру моментов  $\bar{M}_s$  (рис. 8.10), и перемещения  $\delta_{ss}$  и  $\Delta_{Ps}$  вычисляем двумя способами: по Верещагину

$$\delta_{ss} = \bar{M}_s \cdot \bar{M}_s = \frac{1}{EJ} \left( \frac{l^2}{2} \cdot \frac{2}{3} l + \frac{l^2}{2} \cdot \frac{2}{3} l + 2l^2 \cdot \frac{2}{3} 2l \right) = \frac{10l^3}{3EJ};$$

по формуле (8.9)

$$\begin{aligned} \delta_{ss} &= \sum \delta_{ii} + \sum_{i \neq k} \delta_{ik} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{12} + \delta_{21} = \\ &= \frac{l^3}{EJ} \left( \frac{2}{3} + 4 - \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \right) = \frac{10l^3}{3EJ}; \end{aligned}$$

по Верещагину

$$\Delta_{sP} = M_P \cdot \bar{M}_s = -\frac{1}{EJ} \left( \frac{ql^2}{12} \cdot \frac{l}{2} \right) = -\frac{ql^4}{24EJ};$$

по формуле (8.11)

$$\Delta_{sP} = \Delta_{1P} + \Delta_{2P} = \frac{ql^4}{24EJ} - \frac{ql^4}{12EJ} = -\frac{ql^4}{24EJ}.$$

Совпадение результатов по обоим способам показывает, что перемещения вычислены правильно.

6. Подставив вычисленные и проверенные значения коэффициентов и свободных членов (единичных и грузовых перемещений) в канонические уравнения, после сокращения на общий множитель  $\frac{l^3}{EJ}$  получим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{2}{3} X_1 - \frac{2}{3} X_2 + \frac{ql}{24} &= 0; \\ -\frac{2}{3} X_1 + 4X_2 - \frac{ql}{2} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

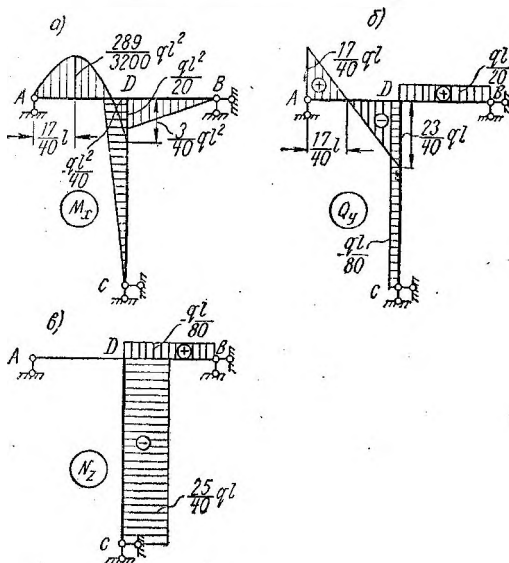


РИС. 8.12

Решив совместную систему, найдем

$$X_1 = -\frac{ql}{20}; \quad X_2 = \frac{ql}{80}.$$

Сила  $X_1$  получилась со знаком минус. Это показывает, что ее направление в действительности противоположно принятому нами и сила  $X_1$  действует на раму не вверх, а вниз.

Подставив в уравнения (а) значения  $X_1$  и  $X_2$ , получим тождества:

$$\frac{2}{3} \left( -\frac{ql}{20} \right) - \frac{2}{3} \cdot \frac{ql}{80} + \frac{ql}{24} = 0, \quad 0=0;$$

$$-\frac{2}{3} \left( -\frac{ql}{20} \right) + 4 \frac{ql}{80} - \frac{ql}{12} = 0, \quad 0=0.$$

Это свидетельствует о правильном решении канонических уравнений:

7. Определяем опорные реакции рамы под действием заданной внешней нагрузки и найденных значений лишних неизвестных  $X_1$  и  $X_2$  (рис. 8.11):

$$\sum m_C = 0; \quad Al - \frac{ql^2}{2} + \frac{ql}{20} l + \frac{ql}{80} 2l = 0; \quad A = \frac{17}{40} ql;$$

$$\sum z = 0; \quad \frac{ql}{80} - H_C = 0; \quad H_C = \frac{1}{80} ql;$$

$$\sum y = 0; \quad \frac{17}{40} ql - ql + V_C - \frac{ql}{20} = 0; \quad V_C = \frac{25}{40} ql.$$

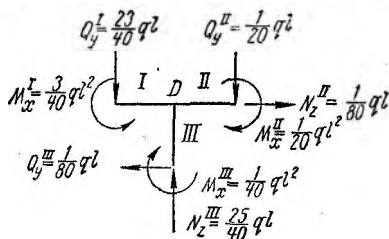


РИС. 8.13

После определения опорных реакций окончательные эпюры  $M_x$ ,  $Q_y$  и  $N_z$  для заданной рамы легко построить обычным способом, как указано в § 7.4. Эпюры приведены на рис. 8.12, а, б и в.

8. Производим проверку построенных окончательных эпюр.

#### Статическая проверка

Вырезаем узел  $D$  рассматриваемой рамы и заменяем действие отброшенных элементов соответствующими усилиями, взятыми по величине и по знаку из построенных эпюр (рис. 8.13). Уравнения равновесия для сил, действующих на узел  $D$ , имеют следующий вид:

$$\sum u = 0; \quad \frac{ql}{80} - \frac{ql}{80} = 0;$$

$$\sum v = 0; \quad -\frac{23}{40} ql - \frac{1}{20} ql + \frac{25}{40} ql = 0;$$

$$\sum m_D = 0; \quad -\frac{3}{40} ql^2 + \frac{1}{20} ql^2 + \frac{1}{40} ql^2 = 0.$$

Таким образом, все уравнения равновесия удовлетворяются.



Деформационная проверка эпюры  $M_x$

Вычисляем перемещения для заданной рамы в направлении лишних неизвестных  $X_1$  и  $X_2$ , которые должны равняться нулю. Для этого по правилу Верещагина перемножаем окончательную эпюру  $M_x$  (см. рис. 8.12, а) на каждую единичную эпюру  $\bar{M}_1$  и  $\bar{M}_2$  в отдельности (см. рис. 8.9, б и в). Для облегчения вычислений по Вер-

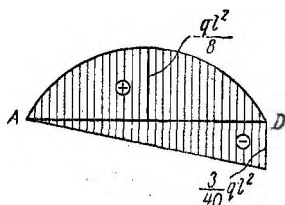


РИС. 8.14

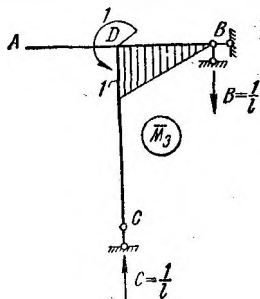


РИС. 8.15

ещагину эпюру  $M_x$  на участке  $AD$  (см. рис. 8.12, а) заменяем эквивалентной эпюрой, показанной на рис. 8.14.

Определяем

$$\Delta_{1(X_1, X_2, P)} = M_x \cdot \bar{M}_1 = \frac{1}{EJ} \left( \frac{ql^3}{12} \cdot \frac{l}{2} - \frac{3ql^3}{80} \cdot \frac{2}{3} l - \frac{ql^3}{40} \cdot \frac{2}{3} l \right) = 0;$$

$$\Delta_{2(X_1, X_2, P)} = M_x \cdot \bar{M}_2 \frac{1}{EJ} \left( -\frac{ql^3}{12} l + \frac{3ql^3}{80} \cdot \frac{2}{3} 2l + \frac{ql^3}{40} \cdot \frac{2}{3} 2l \right) = 0.$$

Значит, окончательная эпюра  $M_x$  построена верно.

9. Для определения угла поворота сечения  $D$  целесообразно выбрать основную систему, как показано на рис. 8.15. При этом изгибающие моменты на участках  $AD$  и  $DC$  равны нулю. На том же рисунке показана единичная эпюра моментов  $\bar{M}_3$ , построенная от единичного момента  $m = 1$ , приложенного в сечении  $D$ . Для определения искомого угла поворота достаточно по правилу Верещагина перемножить эпюры  $M_x$  и  $\bar{M}_3$  (см. рис. 8.12, а и 8.15):

$$\theta_D = \Delta_{3(X_1, X_2, P)} = M_x \cdot \bar{M}_3 = \frac{1}{EJ} \cdot \frac{ql^3}{40} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{ql^3}{60EJ}.$$

**Пример 8.2.** Определить усилия во всех стержнях шарнирной фермы, показанной на рис. 8.16, а. Все стержни изготовлены из одного и того же материала и имеют одинаковые площади поперечных сечений.

Решение. Определяем количество лишних связей фермы по формуле (8.2):

$$L = C + C_{\text{оп}} - 2U.$$

Подставив данные для рассматриваемой фермы ( $C = 6$ ;  $C_{\text{оп}} = 3$  и  $U = 4$ ), получим

$$L = 6 + 3 - 2 \cdot 4 = 1,$$

т. е. ферма один раз внутренне статически неопределима. Относительно внешних сил ферма статически определима, так как опорные реакции находятся из уравнений равновесия статики.

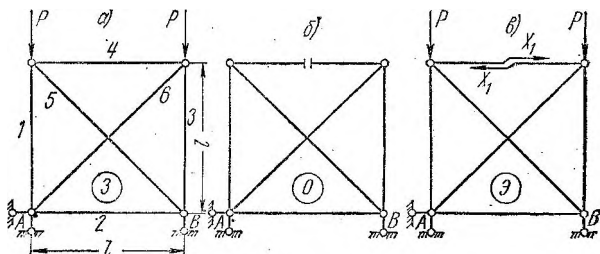


РИС. 8.16

За лишнее неизвестное принимаем усилие в четвертом стержне. Основную систему получаем, разрезав (не устранив) четвертый стержень. В месте разреза стержня по направлению его оси прикладываем неизвестные силы  $X_1$ . Основная и эквивалентная системы показаны на рис. 8.16, б и в.

Лишнее неизвестное  $X_1$  определяем из условия неразрывности системы в месте мысленного разреза, выражаемого каноническим уравнением

$$X_1 \cdot \delta_{11} + \Delta_{1P} = 0. \quad (a)$$

Перемещения  $\delta_{11}$  и  $\Delta_{1P}$  определяются по формуле (7.25а):

$$\delta_{11} = \sum \frac{\bar{N}_{i1}^2 l_i}{E_i F_i};$$

$$\Delta_{1P} = \sum \frac{\bar{N}_{i1} N_{iP} l_i}{E_i F_i},$$

где  $\bar{N}_{i1}$  — усилия в стержнях основной системы, вызванные действием только силы  $\bar{X}_1 = 1$  (рис. 8.17, а);

$N_{iP}$  — усилия в стержнях основной системы, вызванные действием только заданных нагрузок (рис. 8.17, б).

Усилия в стержнях основной системы  $\bar{N}_{i1}$  и  $N_{iP}$  определяются графически по диаграмме Кремоны либо аналитически способом вырезания узлов или способом сечений.

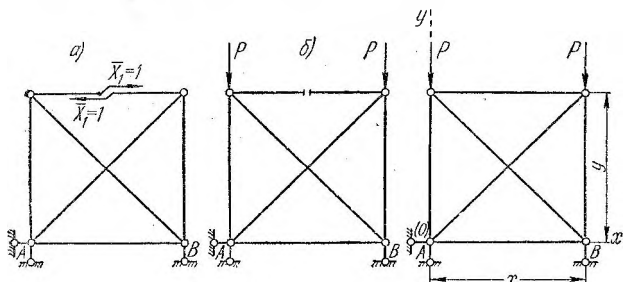


РИС. 8.17

РИС. 8.18

Найденные усилия и необходимые для расчета величины приведены в таблице:

Номер стержня	Длина $l_i$	Усилия		$\bar{N}_{i1} N_i P l_i$	$\bar{N}_{i1}^2 l_i$	Результирующее усилие в любом стержне $N_i = N_i P + X_i \bar{N}_{i1}$	$N_i l_i$
		$\bar{N}_{i1}$	$N_i P$				
1	$l$	1	$-P$	$-Pl$	$l$	$-P + P \frac{\sqrt{2}-1}{2} = P \frac{\sqrt{2}-3}{2}$	$-Pl \frac{3-\sqrt{2}}{2}$
2	$l$	1	0	0	$l$	$P \frac{\sqrt{2}-1}{2}$	$Pl \frac{\sqrt{2}-1}{2}$
3	$l$	1	$-P$	$-Pl$	$l$	$P \frac{\sqrt{2}-3}{2}$	$-Pl \frac{3-\sqrt{2}}{2}$
4	$l$	1	0	0	$l$	$P \frac{\sqrt{2}-1}{2}$	$Pl \frac{\sqrt{2}-1}{2}$
5	$l\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	0	0	$2\sqrt{2}l$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{2}-1)P$	$-Pl(\sqrt{2}-1)$
6	$l\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	0	0	$2\sqrt{2}l$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{2}-1)P$	$-Pl(\sqrt{2}-1)$
				$\sum_1^6 \bar{N}_{i1} N_i P l_i = -2Pl$	$\sum_1^6 \bar{N}_{i1}^2 l_i = 4l(1+\sqrt{2})$	$\sum_1^6 N_i l_i = -2Pl$	

Определяем лишнее неизвестное  $X_1$  из канонического уравнения (а), используя данные таблицы:

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}} = -\frac{\frac{1}{EF} \sum \bar{N}_{i1} M_{iP} l_i}{\frac{1}{EF} \sum \bar{N}_{i1}^2 l_i} = -\frac{-2Pl}{4l(1+\sqrt{2})} = \frac{P}{2(1+\sqrt{2})} = P \frac{\sqrt{2}-1}{2}.$$

Зная величину  $X_1$ , находим результирующее усилие в любом стержне по формуле

$$N_i = X_1 \bar{N}_{i1} + N_{iP}.$$

Значения этих усилий для всех стержней приведены в предпоследнем столбце таблицы.

Проверку правильности расчетов по определению усилий в стержнях фермы под действием постоянной нагрузки производим по формуле Уманского и Горбунова:

$$\sum N_i l_i = \sum (P_x x + P_y y), \quad (б)$$

где  $N_i$  — усилия в элементах фермы;

$l_i$  — длина соответствующих элементов;

$P_x$  и  $P_y$  — горизонтальные и вертикальные проекции узловых сосредоточенных внешних сил, включая и опорные реакции;

$x$  и  $y$  — координаты точек приложения сил.

За начало координат можно принять любую точку. Для заданной фермы совмещаем начало координат с неподвижной шарнирной опорой  $A$ , ось  $x$  направляем вправо, а ось  $y$  — вверх (рис. 8.18), тогда

$$\sum (P_x x + P_y y) = -Pl - Pl = -2Pl;$$

$$\sum N_i l_i = -2Pl \text{ (см. последний столбец таблицы на стр. 271).}$$

Равенство (б) удовлетворяется, что подтверждает правильность расчета.

**Пример 8.3.** Построить эпюры  $M_x$ ,  $Q_y$  и  $N_z$  для рамы, изображенной на рис. 8.19, а. Отношение жесткостей ригеля и стойки  $\frac{EJ_2}{EJ_1} = 1,2$ .

**Решение.** Определяем число лишних неизвестных по формуле (8.1). Для рассматриваемой рамы  $C_{оп} = 6$ ,  $K = 0$ ,  $Ш = 0$  и

$$L = 6 - 3 = 3,$$

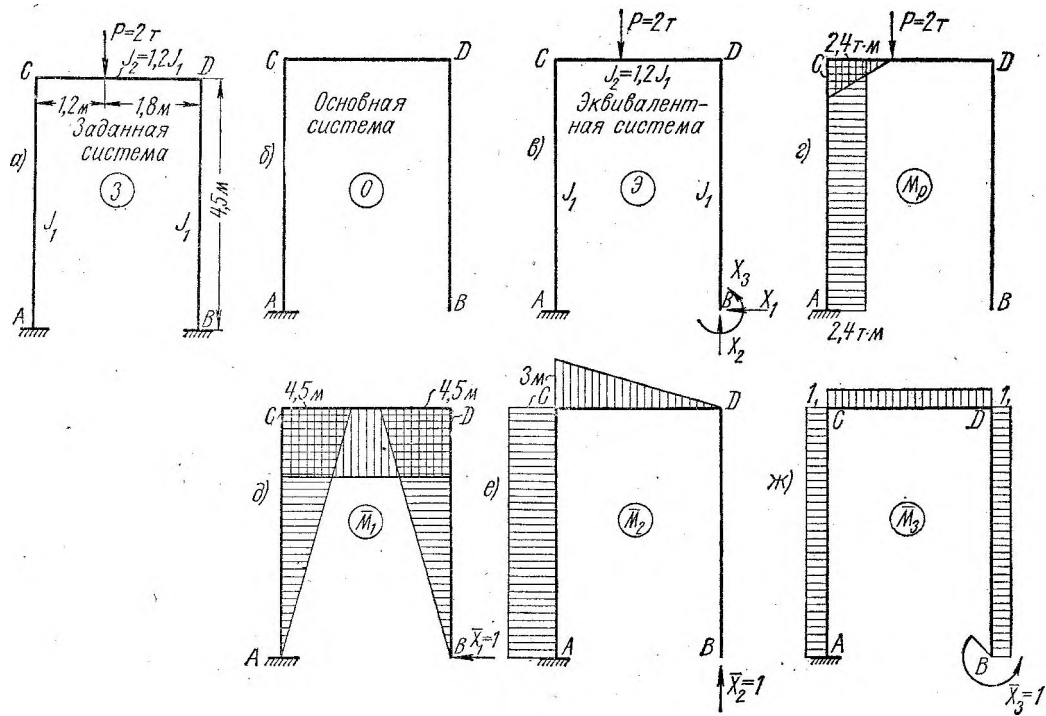


РИС. 8.19

т. е. рама трижды статически неопределима, и канонические уравнения для нее примут вид:

$$\left. \begin{aligned} X_1 \delta_{11} + X_2 \delta_{12} + X_3 \delta_{13} + \Delta_{1P} &= 0; \\ X_1 \delta_{21} + X_2 \delta_{22} + X_3 \delta_{23} + \Delta_{2P} &= 0; \\ X_1 \delta_{31} + X_2 \delta_{32} + X_3 \delta_{33} + \Delta_{3P} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

Рассмотрим два варианта основных систем.

*1-й вариант.* За лишние неизвестные принимаем опорные реакции, возникающие в заземлении  $B$ . Основная и эквивалентная системы показаны на рис. 8.19, б, в, а грузовая и единичные эпюры моментов — на рис. 8.19, г — ж.

Как видно из единичных эпюр моментов, ни одно из побочных перемещений не равно нулю и, следовательно, выбранная основная система является неудачной, так как для определения  $X_1$ ,  $X_2$  и  $X_3$  следует решить систему (а) трех уравнений с тремя неизвестными.

*2-й вариант.* Рассматриваемая рама представляет симметричную (геометрическую и упругую) систему, так как ее геометрическая схема имеет ось симметрии и жесткости ( $EJ_1$ ) симметрично расположенных элементов одинаковы. В этом случае целесообразно основную систему также выбрать симметричной, разрезав раму по оси ее симметрии (рис. 8.20 а, б) на две части.

За лишние неизвестные принимаем внутренние усилия: продольную силу  $X_1$ , поперечную силу  $X_2$  и изгибающий момент  $X_3$  в сечении разреза заданной рамы от силы  $P$ , которые прикладываем к каждой части рамы. Эквивалентная система показана на рис. 8.20, в, а эпюры моментов — на рис. 8.20, г — ж.

Эпюры моментов ( $\bar{M}_1$  и  $\bar{M}_3$ ) от симметричных единичных усилий  $\bar{X}_1$  и  $\bar{X}_3$  симметричны относительно оси разреза, а от кососимметричного единичного усилия  $\bar{X}_2$  эпюра ( $\bar{M}_2$ ) кососимметрична. Очевидно, по правилу Верещагина результат перемножения симметричной эпюры на кососимметричную равен нулю. Отсюда следует, что побочные перемещения

$$\delta_{12} = \delta_{21} = 0 \text{ и } \delta_{23} = \delta_{32} = 0,$$

и канонические уравнения (а) принимают в этом случае более простой вид:

$$\left. \begin{aligned} X_1 \delta_{11} + X_3 \delta_{13} + \Delta_{1P} &= 0; \\ X_1 \delta_{31} + X_3 \delta_{33} + \Delta_{3P} &= 0; \\ X_2 \delta_{22} + \Delta_{2P} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (б)$$

Таким образом, система трех уравнений с тремя неизвестными распалась на систему двух уравнений с двумя симметричными неизвестными  $X_1$  и  $X_3$  и одно уравнение с одним кососимметричным неизвестным  $X_2$ , что значительно сокращает объем вычислений по определению лишних неизвестных.

Для дальнейшего расчета принимаем более рациональный второй вариант основной системы.

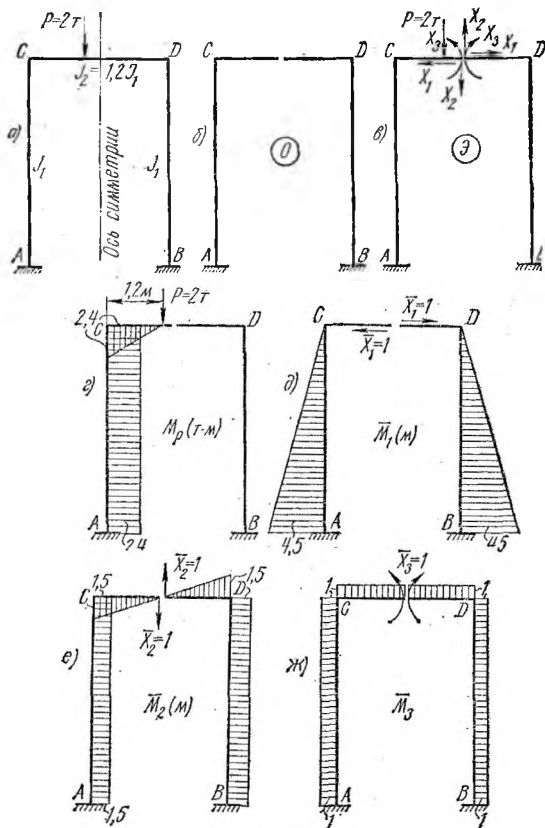


РИС. 8.20

Вычисляем все коэффициенты при неизвестных по правилу Верещагина.

Главные перемещения

$$\delta_{11} = \frac{\left(\frac{1}{2} \cdot 4,5 \cdot 4,5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4,5\right) 2}{EJ_1} = \frac{60,75}{EJ_1}$$

$$\delta_{22} = \frac{(1,5 \cdot 4,5 \cdot 1,5) 2}{EJ_1} + \frac{\left(\frac{1}{2} \cdot 1,5 \cdot 1,5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1,5\right) 2}{E \cdot 1,2J_1} = \frac{22,125}{EJ_1}$$

$$\delta_{33} = \frac{(1 \cdot 4,5 \cdot 1) 2}{EJ_1} + \frac{(1 \cdot 1,5 \cdot 1) 2}{E \cdot 1,2J_1} = \frac{11,5}{EJ_1}$$

Побочные перемещения

$$\delta_{13} = \delta_{31} = \frac{\left(\frac{1}{2} \cdot 4,5 \cdot 4,5\right) 2}{EJ_1} = \frac{20,25}{EJ_1}.$$

Грузовые перемещения (перемещения от заданной нагрузки)

$$\Delta_{1P} = - \frac{2,4 \cdot 4,5 \cdot 2,25}{EJ_1} = - \frac{24,30}{EJ_1};$$

$$\Delta_{2P} = \frac{2,4 \cdot 4,5 \cdot 1,5}{EJ_1} + \frac{\frac{1}{2} \cdot 2,4 \cdot 1,2 \cdot 1,1}{E \cdot 1,2J_1} = \frac{17,52}{EJ_1};$$

$$\Delta_{3P} = - \frac{2,4 \cdot 4,5 \cdot 1}{EJ_1} - \frac{\frac{1}{2} \cdot 2,4 \cdot 1,2 \cdot 1}{E \cdot 1,2J_1} = - \frac{12}{EJ_1}.$$

Подставив полученные значения перемещений в канонические уравнения (6), получим:

$$20,25X_1 + 6,75X_3 - 8,1 = 0; \quad (1)$$

$$20,25X_1 + 11,50X_3 - 12,0 = 0; \quad (2)$$

$$22,125X_2 + 17,52 = 0. \quad (3)$$

Решив систему уравнений (1) и (2) и уравнение (3), найдем:

$$X_1 = 0,1263 \text{ т};$$

$$X_2 = -0,792 \text{ т};$$

$$X_3 = 0,821 \text{ т} \cdot \text{м}$$

Определяем из уравнений статики опорные реакции для эквивалентной системы, которые одновременно являются опорными реакциями и для заданной рамы (рис. 8.21):

$$H_A = 0,1263 \text{ т}; \quad V_A = 1,208 \text{ т}; \quad M_A = 0,177 \text{ т} \cdot \text{м};$$

$$H_B = 0,1263 \text{ т}; \quad V_B = 0,792 \text{ т}; \quad M_B = 0,201 \text{ т} \cdot \text{м}.$$

На рис. 8.23, а дана заданная рама с найденными опорными реакциями. Эпюры изгибающих моментов для основной системы под действием каждого усилия  $X_1$ ,  $X_2$  и  $X_3$  в отдельности (так называемые «исправленные» единичные эпюры) показаны на рис. 8.22, а, б, в.

Для построения окончательной эпюры  $M_x$  воспользуемся формулой (8.12):

$$M_x = M_P + \bar{M}_1 X_1 + \bar{M}_2 X_2 + \bar{M}_3 X_3 = M_P + M_{X_1} + M_{X_2} + M_{X_3}.$$

Примем следующее правило знаков для моментов: будем считать  $M_x$  положительным, если сжатые волокна будут слева в левой стойке, справа в правой стойке и вверху в ригеле.



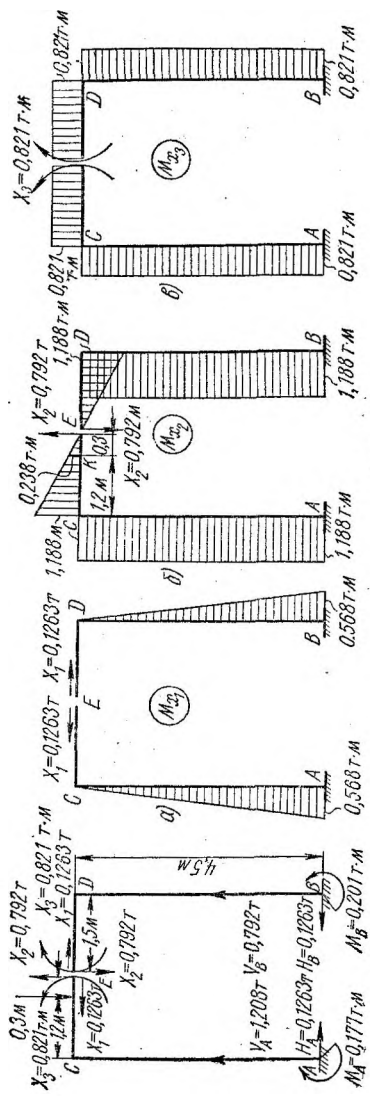


РИС. 8.20

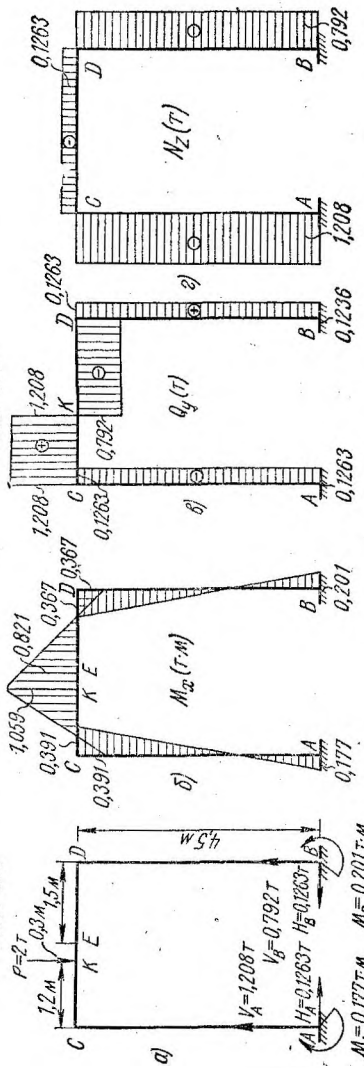


РИС. 8.23

Вычисляем суммарные изгибающие моменты в характерных сечениях заданной рамы (в узлах и под грузом  $P$ ):

в сечении  $A$

$$M_x = -2,4 + 0,568 + 1,188 + 0,821 = 0,177 \text{ т} \cdot \text{м};$$

в сечении  $C$

$$M_x = -2,4 + 1,188 + 0,821 = -0,391 \text{ т} \cdot \text{м};$$

в сечении  $K$  (под силой  $P$ )

$$M_x = 0,238 + 0,821 = 1,059 \text{ т} \cdot \text{м};$$

в сечении  $D$

$$M_x = -1,188 + 0,821 = -0,367 \text{ т} \cdot \text{м};$$

в сечении  $B$

$$M_x = 0,568 - 1,188 + 0,821 = 0,201 \text{ т} \cdot \text{м}.$$

По полученным данным построена окончательная (суммарная) эпюра моментов  $M_x$  (рис. 8.23, б) для заданной рамы. Эпюры  $Q_y$  и  $N_z$  строим обычным способом (см. § 7.4), проектируя все внешние силы по одну сторону от сечения на поперечную и продольную ось рассматриваемого элемента рамы. Они даны на рис. 8.23, в и г.

Для проверки правильности построенной окончательной эпюры изгибающих моментов определим полный взаимный угол поворота сечений в месте разреза, который, как заранее известно, должен равняться нулю.

По правилу Верещагина перемножаем суммарную эпюру  $M_x$  (см. рис. 8.23, б) и единичную  $\bar{M}_3$  (см. рис. 8.20, ж):

$$\begin{aligned} \Delta_{3(X_1, X_2, X_3, P)} = M_x \cdot M_3 &= \frac{1}{2} \cdot 0,177 \cdot 4,5 \cdot 1 - \\ & - \frac{\frac{1}{2} \cdot 0,391 \cdot 4,5 \cdot 1}{EJ_1} - \frac{\frac{1}{2} \cdot 0,391 \cdot 1,2 \cdot 1}{E \cdot 1,2J_1} + \frac{\frac{1}{2} \cdot 1,059 \cdot 1,2 \cdot 1}{E \cdot 1,2J_1} + \\ & + \frac{\frac{1}{2} \cdot 1,059 \cdot 1,8 \cdot 1}{E \cdot 1,2J_1} - \frac{\frac{1}{2} \cdot 0,367 \cdot 1,8 \cdot 1}{E \cdot 1,2J_1} - \frac{\frac{1}{2} \cdot 0,367 \cdot 4,5 \cdot 1}{EJ_1} + \\ & + \frac{\frac{1}{2} \cdot 0,201 \cdot 4,5 \cdot 1}{EJ_1} = \frac{1}{EJ_1} (2,1743 - 2,1763) = -\frac{0,002}{EJ_1}. \end{aligned}$$

Вместо нуля получили весьма малую величину. Для определения ошибки в процентах полученный результат по абсолютному

значению надо разделить на сумму абсолютных величин слагаемых и умножить на 100:

$$\frac{0,002}{2,1743 + 2,1763} \cdot 100 \approx 0,46\%.$$

Полученная невязка меньше практически допустимой в 2%, и в пределах точности расчета эпюра  $M_x$  построена правильно.

#### § 8.8. РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ РАМ ПО ГОТОВЫМ ФОРМУЛАМ

В ряде случаев целесообразно для расчета простых по очертанию статически неопределимых рам использовать готовые формулы, имеющиеся в различных справочниках [15, 18, 44].

Обычно в справочниках для рам с элементами постоянной жесткости приводятся схема рамы, действующая нагрузка, принятые лишние неизвестные (большой частью внешние опорные реакции) и формулы для их определения.

После вычисления величин лишних неизвестных по приведенным в справочниках формулам построение эпюр  $M_x$ ,  $Q_y$  и  $N_z$  для заданной рамы производится, как для статически определимой рамы.

В табл. 8.1 приведены формулы для расчета часто встречающихся несложных статически неопределимых рам.

**Пример 8.4.** Для рамы, рассмотренной в примере 8.3, определить лишние неизвестные.

**Решение.** Лишние неизвестные определяем по готовым формулам, приведенным в табл. 8.1 (см. схему рамы 18). Предварительно вычисляем значения нужных нам коэффициентов:

$$\gamma = \frac{J_2}{J_1} \cdot \frac{h}{l} = 1,2 \cdot \frac{4,5}{3} = 1,8; \quad \xi = \frac{1,2}{3} = 0,4; \quad \xi' = \frac{1,8}{3} = 0,6.$$

Находим:

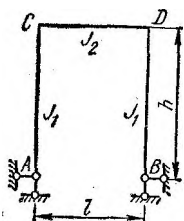
$$H_A = H_B = \frac{3}{2} P \xi \xi' \frac{l}{h} \cdot \frac{1}{2 + \gamma} = \frac{3}{2} \cdot 2 \cdot 0,4 \cdot 0,6 \cdot \frac{3}{4,5} \cdot \frac{1}{3,8} = 0,1263 \text{ т};$$

$$M_A = \frac{Pl}{2} \xi \xi' \left( \frac{1}{2 + \gamma} - \frac{\xi' - \xi}{1 + 6\gamma} \right) = \frac{2 \cdot 3}{2} \cdot 0,4 \cdot 0,6 \left( \frac{1}{3,8} - \frac{0,6 - 0,4}{1 + 6 \cdot 1,8} \right) = 0,177 \text{ т} \cdot \text{м};$$

$$M_B = \frac{Pl}{2} \xi \xi' \left( \frac{1}{2 + \gamma} + \frac{\xi' - \xi}{1 + 6\gamma} \right) = \frac{2 \cdot 3}{4} \cdot 0,4 \cdot 0,6 \left( \frac{1}{3,8} - \frac{0,6 - 0,4}{1 + 6 \cdot 1,8} \right) = 0,201 \text{ т} \cdot \text{м}.$$

Полученные значения  $H_A$ ,  $M_A$  и  $M_B$  совпадают с вычисленными в предыдущем примере.

## Формулы для расчета однопролетных рам



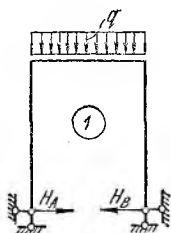
П-образная рама с шарнирно  
прикрепленными стойками

Вспомогательные коэффициенты

$$\gamma = \frac{J_2}{J_1} \cdot \frac{h}{l}; \quad \mu = 3 + 2\gamma$$

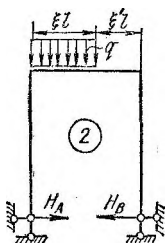
Схема рамы

Величины силовых факторов



$$H_A = H_B = \frac{ql}{4} \cdot \frac{1}{\mu} \cdot \frac{l}{h};$$

$$M_C = M_D = -\frac{ql^2}{4\mu}$$



$$H_A = H_B = \frac{ql}{4} \cdot \frac{l}{h} \times$$

$$\times \frac{(1 + 2\xi') \xi^2}{\mu};$$

$$M_C = M_D = -\frac{ql^2}{4} \cdot \frac{(1 + 2\xi') \xi^3}{\mu}$$

Продолжение табл. 8.1

Схема рамы	Величины силовых факторов
	$H_A = \frac{qh}{8} \cdot \frac{18 + 11\gamma}{\mu};$ $H_B = \frac{qh}{8} \cdot \frac{6 + 5\gamma}{\mu};$ $M_C = \frac{qh^2}{8} \cdot \frac{3(2 + \gamma)}{\mu};$ $M_D = -\frac{qh^2}{8} \cdot \frac{6 + 5\gamma}{\mu}$

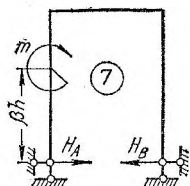
	$H_A = H_B = \frac{3}{2} P \frac{l}{h} \xi \xi';$ $M_C = M_D = \frac{3}{2} P l \xi \xi''$
--	---

	$H_A = H_B = \frac{P}{2};$ $M_C = -M_D = \frac{Ph}{2}$
--	--

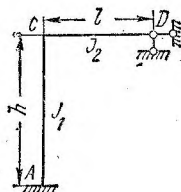
	$H_A = \frac{P}{2} \left[ 2 - \beta \frac{\gamma(3 - \beta^2) + 3}{\mu} \right];$ $H_B = \frac{P}{2} \beta \frac{\gamma(3 - \beta^2) + 3}{\mu}$
--	---

Схема рамы

Величины силовых факторов



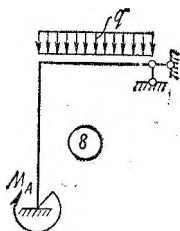
$$H_A = H_B = \frac{3}{2} \cdot \frac{m}{h} \times \frac{1 + (1 - \beta^2) \gamma}{\mu}$$



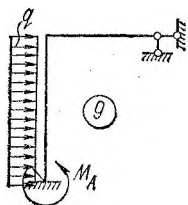
Г-образная рама с горизонтальным ригелем

Вспомогательные коэффициенты

$$\gamma = \frac{J_2}{J_1} \cdot \frac{h}{l}; \quad \mu = 4 + 3\gamma$$



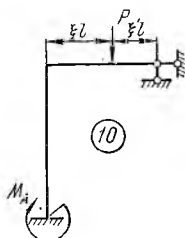
$$M_C = -\frac{ql^2}{2\mu}; \quad M_A = -\frac{M_C}{2}$$



$$M_C = -\frac{qh^2\gamma}{4\mu}; \quad M_A = -\frac{qh^2(\gamma + 2)}{4\mu}$$

Схема рамы

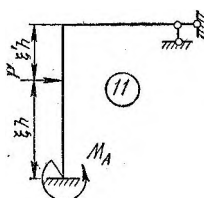
Величины силовых факторов



$$M_A = \frac{Pl\xi\xi' (1 + \xi')}{\mu};$$

$$M_C = -2M_A;$$

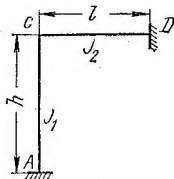
$$M_P = (Pl\xi + M_C)\xi'$$



$$M_C = -\frac{Pl^2\xi\xi'}{h} \cdot \frac{3(1 - \xi')\gamma}{\mu};$$

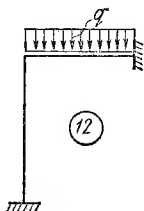
$$M_A = -\frac{Pl^2\xi\xi'}{h} \times \frac{3\xi'\gamma + 2(1 + \xi')}{\mu};$$

$$M_P = \frac{Pl^2\xi\xi'}{h} + \xi'M_A + (1 - \xi')M_C$$



Вспомогательные коэффициенты

$$\gamma = \frac{J_2}{J_1} \cdot \frac{h}{l}; \quad \mu = 1 + \gamma$$

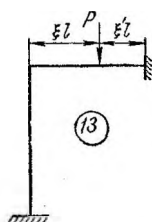


$$M_D = -\frac{ql^2 (3\gamma + 2)}{24\mu};$$

$$M_C = -\frac{ql^2}{12\mu}; \quad M_A = -\frac{M_C}{2}$$

Схема рамы

Величины силовых факторов

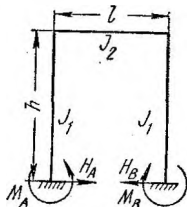


$$M_C = -\frac{Pl\xi(\xi')^2}{\mu};$$

$$M_A = -\frac{1}{2}M_C;$$

$$M_D = Pl\xi\xi' \frac{(2-\xi')\gamma + 2(1-\xi')}{2\mu};$$

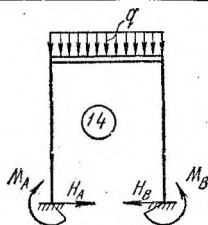
$$M_P = Pl\xi\xi' + \xi'M_C + (1-\xi')M_D$$



П-образная рама с зашечленными стойками

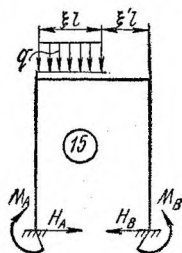
Вспомогательные коэффициенты

$$\gamma = \frac{J_2}{J_1} \frac{h}{l}$$



$$H_A = H_B = \frac{ql^2}{4h} \cdot \frac{1}{2+\gamma};$$

$$M_A = M_B = \frac{ql^2}{12} \cdot \frac{1}{2+\gamma}$$



$$H_A = H_B = \frac{ql}{4} \cdot \frac{l}{h} \times \frac{(1+2\xi')\xi^2}{2+\gamma};$$

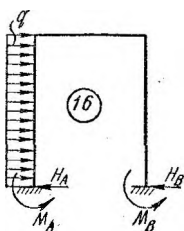
$$M_A = \frac{ql^2}{12} \xi^2 \times \left[ \frac{1+2(1-\xi)}{2+\gamma} - \frac{3(1-\xi)^2}{1+6\gamma} \right];$$

$$M_B = \frac{ql^2}{12} \xi^2 \times \left[ \frac{1+2(1-\xi)}{2+\gamma} + \frac{3(1-\xi)^2}{1+\gamma} \right]$$



Схема рамы

Величины силовых факторов

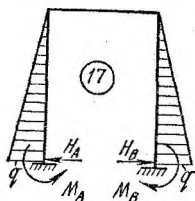


$$H_A = \frac{qh}{2} \left[ 1 + \frac{5+2\gamma}{4(2+\gamma)} \right];$$

$$H_B = qh - H_A;$$

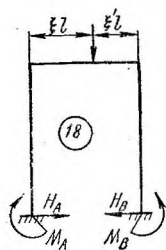
$$M_A = \frac{qh^2}{24} \left( \frac{3+\gamma}{2+\gamma} + 6 \frac{1+4\gamma}{1+6\gamma} \right);$$

$$M_B = \frac{qh^2}{24} \left( \frac{3+\gamma}{2+\gamma} - 6 \frac{1+4\gamma}{1+6\gamma} \right)$$



$$H_A = H_B = \frac{qh}{20} \cdot \frac{16+7\gamma}{2+\gamma};$$

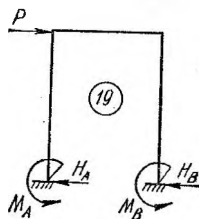
$$M_A = M_B = \frac{qh^2}{60} \cdot \frac{8+3\gamma}{2+\gamma}$$



$$H_A = H_B = \frac{3P\xi\xi'}{2} \cdot \frac{l}{h} \cdot \frac{1}{2+\gamma};$$

$$M_A = \frac{Pl}{2} \xi\xi' \left( \frac{1}{2+\gamma} - \frac{\xi' - \xi}{1+6\xi} \right);$$

$$M_B = \frac{Pl}{2} \xi\xi' \left( \frac{1}{2+\gamma} + \frac{\xi' - \xi}{1+6\xi} \right)$$

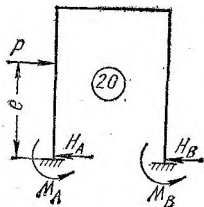


$$H_A = H_B = \frac{P}{2};$$

$$M_A = M_B = \frac{Ph}{2} \cdot \frac{1+3\gamma}{1+6\gamma}$$

Схема рамы

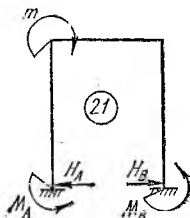
Величины силовых факторов



$$H_A = \frac{P}{2} \left\{ 1 + \left( 1 - \frac{e}{b} \right) \left[ 1 + \frac{e}{h} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \frac{\left( 2 - \gamma \frac{e}{h} \right) - \left( \frac{e}{h} - \gamma \right)}{2 + \gamma} \right] \right\};$$

$$M_A = \frac{P}{2} e \left[ \left( 1 - \frac{e}{h} \right) \cdot \left( 1 - \frac{e}{h} \cdot \frac{1 + \gamma}{2 + \gamma} \right) + \right. \\ \left. + \left( 1 - 3 \frac{e}{h} \cdot \frac{\gamma}{1 + 6\gamma} \right) \right];$$

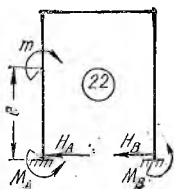
$$M_B = \frac{P}{2} e \left[ \left( 1 - \frac{e}{h} \right) \cdot \left( 1 - \frac{e}{h} \cdot \frac{1 + \gamma}{2 + \gamma} \right) - \right. \\ \left. - \left( 1 - 3 \frac{e}{h} \cdot \frac{\gamma}{1 + 6\gamma} \right) \right]$$



$$H_A = H_B = \frac{3}{2} \cdot \frac{m}{h} \cdot \frac{1}{2 + \gamma};$$

$$M_A = \frac{m}{2} \left( \frac{1}{2 + \gamma} - \frac{1}{1 + \gamma} \right);$$

$$M_B = \frac{m}{2} \left( \frac{1}{2 + \gamma} + \frac{1}{1 + 6\gamma} \right)$$



$$H_A = H_B = \frac{3}{4} \cdot \frac{m}{h} \cdot \frac{e}{h} \times$$

$$\times \left[ \left( 2 - \frac{e}{h} \right) + \gamma \frac{2 - 3 \frac{e}{h}}{2 + \gamma} \right];$$

$$M_A = \frac{m}{2} \left[ \frac{3}{2} \cdot \frac{e}{h} \left( 2 - \frac{e}{h} \right) - \right.$$

Продолжение табл. 8.1

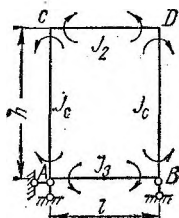
Схема рамы

Величины силовых факторов

$$-1 + \frac{1}{2} \gamma \frac{e}{h} \cdot \frac{2-3 \frac{e}{h}}{2+\gamma} + \left( \frac{6\gamma \frac{e}{h}}{1+6\gamma} - 1 \right) \Bigg];$$

$$M_B = \frac{m}{z} \left[ \frac{3}{2} \cdot \frac{e}{h} \left( 2 - \frac{e}{h} \right) - \right.$$

$$\left. -1 + \frac{1}{2} \gamma \frac{e}{h} \cdot \frac{2-3 \frac{e}{h}}{2+\gamma} - \left( \frac{6\gamma \frac{e}{h}}{1+6\gamma} - 1 \right) \right]$$



Замкнутая рама

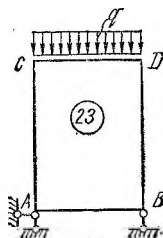
Вспомогательные коэффициенты

$$\gamma = \frac{J_s}{J_c} \cdot \frac{h}{l}; \quad \gamma_1 = \frac{J_s}{J_c} \cdot \frac{h}{l};$$

$$\mu = \frac{1}{\gamma_1} (2\gamma + 3) + (2 + \gamma);$$

$$\mu_1 = \frac{1 + \gamma}{\mu}; \quad \mu_2 = 1 + \frac{\gamma}{\gamma_1} + 6\gamma$$

Положительный момент в узле вызывает сжимающие напряжения во внешних волокнах

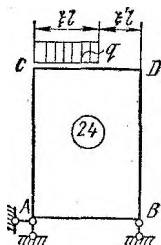


$$M_A = M_B = \frac{ql^2}{12} \cdot \frac{1}{\mu}$$

$$M_C = M_D = -\frac{ql^2}{12} \left[ \frac{3(1 + \mu_2)}{3 + 2\gamma} - \frac{1}{\mu} \right]$$

Схема рамы

Величины силовых факторов

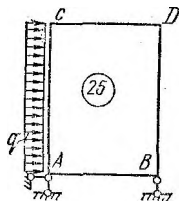


$$M_A = -\frac{ql^2}{12} \xi^2 \left( \frac{1+2\xi'}{\mu} - \frac{3\xi'^2}{\mu^2} \right);$$

$$M_B = \frac{ql^2}{12} \xi^2 \left( \frac{1+2\xi'}{\mu} + \frac{3\xi'^2}{\mu^2} \right);$$

$$M_C = -\frac{ql^2}{12} \xi^2 \left[ \frac{3(3-2\xi)(1+\mu_1)}{3+2\gamma} - \frac{1+2\xi'}{\mu} + \frac{3\xi'^2}{\mu^2} \right];$$

$$M_D = -\frac{ql^2}{12} \xi^2 \left[ \frac{3(3-2\xi)(1+\mu_1)}{3+2\gamma} - \frac{1+2\xi'}{\mu} - \frac{3\xi'^2}{\mu^2} \right];$$

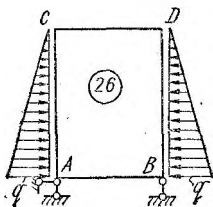


$$M_A = -\frac{qh^2}{4} \left( \frac{3+\gamma}{6\mu} + \frac{1+4\gamma}{\mu_2} \right);$$

$$M_B = -\frac{qh^2}{4} \left( \frac{3+\gamma}{6\mu} - \frac{1+4\gamma}{\mu_2} \right);$$

$$M_C = -\frac{qh^2}{4} \frac{\gamma}{\gamma_1} \times \left( \frac{3+\gamma_1}{6\mu} - \frac{1+2\gamma_1}{\mu_2} \right);$$

$$M_D = -\frac{qh^2}{4} \frac{\gamma}{\gamma_1} \times \left( \frac{3+\gamma_1}{6\mu} + \frac{1+2\gamma_1}{\mu_2} \right);$$

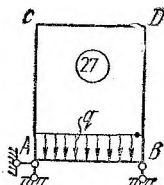


$$M_A = M_B = -\frac{qh^2}{60} \frac{8+3\gamma}{\mu};$$

$$M_C = M_D = -\frac{qh^2}{60} \frac{7+2\gamma_1}{\mu};$$

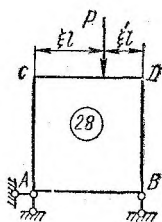
Схема рамы

Величины силовых факторов



$$M_A = M_B = \frac{ql^2}{12} \cdot \frac{2\gamma + 3}{\mu\gamma_1};$$

$$M_C = M_D = -\frac{ql^2}{12} \left( \frac{3\mu_1}{\gamma_1} - \frac{2\gamma + 3}{\mu\gamma_1} \right)$$

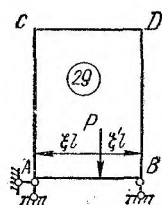


$$M_A = \frac{Pl}{2} \xi\xi' \left( \frac{1}{\mu} - \frac{\xi' - \xi}{\mu_2} \right);$$

$$M_B = \frac{Pl}{2} \xi\xi' \left( \frac{1}{\mu} + \frac{\xi' - \xi}{\mu_2} \right);$$

$$M_C = -\frac{Pl}{2} \xi\xi' \left[ \frac{3(1 + \mu_1)}{3 + 2\gamma} - \frac{1}{\mu} + \frac{\xi' - \xi}{\mu_2} \right];$$

$$M_D = -\frac{Pl}{2} \xi\xi' \left[ \frac{3(1 + \mu_1)}{3 + 2\gamma} - \frac{1}{\mu} - \frac{\xi' - \xi}{\mu_2} \right]$$

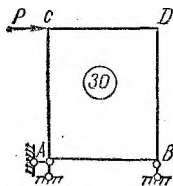


$$M_A = \frac{Pl}{2} \cdot \frac{\xi\xi'}{\gamma_1} \left[ \frac{2\gamma + 3}{\mu} + \frac{(\xi' - \xi)\gamma}{\mu_2} \right];$$

$$M_B = \frac{Pl}{2} \cdot \frac{\xi\xi'}{\gamma_1} \left[ \frac{2\gamma + 3}{\mu} - \frac{(\xi' - \xi)\gamma}{\mu_2} \right];$$

$$M_C = -\frac{Pl}{2} \cdot \frac{\xi\xi'}{\gamma_1} \left[ 3\mu_1 - \frac{2\gamma + 3}{\mu} - \frac{(\xi' - \xi)\gamma}{\mu_2} \right];$$

$$M_D = -\frac{Pl}{2} \cdot \frac{\xi\xi'}{\gamma_1} \left[ 3\mu_1 - \frac{2\gamma + 3}{\mu} + \frac{(\xi' + \xi)\gamma}{\mu_2} \right]$$



$$M_A = -\frac{Ph}{2} \cdot \frac{1 + 3\gamma}{\mu_2}; \quad M_B = \frac{Ph}{2} \cdot \frac{1 + 3\gamma}{\mu_2};$$

$$M_C = \frac{Ph}{2} \left( 1 - \frac{1 + 3\mu}{\mu_2} \right);$$

$$M_D = -\frac{Ph}{2} \left( 1 - \frac{1 + 3\mu}{\mu_2} \right)$$

Схема рамы	Величины силовых факторов
	$M_A = -\frac{m}{2} \left( \frac{1}{\mu} - \frac{1}{\mu_2} \right);$ $M_B = -\frac{m}{2} \left( \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\mu_2} \right);$ $M_C = \frac{m}{2} \left( \frac{1}{\gamma_1} \cdot \frac{3 + 2\gamma_1}{\mu} + \frac{1}{\mu_2} \right);$ $M_D = -\frac{m}{2} \left( \frac{1}{\gamma_1} \cdot \frac{3 + 2\gamma_1}{\mu} - \frac{1}{\mu_2} \right)$
	$M_A = -\frac{m}{2} \cdot \frac{1}{\gamma_1} \left( \frac{3 + 2\gamma_1}{\mu} + \frac{\gamma_1}{\mu_2} \right);$ $M_B = -\frac{m}{2} \cdot \frac{1}{\gamma_1} \left( \frac{3 + 2\gamma_1}{\mu} - \frac{\gamma_1}{\mu_2} \right);$ $M_C = -\frac{m}{2} \cdot \frac{1}{\gamma_1} \left( \frac{2 + \gamma_1}{\mu} - \frac{\gamma_1}{\mu_2} \right);$ $M_D = -\frac{m}{2} \cdot \frac{1}{\gamma_1} \left( \frac{2 + \gamma_1}{\mu} + \frac{\gamma_1}{\mu_2} \right)$

### § 8.9. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА СИЛ К РАСЧЕТУ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ БАЛОК

Рассмотрим пример расчета статически неопределимой балки при помощи канонического уравнения метода сил.

**Пример 8.5.** Подобрать сечение неразрезной балки двутаврового профиля с построением эпюр  $M$  и  $Q$ ;  $[\sigma] = 1600 \text{ кг/см}^2$  (рис. 8.24, а).

**Решение.** Неразрезной балкой называется статически неопределимая балка, имеющая более двух опор. Степень статической неопределимости неразрезной балки, у которой крайние опоры шарнирно опертые, равна числу промежуточных опор.

В качестве основной системы для расчета неразрезной балки целесообразнее всего принять ряд статически определимых двухопорных балок, получаемых после постановки шарниров на всех промежуточных опорах заданной балки. При такой основной системе лишними неизвестными будут парные моменты в опорных сечениях неразрезной балки, заменяющие отброшенную связь между соседними пролетами.

Опорные моменты определяются из уравнений перемещений, составленных из условия, что изогнутая ось неразрезной балки должна быть плавной кривой, т. е. опорные сечения однопролетных балок эквивалентной системы не могут поворачиваться одно относительно другого и их взаимный угол поворота должен равняться нулю.

Рассматриваемая балка один раз статически неопределима. Основная и эквивалентная системы для нее показаны на рис. 8.24, б и в. Опорные моменты  $X_1$ , изгибающие балку выпуклостью вниз, считаем положительными.

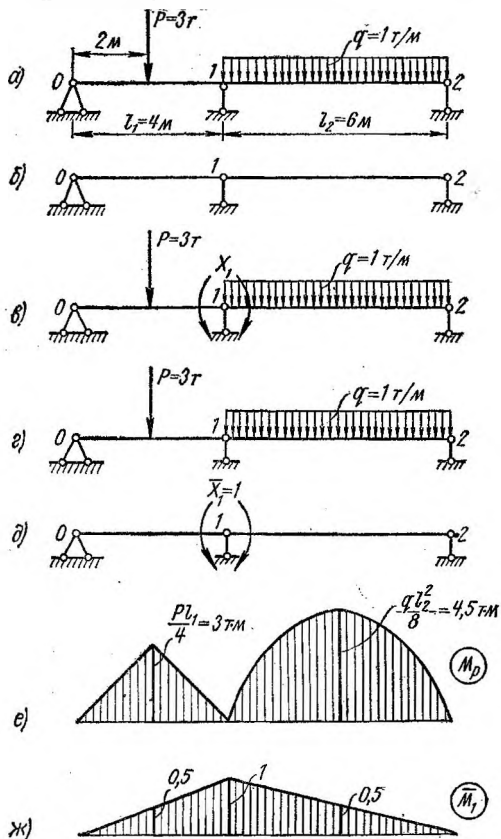


РИС. 8.24

Неизвестные опорные моменты определяем из канонического уравнения метода сил:

$$X_1 \delta_{11} + \Delta_{1P} = 0,$$

утверждающего отсутствие взаимного угла поворота опорного сечения 1.

Для вычисления  $\delta_{11}$  и  $\Delta_{1P}$  нагружаем основную систему поочередно заданной нагрузкой и единичным моментом  $\bar{X}_1 = 1$  (рис. 8.24,

$\varepsilon$  и  $\delta$ ) и строим грузовую и единичные эпюры моментов (рис. 8.24,  $e$  и  $ж$ ).

Перемещения определяем по правилу Верещагина:

$$\delta_{11} = \bar{M}_1 \cdot \bar{M}_1 = \frac{1}{EJ} \left( 1 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 + 1 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \right) = \frac{1}{EJ} \cdot \frac{10}{3};$$

$$\Delta_{1P} = M_P \bar{M}_1 = \frac{1}{EJ} \left( \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 \cdot 0,5 + \frac{2}{3} \cdot 6 \cdot 4,5 \cdot 0,5 \right) = \frac{1}{EJ} \cdot 12.$$

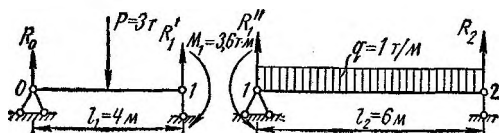


РИС. 8.25

Подставив значения  $\delta_{11}$  и  $\delta_{1P}$  в каноническое уравнение, получим:

$$X_1 \frac{10}{3} + 12 = 0; \quad X_1 = M_1 = -3,6 \text{ т} \cdot \text{м}.$$

Опорный момент получился со знаком минус. Это значит, что его направление противоположно принятому и он изгибает балку выпуклостью вверх.

После определения опорного момента опорные реакции в эквивалентной системе могут быть определены из уравнений равновесия (рис. 8.25):

$$\Sigma m_0 = 0; \quad R_0 \cdot 4 - 3 \cdot 2 + 3,6 = 0; \quad R_0 = 0,6 \text{ т};$$

$$\Sigma m_1 = 0; \quad 3 \cdot 2 - R'_1 \cdot 4 + 3,6 = 0; \quad R'_1 = 2,4 \text{ т};$$

$$\Sigma m_2 = 0; \quad R''_1 \cdot 6 - 3,6 - 1 \cdot 6 \cdot 3 = 0; \quad R''_1 = 3,6 \text{ т}.$$

Полная реакция на опоре 1  $R_1 = R'_1 + R''_1 = 2,4 + 3,6 = 6,0 \text{ т}$

$$\Sigma m_1 = 0; \quad -R_2 \cdot 6 + 1 \cdot 6 \cdot 3 - 3,6 = 0; \quad R_2 = 2,4 \text{ т}.$$

Заданная балка с найденными опорными реакциями показана на рис. 8.26,  $a$ , а эпюра  $Q$  для нее, построенная обычным способом, — на рис. 8.26,  $b$ .

Окончательную суммарную эпюру изгибающих моментов проще всего построить, воспользовавшись формулой (8.12):

$$M = M_P + X_1 \bar{M}_1.$$

Увеличивая опорную ординату единичной эпюры (см. рис. 8.24,  $ж$ ) в  $X_1$  раз, получим линию опорных моментов  $O1'2$  (рис. 8.26,  $в$ ).



Откладывая от линии опорных моментов ординаты эпюр моментов от нагрузок ( $M_p$ ) отдельно для каждого пролета, как для простых балок на двух опорах, получим окончательную эпюру моментов  $M$  для заданной неразрезной балки, которая заштрихована.

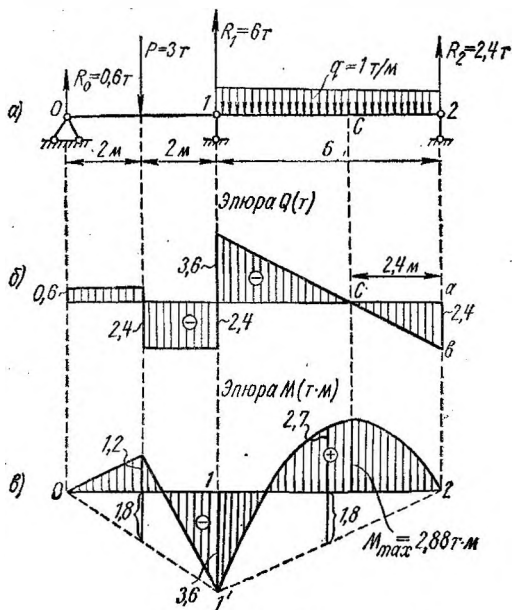


РИС. 8.26

Наибольший изгибающий момент в сечении  $C$  второго пролета может быть найден как площадь треугольника  $abc$  эпюры  $Q$ :

$$M_{\max} = \frac{1}{2} \cdot 2,4 \cdot 2,4 = 2,88 \text{ т} \cdot \text{м}.$$

Подбор сечения балки производим по опорному моменту  $M_1 = -3,6 \text{ т} \cdot \text{м}$ :

$$W_x = \frac{M_1}{[\sigma]} = \frac{3,6 \cdot 10^5}{1600} = 225 \text{ см}^3.$$

Берем двутавр № 22, для которого  $W_x = 232 \text{ см}^3$ .

## ГЛАВА 9

### КОСОЙ ИЗГИБ. РАСТЯЖЕНИЕ (СЖАТИЕ) С ИЗГИБОМ

В этой и в следующей главах рассмотрены расчеты бруса при таких видах нагружения, при которых *в его поперечных сечениях возникает не менее двух внутренних силовых факторов, одновременно учитываемых при расчете.* Такие случаи нагружения иногда называют *сложным сопротивлением.* Рассматриваемые в этой главе случаи работы бруса характерны тем, что в его опасной точке возникает линейное напряженное состояние. Если даже напряженное состояние плоское, то с достаточной для практических целей точностью можно пренебречь касательными напряжениями, возникающими в поперечном сечении бруса, и опять-таки рассматривать напряженное состояние как одноосное. Более общие случаи работы (нагружения) бруса, при которых в его опасной точке имеет место плоское напряженное состояние и для расчета на прочность необходимо применить гипотезы прочности, рассмотрены в гл. 10.

#### § 9.1. КОСОЙ ИЗГИБ

Изгиб называют *косым*, если плоскость действия изгибающего момента, возникающего в поперечном сечении бруса, не совпадает ни с одной из его главных плоскостей. Различают *плоский косой изгиб* (рис. 9.1, а, б) и *пространственный косой изгиб* (рис. 9.2, а, б).

При плоском косом изгибе углы, составляемые плоскостью изгибающего момента с главными центральными осями, во всех поперечных сечениях одинаковы. Очевидно, в этом случае все нагрузки расположены в одной плоскости (имеется общая для всего бруса силовая плоскость). При плоском косом изгибе упругая линия бруса *плоская* кривая, но в отличие от прямого изгиба плоскость, в которой она расположена, не совпадает с силовой плоскостью.

При пространственном косом изгибе действующие на брус нагрузки расположены в разных плоскостях, соответственно углы между главными центральными осями и силовыми линиями не постоянны по длине бруса. Упругая линия бруса *пространственная* кривая.

Для расчетов на прочность и жесткость практически безразлично, будет ли косой изгиб *поперечным* или *чистым* (т. е. возникают ли в поперечных сечениях бруса наряду с изгибающими моментами также и поперечные силы или последние равны нулю), так как при наличии поперечных сил их влияние обычно не учитывают.

Определение напряжений и перемещений (расчеты на прочность и жесткость) выполняют на основе замены косоугольного сочетанием двух прямых изгибов. Каждую из приложенных к брусу нагрузок заменяют ее составляющими, действующими в главных плоскостях (см. рис. 9.1, а, 9.2, а и пример 9.1). При построении эпюр изгиба-

ющих моментов в каждой из главных плоскостей бруса (эпюры  $M_x$  и  $M_y$ ) удобно применять аксонометрическое изображение: эпюру  $M_x$  располагать в плоскости  $zOy$ , а эпюру  $M_y$  — в плоскости  $zOx$  (см. примеры 9.1, 9.4). В простейших случаях нагружения в построении эпюр нет надобности, так как и без эпюр очевидно, какое сечение опасно (см. пример 9.2).

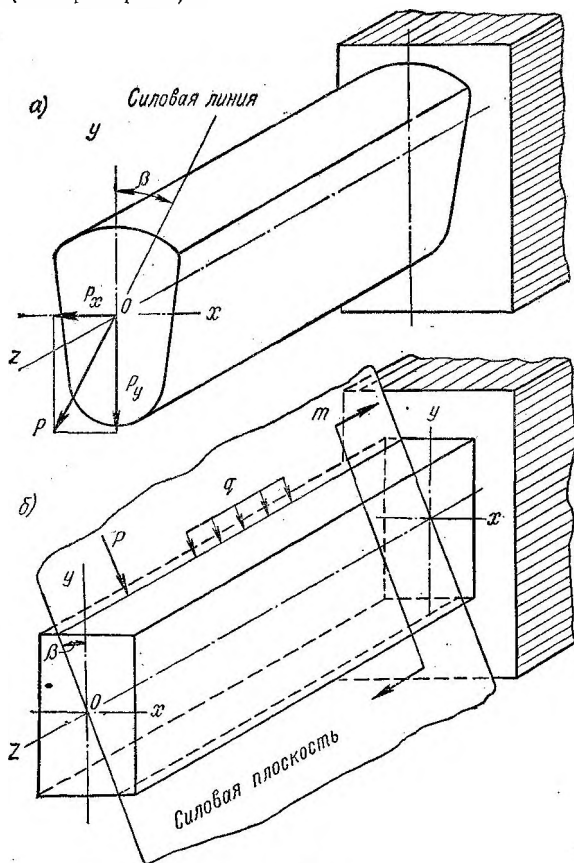


РИС. 9.1

При плоском косом изгибе моменты  $M_x$  и  $M_y$  достигают своих наибольших значений в одном и том же поперечном сечении, которое и является опасным (здесь и в дальнейшем предполагается, что поперечное сечение бруса постоянно). При пространственном косом изгибе сечения, в которых  $M_x$  и  $M_y$  достигают своих наибольших значений, в общем случае не совпадают; расчет приходится выполнять

для двух (см. пример 9.4) или более предположительно опасных сечений.<sup>1</sup>

Нормальное напряжение в произвольной точке поперечного сечения, в котором возникают изгибающие моменты  $M_x$  и  $M_y$ , определяется по формуле

$$\sigma = \sigma_{M_x} + \sigma_{M_y} = \frac{M_x y}{J_x} + \frac{M_y x}{J_y}, \quad (9.1)$$

где  $J_x, J_y$  — главные центральные моменты инерции;

$x, y$  — координаты точки в системе главных центральных осей.

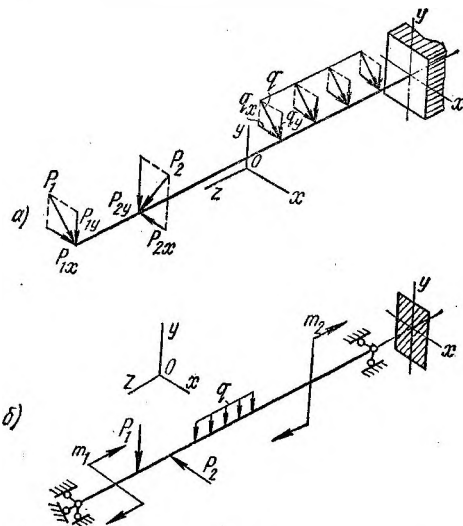


РИС. 9.2

В формулу (9.1) рекомендуется подставлять абсолютные значения  $M_x, M_y, x, y$ , а знак приписывать всему слагаемому в целом устанавливая этот знак по характеру деформации бруса (как обычно, напряжения растяжения считают положительными). Например, для бруса на рис. 9.1, а  $\sigma_{M_x}$  положительно в первом и втором квадрантах, а  $\sigma_{M_y}$  положительно в первом и четвертом квадрантах.

Для расчета на прочность бруса с поперечным сечением произвольной формы следует определить положение *нулевой* (нейтральной)

<sup>1</sup> Можно составить общее выражение для  $\sigma_{\max}$  (наибольшего нормального напряжения, возникающего в некотором поперечном сечении) и аналитически или графо-аналитически исследовать, для какого сечения это выражение максимально; но, как правило, это весьма трудоемко и менее целесообразно, чем расчет по нескольким сечениям.

линии в опасном сечении, приравняв нулю правую часть выражения (9.1). Нулевая линия — прямая, проходящая через центр тяжести сечения. В отличие от прямого изгиба нулевая линия не перпендикулярна к силовой. Тангенс угла  $\varphi$ , составляемого нулевой линией с осью  $Ox$ , определяется из выражения

$$|\operatorname{tg} \varphi| = \left| \frac{M_y J_x}{M_x J_y} \right|. \quad (9.2)$$

Угол  $\varphi$  должен быть отложен от оси  $Ox$  в ту же сторону, что и угол  $\beta$  между силовой линией и осью  $Oy$  от этой оси (рис. 9.3).

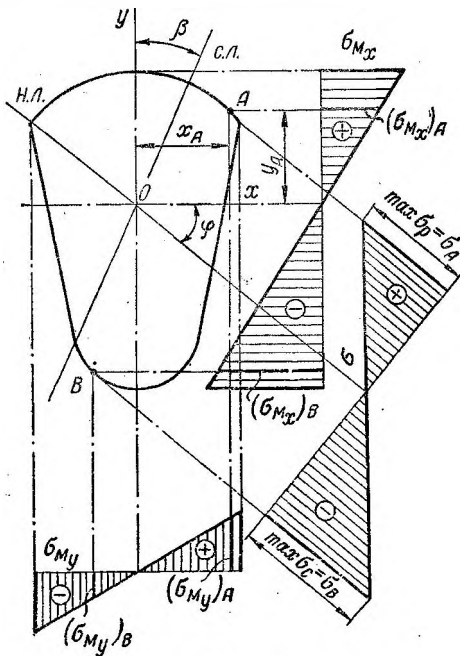


РИС. 9.3

Максимальные растягивающее и сжимающее напряжения возникают в точках, наиболее удаленных от нулевой линии (см. рис. 9.3). В общем случае должны быть составлены два условия прочности:

$$\left. \begin{aligned} \max \sigma_p &= \frac{M_x}{J_x} y_A + \frac{M_y}{J_y} x_A \leq [\sigma_p]; \\ |\max \sigma_c| &= \left| \frac{M_x}{J_x} y_B + \frac{M_y}{J_y} x_B \right| \leq [\sigma_c]. \end{aligned} \right\} \quad (9.3)$$

Для брусьев из материалов с  $[\sigma_p] = [\sigma_c]$  используется лишь то из условий (9.3), которое соответствует большему по абсолютной величине напряжению. При  $[\sigma_p] < [\sigma_c]$  (хрупкие материалы) первое из условий (9.3) достаточно, если  $\max \sigma_p \geq |\max \sigma_c|$ .

Во многих случаях отыскание нулевой линии не нужно, так как по характеру эпюр  $\sigma_{M_x}$ ,  $\sigma_{M_y}$  очевидно, какая точка сечения опасна. В частности, для сечений с двумя осями симметрии, имеющих точки, *одновременно* наиболее удаленные от обеих главных центральных осей (например, прямоугольник, двутавр), именно эти точки (или одна из них) являются опасными, и условие прочности может быть записано в виде

$$\max \sigma_p = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} \leq [\sigma_p]. \quad (9.4)$$

Для выполнения на основе формулы (9.4) проектного расчета следует задаться отношением  $W_x : W_y$  (в частности, для прокатных двутавров отношение  $W_x : W_y$  изменяется примерно в пределах 5—14; это отношение возрастает с увеличением номера профиля), а затем произвести проверку выбранного сечения и при необходимости внести коррективы. В случаях неприменимости формулы (9.4) приходится задаваться размерами сечения, а затем выполнять расчет, как проперочный, по формулам (9.3).

Касательное напряжение в произвольной точке поперечного сечения может быть определено как *геометрическая* сумма касательных напряжений, направленных параллельно главным центральным осям:

$$\tau = \sqrt{\tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2}. \quad (9.5)$$

Напряжения  $\tau_{zx}$  и  $\tau_{zy}$  находят по формуле Журавского (см. стр. 196).

Полное линейное перемещение ( $\delta$ ) центра тяжести некоторого поперечного сечения (полный прогиб) равно геометрической сумме его перемещений ( $\delta_x$ ,  $\delta_y$ ) в направлениях главных центральных осей:

$$\delta = \sqrt{\delta_x^2 + \delta_y^2}. \quad (9.6)$$

Максимальные линейные перемещения (стрелы прогибов) обычно обозначают  $f_x$ ,  $f_y$ ,  $f$ .

Полный угол поворота  $\theta$  поперечного сечения приближенно равен геометрической сумме углов поворота ( $\theta_x$ ,  $\theta_y$ ) этого сечения вокруг его главных центральных осей:

$$\theta \approx \sqrt{\theta_x^2 + \theta_y^2}. \quad (9.7)$$

Для брусьев круглого сплошного, кольцевого, квадратного и других сечений, у которых все центральные оси главные, косоугольный изгиб, очевидно, невозможен, но обычный прямой изгиб будет лишь в том случае, когда все нагрузки действуют в одной плоскости; в против-

ном случае имеет место так называемый *пространственный изгиб*. При этом виде изгиба упругая линия бруса — пространственная кривая. Для определения полных линейных и угловых перемещений служат формулы (9.6), (9.7). Определение нормальных напряжений и расчет на прочность можно вести по формулам (9.1), (9.3). Для

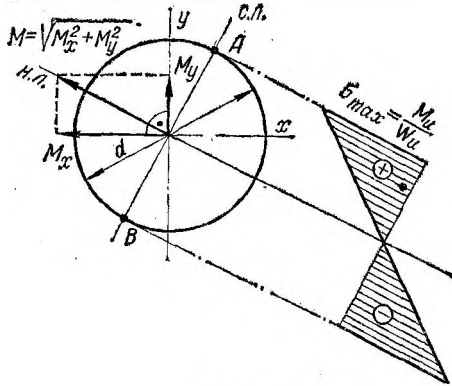


РИС. 9.4

круглого сплошного и кольцевого сечений значительно удобнее вести расчет по результирующему изгибающему моменту (см. пример 9.3):

$$M_{\text{н}} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}, \quad (9.8)$$

как на обычный прямой изгиб:

$$\sigma_{\text{max}} = \frac{\max M_{\text{н}}}{W_{\text{н}}} \leq [\sigma]. \quad (9.9)$$

Для круга

$$W_{\text{н}} = \frac{\pi d^3}{32};$$

для кругового кольца

$$W_{\text{н}} = \frac{\pi d^3}{32} (1 - c^4).$$

На рис. 9.4 даны векторные изображения изгибающих моментов, показаны взаимное расположение силовой и нулевой линий и вид эпюры  $\sigma$ .

**Пример 9.1.** Проверить прочность бруса по рис. 9.5, если  $[\sigma] = 1400 \text{ кг/см}^2$ . Определить максимальный прогиб;  $E = 2,1 \cdot 10^8 \text{ кг/см}^2$ .

**Решение.** Разложив силу  $P$  по главным центральным осям поперечного сечения бруса и определив опорные реакции (рис. 9.6, а), строим эпюры изгибающих моментов  $M_x$  и  $M_y$  (рис. 9.6, б, в). Наи-

большие нормальные напряжения возникают в точках  $A$  ( $\max \sigma_p$ ) и  $B$  ( $\max \sigma_c$ ) среднего поперечного сечения (см. рис. 9.6, а):

$$\begin{aligned} \max \sigma_p = |\max \sigma_c| &= \frac{\max M_x}{W_x} + \frac{\max M_y}{W_y} = \frac{Pl \cos \beta}{4 \frac{bh^2}{6}} + \frac{Pl \sin \beta}{4 \frac{b^2h}{6}} = \\ &= \frac{1840 \cdot 10^2}{8 \cdot 16^2} + \frac{1545 \cdot 10^3}{8^2 \cdot 16} = 1443 \text{ кг/см}^2, \end{aligned}$$

что выше  $[\sigma]$  всего лишь на 3%, т. е. прочность бруса достаточна.

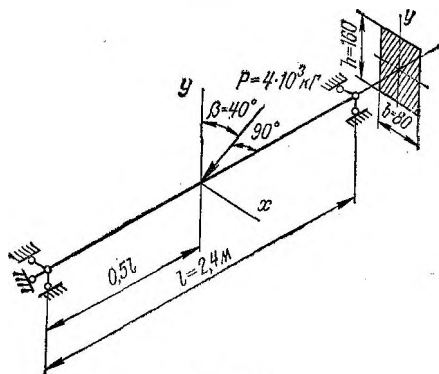


РИС. 9.5

Очевидно, максимальный прогиб возникает посередине пролета бруса; составляющие стрелы прогиба  $f_x$  и  $f_y$  в главных плоскостях бруса определяем, используя данные табл. 7.4:

$$f_x = \frac{P_x l^3}{48 E J_y} = \frac{(P \sin \beta) l^3}{48 E \frac{b^3 h}{12}} = \frac{4 \cdot 10^3 \cdot \sin 40^\circ \cdot 240^3}{4 \cdot 2,1 \cdot 10^6 \cdot 8^3 \cdot 16} = 0,517 \text{ см};$$

$$f_y = \frac{P_y l^3}{48 E J_x} = \frac{(P \cos \beta) l^3}{48 E \frac{bh^3}{12}} = \frac{4 \cdot 10^3 \cdot \cos 40^\circ \cdot 240^3}{4 \cdot 2,1 \cdot 10^6 \cdot 8 \cdot 16^3} = 0,154 \text{ см}.$$

Полный прогиб сечения посередине пролета

$$f = \sqrt{f_x^2 + f_y^2} = \sqrt{0,517^2 + 0,154^2} = 0,540 \text{ см}.$$



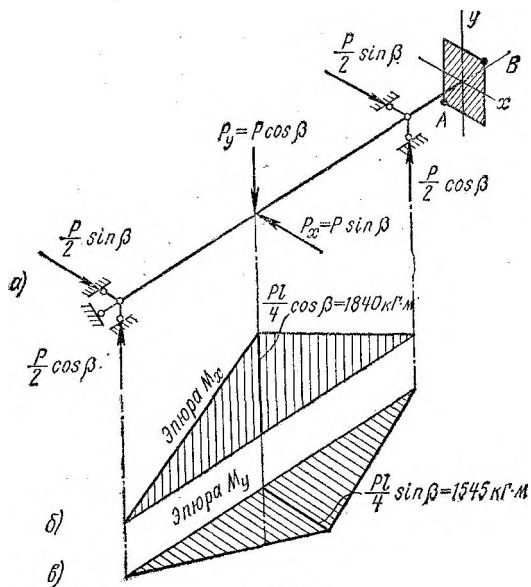


РИС. 9.6

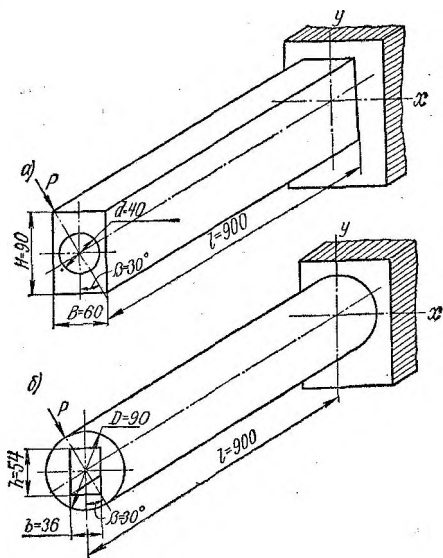


РИС. 9.7

**Пример 9.2.** Определить допускаемое значение силы  $P$  для каждого из двух заданных брусьев (рис. 9.7, а, б):

$$[\sigma_p] = 400 \text{ кг/см}^2, \quad [\sigma_c] = 1400 \text{ кг/см}^2.$$

**Решение.** Для обоих брусьев опасное сечение в заделке; максимальные изгибающие моменты относительно главных центральных осей:

$$\max M_x = (P \cos \beta) l;$$

$$\max M_y = (P \sin \beta) l.$$

Для бруса на рис. 9.7, а характер эиюр нормальных напряжений, соответствующих каждому из изгибающих моментов, представлен

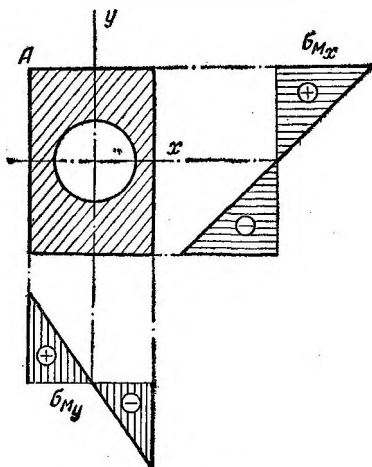


РИС. 9.8

на рис. 9.8. Опасной, очевидно, является точка  $A$ , в которой возникает наибольшее напряжение растяжения. Условие прочности [см. формулу (9.4)]:

$$\max \sigma_p = \frac{\max M_x}{W_x} + \frac{\max M_y}{W_y} \leq [\sigma_p].$$

Осевые моменты сопротивления сечения:

$$W_x = \frac{\frac{BH^3}{12} - \frac{\pi d^4}{64}}{0,5H} = \frac{\frac{6 \cdot 9^3}{12} - \frac{3,14 \cdot 4^4}{64}}{0,5 \cdot 9} = 78,2 \text{ см}^3;$$

$$W_y = \frac{\frac{B^3H}{12} - \frac{\pi d^4}{64}}{0,5B} = \frac{\frac{6^3 \cdot 9}{12} - \frac{3,14 \cdot 4^4}{64}}{0,5 \cdot 6} = 49,8 \text{ см}^3.$$

Из условия прочности имеем

$$\max \sigma_p = \frac{(P \cos 30^\circ) l}{W_x} + \frac{(P \sin 30^\circ) l}{W_y} = \frac{90P \cdot 0,866}{78,2} + \frac{90P \cdot 0,5}{49,8} \leq 400,$$

откуда

$$[P] = 210 \text{ кг}.$$

Для бруса на рис. 9.7, б эпюры  $\sigma_{M_x}$ ,  $\sigma_{M_y}$  (рис. 9.9) не позволяют установить положение опасной точки (ясно лишь, что это одна из точек контура второго квадранта сечения). Для нахождения опасной точки приходится предварительно определить положение нулевой

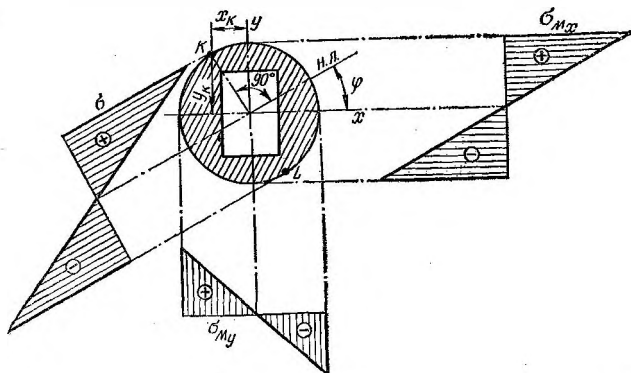


РИС. 9.9

левой линии. Тангенс угла наклона нулевой линии к оси  $Ox$  находим по формуле (9.2).

Учитывая, что

$$\frac{M_y}{M_x} = \operatorname{tg} \beta,$$

получаем

$$|\operatorname{tg} \varphi| = \left| \operatorname{tg} \beta \frac{J_x}{J_y} \right|,$$

где

$$J_x = \frac{\pi D^4}{64} - \frac{bh^3}{12} = \frac{3,14 \cdot 9^4}{64} - \frac{3,6 \cdot 5,4^3}{12} = 275 \text{ см}^4;$$

$$J_y = \frac{\pi D^4}{64} - \frac{b^3 h}{12} = \frac{3,14 \cdot 9^4}{64} - \frac{3,6^3 \cdot 5,4}{12} = 301 \text{ см}^4;$$

$$|\operatorname{tg} \varphi| = \operatorname{tg} 30^\circ \frac{275}{301} = 0,528; \quad \varphi = 27^\circ 50'.$$

Нулевая линия проходит через первый и третий квадранты сечения (в этих квадрантах  $\sigma_{M_x}$  и  $\sigma_{M_y}$  разнозначны). Проведя к сечению касательные, параллельные нулевой линии, находим точки  $K$  и  $L$ , в которых возникают наибольшие напряжения растяжения и сжатия (см. рис. 9.9). Опасной является точка  $K$ , так как  $\max \sigma_p = |\max \sigma_c|$ , а  $[\sigma_p] < [\sigma_c]$ ; условие прочности:

$$\max \sigma_p = \frac{\max M_x}{J_x} y_K + \frac{\max M_y}{J_y} x_K \leq [\sigma_p], \quad \text{где}$$

$$y_K = \frac{D}{2} \cos \varphi; \quad x_K = \frac{D}{2} \sin \varphi;$$

$$\max \sigma_p = \frac{Pl \cos \beta}{J_x} \cdot \frac{D}{2} \cos \varphi + \frac{Pl \sin \beta}{J_y} \cdot \frac{D}{2} \sin \varphi \leq [\sigma_p] \quad \text{или}$$

$$\max \sigma_p = \frac{90P \cos 30^\circ}{275} \cdot \frac{9}{2} \cos 27^\circ 50' + \frac{90P \sin 30^\circ}{301} \cdot \frac{9}{2} \sin 27^\circ 50' \leq 400,$$

откуда  $[P] = 277$  кг.

**Пример 9.3.** Определить диаметр поперечного сечения бруса (рис. 9.10);  $[\sigma] = 100$  н/мм<sup>2</sup>.

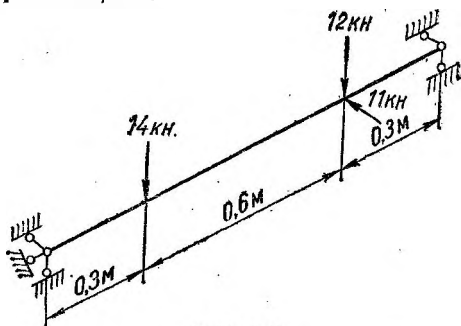


РИС. 9.10

**Решение.** Определив опорные реакции (показаны на рис. 9.11, а), строим эпюры изгибающих моментов:  $M_x$  (рис. 9.11, б) и  $M_y$  (рис. 9.11, в). Результирующие изгибающие моменты в сечениях  $C$  и  $D$ :

$$M_C = \sqrt{M_{x_C}^2 + M_{y_C}^2} = \sqrt{4,05^2 + 0,825^2} = 4,14 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_D = \sqrt{M_{x_D}^2 + M_{y_D}^2} = \sqrt{3,75^2 + 2,475^2} = 4,49 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Опасным оказалось сечение  $D$ ; легко убедиться, что во всех остальных поперечных сечениях бруса результирующий изгибающий момент меньше  $M_D$ .

На основании формулы (9.9)

$$W_{II} = \frac{\pi d^3}{32} \geq \frac{M_D}{[\sigma]},$$

откуда

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{32M_D}{\pi[\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 4,49 \cdot 10^6}{3,14 \cdot 100}} = 77,2 \text{ мм};$$

принимаем  $d = 80 \text{ мм}$ .

**Пример 9.4.** Определить требуемый номер двутаврового профиля балки (рис. 9.12);  $[\sigma] = 1600 \text{ кг/см}^2$ .

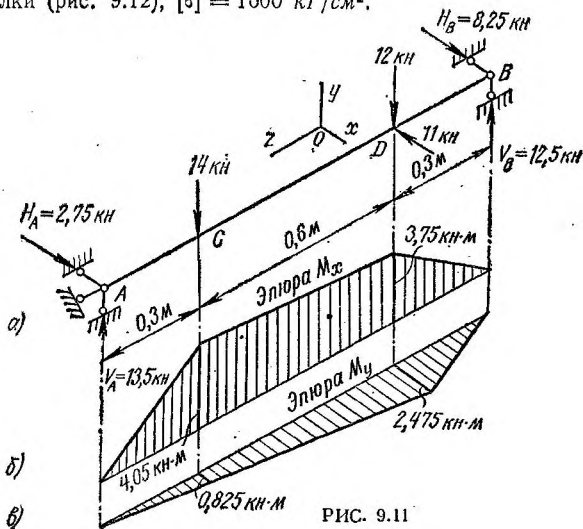


РИС. 9.11

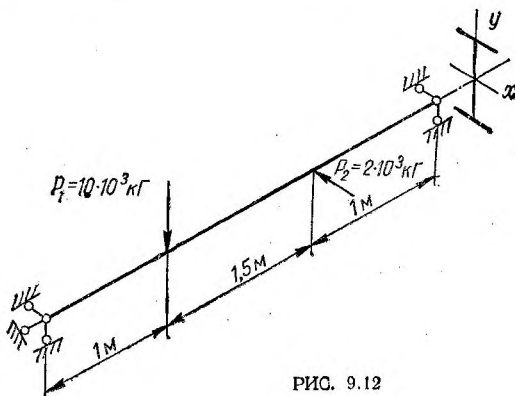


РИС. 9.12

**Решение.** Определив опорные реакции (рис. 9.13, а), строим эпюры изгибающих моментов в главных плоскостях балки (рис. 9.13, б, в). Опасным сечением балки является С или D, какое из них — по эпю-

рам  $M_x$  и  $M_y$  не очевидно. Предположим, что опасно сечение С, и выполним для него расчет, применив формулу (9.4):

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} \geq [\sigma].$$

Положим ориентировочно, что  $W_x = 8 W_y$ , тогда

$$\sigma_{C\max} = \frac{M_{xC}}{8W_y} + \frac{M_{yC}}{W_y} \geq [\sigma].$$

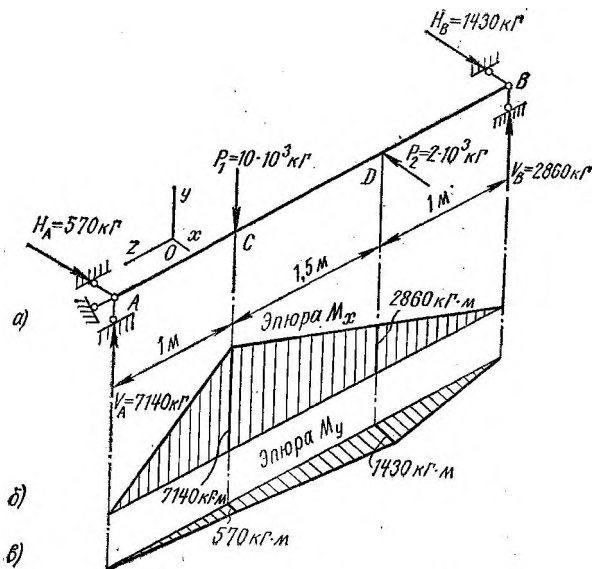


РИС. 9.13

откуда

$$W_y \geq \frac{M_{xC}}{8[\sigma]} + \frac{M_{yC}}{[\sigma]} = \frac{7140 \cdot 10^2}{8 \cdot 1600} + \frac{570 \cdot 10^2}{1600} = 91,4 \text{ см}^3.$$

Принимаем по ГОСТ 8239—56\* двутавр № 45, для которого  $W_x = 1220 \text{ см}^3$ ,  $W_y = 101 \text{ см}^3$ , и проверяем достаточность принятого сечения.

Для сечения С

$$\sigma_{C\max} = \frac{7140 \cdot 10^2}{1220} + \frac{570 \cdot 10^2}{101} = 1148 \text{ кгф/см}^2.$$

Для сечения  $D$

$$\sigma_{D\max} = \frac{2860 \cdot 10^3}{1220} + \frac{1430 \cdot 10^3}{101} = 1652 \text{ кг/см}^2.$$

Опасным оказалось сечение  $D$ ; в этом сечении балка перегружена на 3,25%, что допустимо.

## 9.2. РАСТЯЖЕНИЕ (СЖАТИЕ) С ИЗГИБОМ

В наиболее общем случае при этом виде сложного сопротивления в поперечных сечениях бруса возникает пять внутренних силовых факторов: продольная сила  $N_z$ , поперечные силы  $Q_x, Q_y$  и изгибающие моменты  $M_x, M_y$ . Иными словами, брус работает на растяжение (сжатие) и поперечный кривой изгиб, который в свою очередь может быть заменен двумя прямыми поперечными изгибами. Один из примеров нагружения бруса, при котором возникают перечисленные внутренние усилия, дан на рис. 9.14,а. На рис. 9.14,б

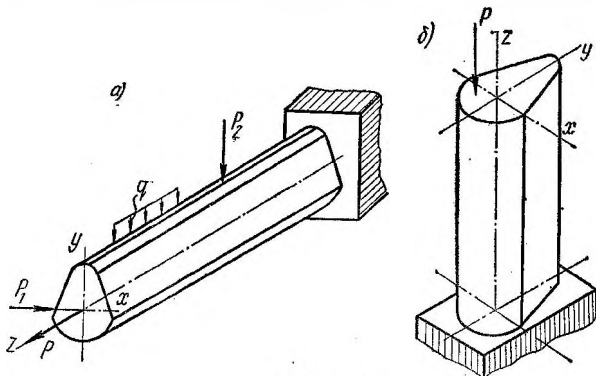


РИС. 9.14

приведен случай нагружения, отличающийся от предыдущего в основном тем, что здесь изгиб бруса является следствием *внецентренного* приложения сжимающей силы, а не действия нагрузок, перпендикулярных к оси бруса. При внецентренном растяжении (сжатии) бруса поперечные силы равны нулю, т. е. при таком нагружении получается сочетание центрального растяжения (сжатия) и чистого кривого изгиба (двух чистых прямых изгибов).

Различие рассмотренных случаев несущественно, так как влияние поперечных сил при расчетах, как правило, не учитывают. Практически отличие в методике расчета на прочность состоит в том, что в случаях, аналогичных рис. 9.14,а, приходится отыскивать опасное сечение, а при внецентренном продольном нагружении (см. рис. 9.14,б) все поперечные сечения равноопасны (имеются в виду случаи, когда собственный вес бруса не учитывается, а вне-

центренно растягивающие или сжимающие брус силы приложены лишь в его торцовом сечении).

В частных случаях (например, при схемах нагружения по рис. 9.15, а, б, в) получается сочетание центрального растяжения (сжатия) с поперечным или чистым *прямым* изгибом.

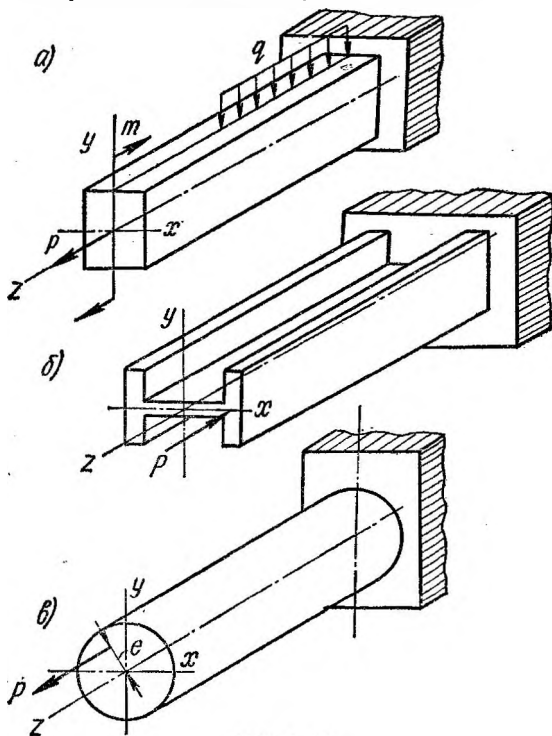


РИС. 9.15

Нормальное напряжение в произвольной точке некоторого поперечного сечения бруса при нагружении, вызывающем продольную силу и два изгибающих момента, определяется по формуле<sup>1</sup>

$$\sigma = \sigma_{N_z} + \sigma_{M_x} + \sigma_{M_y} = \frac{N_z}{F} + \frac{M_x}{J_x} y + \frac{M_y}{J_y} x. \quad (9.10)$$

<sup>1</sup> Формула основана на принципе независимости действия сил и, следовательно, применима лишь к брусам большой жесткости, для которых справедлив принцип начальных размеров. Определение опорных реакций и внутренних силовых факторов для таких брусев производится без учета их деформаций (расчет по недеформированной схеме).

Ориентировочно брусьями большой жесткости можно считать такие, гибкость которых  $\lambda \leq 40$ . Понятие о гибкости разъяснено в гл. 12; там же изложена методика расчета бруса малой жесткости при сочетании изгиба и осевого нагружения.



В отношении знаков отдельных слагаемых следует руководствоваться указаниями к формуле (9.1).

При сочетании растяжения (сжатия) с *прямым* изгибом одно из слагаемых формулы (9.10) обращается в нуль; например, при нагружении по схеме, представленной на рис. 9.15, *а*, нулю равно третье слагаемое, а по рис. 9.15, *б* — второе. Для бруса на рис. 9.15, *в* формула (9.10) применима, но пользоваться ею нецелесообразно — удобнее вести расчет по результирующему моменту  $M_{\Sigma} = Pe$  (см. пример 9.5).

Касательные напряжения, возникающие в поперечном сечении бруса, определяются по формуле (9.5).

Для расчета на прочность должны быть найдены опасное поперечное сечение и опасная точка в этом сечении. Если по эпюрам  $N_z$ ,  $M_x$ ,  $M_y$  не видно, какое сечение опасно, расчет приходится выполнять для двух или более предположительно опасных сечений (см. стр. 295). Точки поперечного сечения, в которых возникают наибольшие напряжения растяжения и сжатия, при некоторых формах сечений легко установить по эпюрам  $\sigma_{N_z}$ ,  $\sigma_{M_x}$ ,  $\sigma_{M_y}$ . Если это не удается или связано с необходимостью выполнения вычислений для ряда точек, следует предварительно найти положение нулевой линии; в данном случае это прямая, которая не проходит через центр тяжести сечения. Абсолютные величины отрезков, отсекаемых нулевой линией на осях координат (главных центральных осях), определяются из выражений:

$$\left. \begin{aligned} |a_x| &= \left| \frac{N_z}{M_y} \frac{J_y}{F} \right| = \left| \frac{N_z}{M_y} i_y^2 \right|; \\ |a_y| &= \left| \frac{N_z}{M_x} \frac{J_x}{F} \right| = \left| \frac{N_z}{M_x} i_x^2 \right|, \end{aligned} \right\} \quad (9.11)$$

где  $i_x$  и  $i_y$  — главные центральные радиусы инерции сечения (см. гл. 5).

По эпюрам  $\sigma_{N_z}$ ,  $\sigma_{M_x}$ ,  $\sigma_{M_y}$  всегда легко установить, в каких направлениях от начала координат следует отложить отрезки  $a_x$  и  $a_y$ , — нулевая линия, очевидно, не проходит через тот квадрант сечения, в котором знаки трех указанных напряжений совпадают (рис. 9.16; см. также пример 9.8). Для отыскания точек с наибольшими напряжениями к сечению проводят касательные, параллельные нулевой линии (см. рис. 9.16).

Если материал бруса неодинаково сопротивляется растяжению и сжатию, следует составить два условия прочности. В частности, при сжимающей продольной силе (см. рис. 9.16):

$$\left. \begin{aligned} \max \sigma_p &= \sigma_A = -\frac{N_z}{F} + \frac{M_x}{J_x} y_A + \frac{M_y}{J_y} x_A \leq [\sigma_p]; \\ |\max \sigma_c| &= |\sigma_B| = \left| -\frac{N_z}{F} - \frac{M_x}{J_x} y_B - \frac{M_y}{J_y} x_B \right| \leq [\sigma_c]. \end{aligned} \right\} \quad (9.12)$$

При растягивающей продольной силе первое слагаемое в формулах (9.12) положительное.

Если  $\max \sigma_p \geq \max \sigma_c$  (это возможно как при растягивающей, так и при сжимающей продольной силе), достаточно соблюдения первого из условий (9.12).

Для бруса прямоугольного, двутаврового и подобных сечений в одной из угловых точек возникает наибольшее растягивающее, а в противолежащей (по диагонали) — наибольшее сжимающее напряжение (см. примеры 9.6, 9.7), и условия прочности имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \max \sigma_p &= \pm \frac{N_z}{F} + \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} \leq [\sigma_p]; \\ |\max \sigma_c| &= \left| \pm \frac{N_z}{F} - \frac{M_x}{W_x} - \frac{M_y}{W_y} \right| \leq [\sigma_c]. \end{aligned} \right\} \quad (9.13)$$

Знак плюс перед первым слагаемым при растягивающей продольной силе.

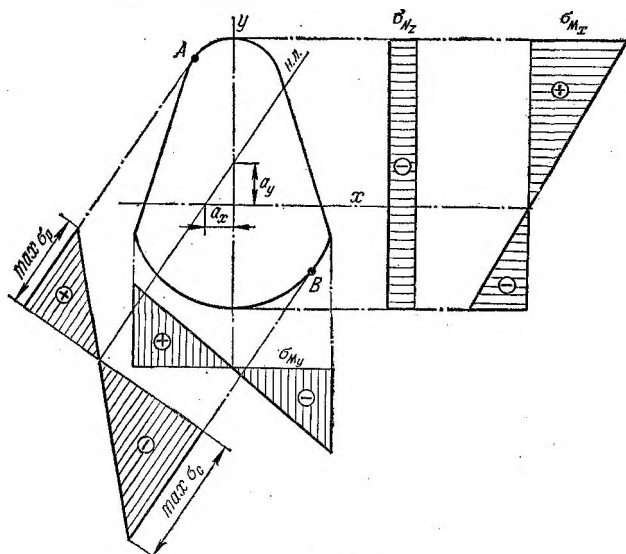


РИС. 9.16

Для бруса круглого сплошного или кольцевого сечений (см. также стр. 299 и пример 9.5):

$$\left. \begin{aligned} \max \sigma_p &= \pm \frac{N_z}{F} + \frac{M_n}{W_n} \leq [\sigma_p]; \\ |\max \sigma_c| &= \left| \pm \frac{N_z}{F} - \frac{M_n}{W_n} \right| \leq [\sigma_c]. \end{aligned} \right\} \quad (9.14)$$

Полное линейное перемещение центра тяжести поперечного сечения бруса равно геометрической сумме перемещения от изгиба, вычисляемого по формуле (9.6), и перемещения от осевого растяжения (сжатия).

**Пример 9.5.** Проверить прочность внецентренно сжатой короткой чугунной трубчатой стойки (рис. 9.17);  $[\sigma_p] = 350 \text{ кг/см}^2$ ,  $[\sigma_c] = 1100 \text{ кг/см}^2$ .

**Решение.** Внецентренное сжатие в данном случае проводится к осевому сжатию и чистому прямому изгибу. Наибольшие растягивающее и сжимающее напряжения возникают в точках *A* и *B* пересечения контура сечения с силовой линией (рис. 9.18). Так как по модулю максимальное сжимающее напряжение больше максимального растягивающего, составляем два условия прочности:

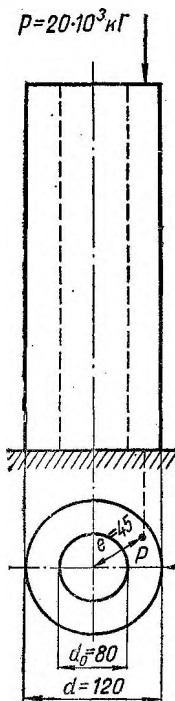


РИС. 9.17

$$\begin{aligned} \max \sigma_p &= \sigma_A = -\frac{N_z}{F} + \frac{M_{из}}{W_{из}} = \\ &= -\frac{P}{\frac{\pi d^2}{4}(1-c^2)} + \frac{Pe}{\frac{\pi d^3}{32}(1-c^4)} \leq [\sigma_p]; \\ |\max \sigma_c| &= |\sigma_B| = \left| -\frac{N_z}{F} - \frac{M_{из}}{W_{из}} \right| = \\ &= \left| -\frac{P}{\frac{\pi d^2}{4}(1-c^2)} - \frac{Pe}{\frac{\pi d^3}{32}(1-c^4)} \right| \leq [\sigma_c]. \end{aligned}$$

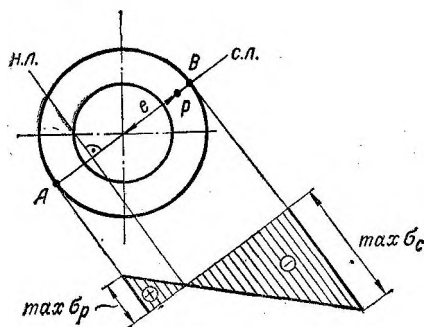


РИС. 9.18

Подставив числовые данные, получаем:

$$\begin{aligned} \max \sigma_p &= -\frac{20 \cdot 10^3}{\frac{3,14}{4} 12^2 \left[ 1 - \left( \frac{8}{12} \right)^2 \right]} + \frac{20 \cdot 10^3 \cdot 4,5}{\frac{3,14}{32} 12^3 \left[ 1 - \left( \frac{8}{12} \right)^4 \right]} = \\ &= -319 + 662 = 343 \text{ кг/см}^2. \\ |\max \sigma_c| &= |-319 - 662| = 981 \text{ кг/см}^2. \end{aligned}$$

Таким образом,  $\max \sigma_p = 0,979 [\sigma_p]$ ,  $|\max \sigma_c| = 0,891 [\sigma_c]$ , т. е. опаснее точка *A*; оба условия прочности удовлетворяются.

**Пример 9.6.** Проверить прочность внецентренно сжатой стойки (рис. 9.19), если  $[\sigma] = 150 \text{ н/мм}^2$ .

**Решение.** Используя данные ГОСТ 8239—56\* и 8240—56\*, определяем площадь, моменты инерции и моменты сопротивления сечения относительно главных центральных осей (рис. 9.20):

$$F = F_{\text{дв}} + 2F_{\text{шв}} = 23,4 + 2 \cdot 32,9 = 89,2 \text{ см}^2;$$

$$J_x = J_{x_{\text{дв}}} + 2J_{x_{\text{шв}}} = 82,6 + 2 \cdot 3180 = 6443 \text{ см}^4;$$

$$J_y = J_{y_{\text{дв}}} + 2J_{y_{\text{шв}}} = J_{y_{\text{дв}}} + 2(J_{y_{\text{шв}}} + a^2 F_{\text{шв}}) = \\ = 1290 + 2(254 + 6,89^2 \cdot 32,9) = 4922 \text{ см}^4;$$

$$W_x = \frac{J_x}{h/2} = \frac{6443}{12} = 537 \text{ см}^3;$$

$$W_y = \frac{J_y}{b/2} = \frac{4922}{9,56} = 515 \text{ см}^3.$$

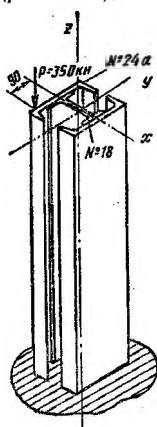


РИС. 9.19

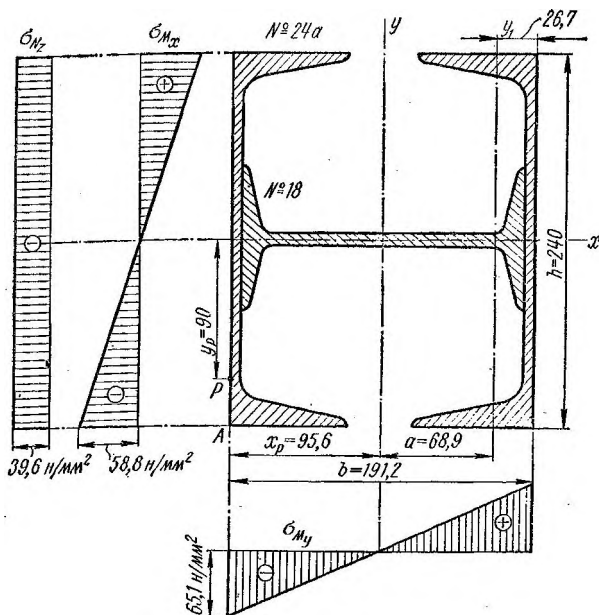


РИС. 9.20

$N_z = P = 350 \text{ кн}$ ;  $M_x = P y_p = 350 \cdot 90 \cdot 10^{-3} = 31,5 \text{ кн} \cdot \text{м}$ ;  $M_y = P x_p = 350 \cdot 95,6 \cdot 10^{-3} = 33,5 \text{ кн} \cdot \text{м}$ . По эпюрам нормальных напряжений, соответствующих каждому из внутренних силовых факторов в отдельности (см. рис. 9.20), очевидно, что опасна точка  $A$ , в которой возникает наибольшее по абсолютной величине напряжение (сжимающее):

$$|\max \sigma_c| = |\sigma_A| = \left| -\frac{N_z}{F} - \frac{M_x}{W_x} - \frac{M_y}{W_y} \right| = \frac{350 \cdot 10^3}{89,2 \cdot 10^2} + \frac{31,5 \cdot 10^6}{537 \cdot 10^3} + \frac{33,5 \cdot 10^6}{515 \cdot 10^3} = 39,2 + 58,8 + 65,1 = 163,1 \text{ н/мм}^2.$$

Это напряжение на 8,7% выше допускаемого, т. е. прочность бруса недостаточна.

**Пример 9.7.** Определить требуемый номер профиля швеллера для бруса, сваренного из двух швеллеров (рис. 9.21);  $[\sigma] = 1400 \text{ кг/см}^2$ . Сила  $P$ , приложенная в центре тяжести торцового сечения бруса, находится в плоскости  $zOy$ .

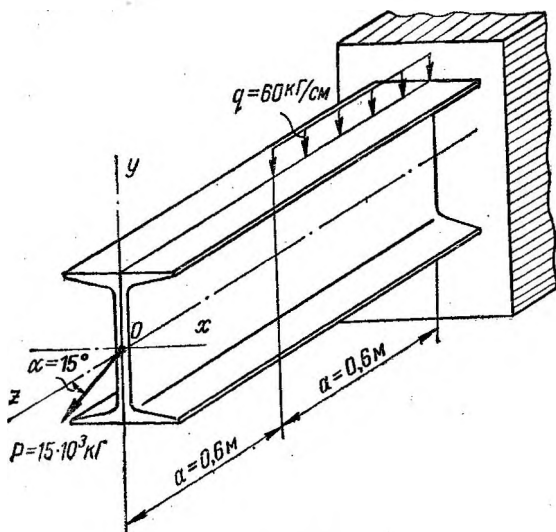


РИС. 9.21

**Решение.** Разложив силу  $P$  на составляющие  $P_z = P \cos \alpha = 15 \cdot 10^3 \cos 15^\circ = 14\,650 \text{ кг}$  и  $P_y = P \sin \alpha = 15 \cdot 10^3 \sin 15^\circ = 3880 \text{ кг}$ , получаем расчетную схему бруса, представленную на рис. 9.22, а. Брус работает на растяжение и прямой поперечный изгиб; эпюры  $N_z$  и  $M_x$  даны на рис. 9.22, б, в. Опасное сечение в заделке. Условие

прочности (наибольшие нормальные напряжения возникают в верхних точках опасного сечения)

$$\sigma_{\max} = \frac{N_z}{F} + \frac{\max M_x}{W_x} \leq [\sigma].$$

Для подбора сечения временно пренебрежем влиянием продольной силы, тогда

$$W_x \geq \frac{\max M_x}{[\sigma]} = \frac{5,74 \cdot 10^5}{1400} = 410 \text{ см}^3;$$

$$W_{\text{шв}} = \frac{W_x}{2} = \frac{410}{2} = 205 \text{ см}^3.$$

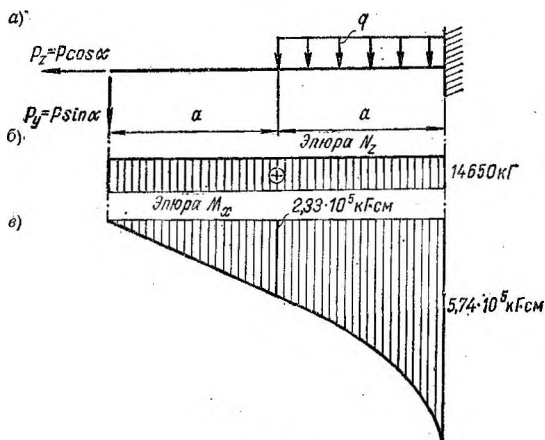


РИС. 9.22

Принимаем швеллер № 22а с  $W_{\text{шв}} = 212 \text{ см}^3$  и  $F_{\text{шв}} = 28,8 \text{ см}^2$  и проверяем наибольшие напряжения:

$$\sigma_{\max} = \frac{14650}{2 \cdot 28,8} + \frac{5,74 \cdot 10^5}{2 \cdot 212} = 1606 \text{ кг/см}^2,$$

что на 14,7% больше  $[\sigma]$ . Принимаем швеллер № 24 ( $W_{\text{шв}} = 242 \text{ см}^3$ ,  $F_{\text{шв}} = 30,6 \text{ см}^2$ ) и вновь проверяем напряжения:

$$\sigma_{\max} = \frac{14650}{2 \cdot 30,6} + \frac{5,74 \cdot 10^5}{2 \cdot 242} = 1427 \text{ кг/см}^2;$$

наибольшие напряжения всего лишь на 2% выше  $[\sigma]$ , т. е. швеллер № 24 достаточен.

**Пример 9.8.** Определить допускаемое значение  $P$  для бруса по рис. 9.23. Материал бруса — сталь 30ХГС с  $\sigma_{0,2p} = 120 \text{ кг/мм}^2$  и  $\sigma_{0,2c} = 138 \text{ кг/мм}^2$ ;  $[n] = 3,0$ .

**Решение.** Брус испытывает сжатие и поперечный косой изгиб. Опасное сечение бруса в заделке; абсолютные значения внутренних

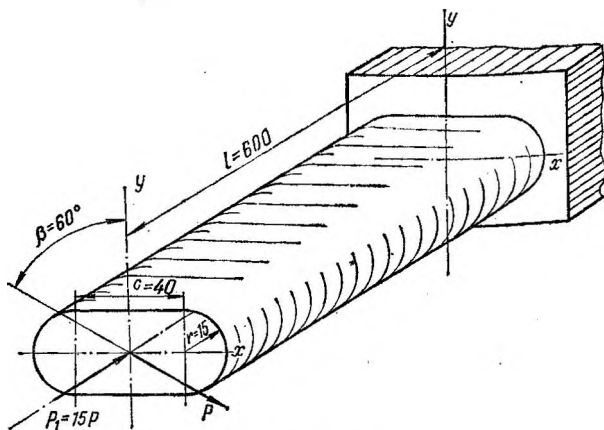


РИС. 9.23

силовых факторов в этом сечении:  $N_z = 15P$ ;  $\max M_x = (P \cos \beta) l$ ;  $\max M_y = (P \sin \beta) l$ . Геометрические характеристики сечения:

$$\begin{aligned}
 F &= c \cdot 2r + \pi r^2 = 4 \cdot 2 \cdot 1,5 + 3,14 \cdot 1,5^2 \approx 19,1 \text{ см}^2; \\
 J_x &= \frac{c(2r)^3}{12} + 2 \frac{\pi(2r)^4}{128} = \frac{4 \cdot 3^3}{12} + \frac{3,14 \cdot 1,5^4}{4} \approx 13 \text{ см}^4; \\
 J_y &= \frac{2rc^3}{12} + 2 \left[ 0,11r^4 + \frac{\pi r^2}{2} (0,424r + 0,5c)^2 \right] = \\
 &= \frac{2 \cdot 1,5 \cdot 4^3}{12} + 2 \left[ 0,11 \cdot 1,5^4 + \frac{3,14}{2} 1,5^2 (0,424 \cdot 1,5 + 2)^2 \right] \approx 66,2 \text{ см}^4; \\
 i_x^2 &= \frac{J_x}{F} = \frac{13}{19,1} = 0,68 \text{ см}^2; \\
 i_y^2 &= \frac{J_y}{F} = \frac{66,2}{19,1} = 3,46 \text{ см}^2.
 \end{aligned}$$

На рис. 9.24 показан характер эпюр  $\sigma_{N_z}$ ,  $\sigma_{M_x}$ ,  $\sigma_{M_y}$ . Эти эпюры не позволяют указать опасную точку, поэтому приходится определять положение нулевой линии. По формулам (9.11) находим абсолютные величины отрезков, отсекаемых нулевой линией на главных центральных осях:

$$|a_x| = \left| \frac{N_z}{M_y} i_y^2 \right| = \frac{15P \cdot 3,46}{(P \sin 60^\circ) 60} = 0,976 \text{ см};$$

$$|a_y| = \left| \frac{N_z}{M_x} i_x^2 \right| = \frac{15P \cdot 0,68}{(P \cos 60^\circ) 60} = 0,340 \text{ см}.$$

Из эпюр  $\sigma_{N_z}$ ,  $\sigma_{M_x}$ ,  $\sigma_{M_y}$  следует, что нулевая линия не проходит через четвертый квадрант сечения, — в любой точке этого квадранта знаки всех составляющих полного нормального напряжения одинаковы. Следовательно, отрезок  $a_y$  должен быть отложен вверх от оси  $x$ , а отрезок  $a_x$  — влево от оси  $y$  (см. рис. 9.24).

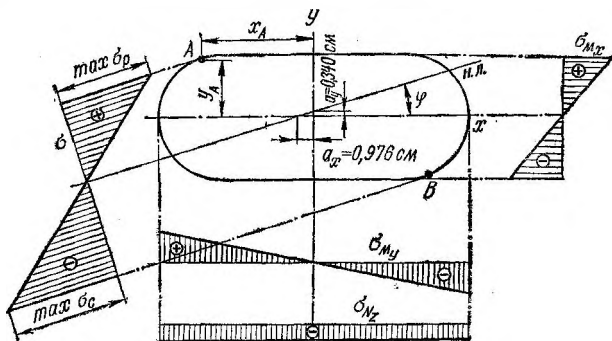


РИС. 9.24

Угол наклона нулевой линии к оси  $x$

$$\operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{a_y}{a_x} \right| = \frac{0,340}{0,976} = 0,348; \quad \varphi = 19^\circ 10'.$$

В точке  $A$  возникает наибольшее растягивающее, а в точке  $B$  — наибольшее сжимающее напряжение. Абсолютные величины координат этих точек:

$$|x_A| = |x_B| = r \sin \varphi \mp 0,5c = 1,5 \sin 19^\circ 10' + 2 = 2,49 \text{ см};$$

$$|y_A| = |y_B| = r \cos \varphi = 1,5 \cos 19^\circ 10' = 1,42 \text{ см}.$$

Условия прочности:

$$\max \sigma_p = \sigma_A = -\frac{15P}{F} + \frac{(P \cos \beta) l}{J_x} y_A + \frac{(P \sin \beta) l}{J_y} x_A \leq [\sigma_p] = \frac{\sigma_{0,2p}}{[n]};$$

$$|\max \sigma_c| = |\sigma_B| = \left| -\frac{15P}{F} - \frac{(P \cos \beta) l}{J_x} y_B - \frac{(P \sin \beta) l}{J_y} x_B \right| \leq [\sigma_c] = \frac{\sigma_{0,2c}}{[n]}.$$



Подставив числовые данные, получим:

$$\max \sigma_p = -\frac{15P}{19,1} + \frac{(P \cos 60^\circ) 60}{13} 1,42 + \frac{(P \sin 60^\circ) 60}{66,2} 2,49 \leq \frac{12\,000}{3,0},$$

откуда  $[P]_p = 898 \text{ кг}$ ;

$$|\max \sigma_c| = \left| -\frac{15P}{19,1} - \frac{(P \cos 60^\circ) 60}{13} 1,42 - \frac{(P \sin 60^\circ) 60}{66,2} 2,49 \right| \leq \frac{13\,800}{3,0},$$

откуда  $[P]_c = 775 \text{ кг}$ .

Итак, опасной оказалась точка B:  $[P] = [P]_c = 775 \text{ кг}$ .

ГИПОТЕЗЫ ПРОЧНОСТИ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ К РАСЧЕТУ ПРЯМОГО БРУСА

§ 10.1. ГИПОТЕЗЫ ПРОЧНОСТИ

Расчет на прочность при плоском или объемном напряженном состоянии<sup>1</sup> выполняют на основе применения *гипотез прочности*<sup>2</sup>, указывающих условия перехода материала в предельное напряженное состояние, т. е. появления признаков хрупкого разрушения или возникновения текучести. Гипотезы прочности дают возможность заменить заданное объемное или плоское напряженное состояние для оценки его опасности эквивалентным (равноопасным) ему одноосным растяжением. Напряжение, соответствующее этому воображаемому (расчетному) одноосному напряженному состоянию, называют *эквивалентным напряжением*<sup>3</sup> и обозначают  $\sigma_{\text{экв}}$ . При расчете с применением той или иной гипотезы прочности вычисляют эквивалентное напряжение по известным главным напряжениям заданного напряженного состояния [формулы (10.3) — (10.8)]. Сопоставление эквивалентного напряжения с допускаемым ( $[\sigma_p]$ ) или предельным ( $\sigma_{\text{пред}}$ ) напряжением для данного материала при одноосном растяжении позволяет дать оценку прочности для заданного напряженного состояния. Таким образом, независимо от применяемой гипотезы прочности, условие прочности может быть записано в виде

$$\sigma_{\text{экв}} \leq [\sigma_p] \quad (10.1)$$

или

$$n = \frac{\sigma_{\text{пред}}}{\sigma_{\text{экв}}} \geq [n], \quad (10.2)$$

где  $n$  и  $[n]$  — соответственно фактический и требуемый (заданный) коэффициенты запаса прочности.

В табл. 10.1 приведены основные сведения о гипотезах прочности; при этом указаны их формулировки и как критериев возникновения предельного напряженного состояния, и как критериев эквивалентности (равноопасности) различных напряженных состояний. Учитывая, что во многих книгах гипотезы прочности называют теориями прочности и им присвоены некоторые условные порядковые номера,

<sup>1</sup> В учебной и специальной литературе встречается термин «сложное напряженное состояние», объединяющий все виды напряженного состояния, кроме одноосного.

<sup>2</sup> В учебной литературе в основном применяется термин «теории прочности»; в специальной научно-технической литературе наряду с термином «гипотезы прочности» применяют термины «теории предельных напряженных состояний» или «гипотезы возникновения текучести и хрупкого разрушения».

<sup>3</sup> Встречается наименование «приведенное напряжение».

Таблица 10.1

## Основные сведения о гипотезах прочности

Основная характеристика (наименование) гипотезы прочности	Формулировка условия возникновения предельного напряженного состояния	Формулировка условия эквивалентности	Формула для определения эквивалентного напряжения	Указания по применению гипотезы прочности
Гипотеза наибольших нормальных напряжений (первая теория прочности)	Независимо от вида напряженного состояния <i>признаки хрупкого разрушения</i> возникают при достижении <i>наибольшим главным напряжением</i> некоторого определенного значения; постоянного для данного материала	Два напряженных состояния равноопасны, если <i>наибольшие</i> (по абсолютной величине) главные напряжения для них одинаковы	<p>При положительных главных напряжениях</p> $\sigma_{\text{эI}} = \sigma_1 \quad (10.3)$ <p>При отрицательных главных напряжениях</p> $\sigma_{\text{эI}} =  \sigma_3  \quad (10.4)$ <p>(при этом условие прочности <math>\sigma_{\text{эI}} \leq [\sigma_c]</math>).</p> <p>При <math>\sigma_1 &gt; 0</math> и <math>\sigma_3 &lt; 0</math> используются оба указанных значения эквивалентных напряжений</p>	Опытами в большинстве случаев не подтверждается. Применяется крайне редко лишь для весьма хрупких материалов (камень и т. п.). Не может применяться для оценки опасности плоского или объемного напряженного состояния, для которого главные напряжения однозначны и по величине близки друг к другу
Гипотеза наибольших относительных удлинений (вторая теория прочности)	Независимо от вида напряженного состояния <i>признаки хрупкого разрушения</i> возникают при достижении <i>наибольшим относительным удлинением</i> некоторого определенного значения; постоянного для данного материала	Два напряженных состояния равноопасны, если <i>наибольшие относительные удлинения</i> для них одинаковы	$\sigma_{\text{эII}} = \sigma_1 - \mu (\sigma_2 + \sigma_3) \quad (10.5)$	Опытами, как правило, не подтверждается. В настоящее время в расчетной практике почти не применяется

Основная характеристика (наименование) гипотезы прочности	Формулировка условия возникновения предельного напряженного состояния	Формулировка условия эквивалентности	Формула для определения эквивалентного напряжения	Указания по применению гипотезы прочности
Гипотеза наибольших касательных напряжений (третья теория прочности)	Независимо от вида напряженного состояния <i>текущая</i> возникает при достижении <i>максимальным касательным напряжением</i> определенного значения, постоянного для данного материала	Два напряженных состояния равноопасны, если максимальные касательные напряжения для них одинаковы	$\sigma_{\text{ЭIII}} = \sigma_1 - \sigma_3$ (10.6)	Для материалов, одинаково сопротивляющихся растяжению и сжатию, вполне удовлетворительно согласуется с результатами экспериментов
Гипотеза Мора (четвертая теория прочности) <sup>1</sup>	Независимо от вида напряженного состояния состояние материала наступает при достижении величинами $\sigma_1$ и $\sigma_3$ предельных значений, связанных с предельным напряжением при одноосном растяжении зависимостью $\sigma_{1\text{пр}} - \nu \sigma_{3\text{пр}} = \sigma_{\text{пр}}$	Два напряженных состояния равноопасны, если для соответствующих главных напряжений $(\sigma_1', \sigma_3')$ и $(\sigma_1'', \sigma_3'')$ соблюдается соотношение $\sigma_1' - \nu \sigma_3' = \sigma_1'' - \nu \sigma_3''$	$\sigma_{\text{ЭIV}} = \sigma_1 - \nu \sigma_3$ (10.7) где для хрупких материалов $\nu = \frac{\sigma_{\text{пч.р}}}{\sigma_{\text{пч.с}}};$ для хрупко-пластичных $\nu = \frac{\sigma_{0,2\text{р}}}{\sigma_{0,2\text{с}}};$	Для хрупких и хрупко-пластичных материалов. Для напряженных состояний смешанного типа ( $\sigma_1 > 0, \sigma_3 < 0$ ) точнее, чем при однозначных главных напряжениях
			для пластичных $\nu = 1,0$ и $\sigma_{\text{ЭIV}} = \sigma_{\text{ЭIII}}$ .	
			Можно принимать	
			$\nu = \frac{[\sigma_{\text{р}}]}{[\sigma_{\text{с}}]}$	

Гипотеза удельной потенциальной энергии формоизменения (пятая теория прочности)<sup>2</sup>

Независимо от вида напряженного состояния *текучесть* возникает при достижении *удельной потенциальной энергией формоизменения* некоторого определенного значения, постоянного для данного материала

Два напряженных состояния равноопасны, если удельная потенциальная энергия формоизменения для них одинакова

$$\sigma_{\text{ЭВ}} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} \quad (10.8)$$

Для материалов, одинаково сопротивляющихся растяжению и сжатию. Несколько лучше согласуется с результатами экспериментов, чем гипотеза наибольших касательных напряжений

Гипотеза октаэдрических касательных напряжений

Независимо от вида напряженного состояния *текучесть* возникает при достижении *октаэдрическим касательным напряжением* некоторого определенного значения, постоянного для данного материала

Два напряженных состояния равноопасны, если октаэдрические касательные напряжения для них одинаковы

Представляет собой иное физическое толкование предыдущей гипотезы, приводящее к той же формуле (10.8) для эквивалентного напряжения

<sup>1</sup> В учебной и специальной литературе в большинстве случаев не имеет порядкового номера.

<sup>2</sup> В учебной литературе ее часто называют не пятой, а четвертой теорией прочности.

в первой графе табл. 10.1 дана (в скобках) эта нумерация. Взамен общего обозначения  $\sigma_{\text{экв}}$  в табл. 10.1 и далее приняты обозначения  $\sigma_{\text{эI}}$ ,  $\sigma_{\text{эII}}$  и т. д., где числовой индекс указывает порядковый номер гипотезы прочности (по первому столбцу табл. 10.1).

## § 10.2 ПРИМЕНЕНИЕ ГИПОТЕЗ ПРОЧНОСТИ К РАСЧЕТУ ПРЯМОГО БРУСА

Эквивалентные напряжения при упрощенном плоском напряженном состоянии

Расчет с применением гипотез прочности необходим в тех случаях, когда в опасной точке бруса возникает плоское напряженное состояние.<sup>1</sup> Практически здесь всегда имеет место частный случай плоского напряженного состояния,<sup>2</sup> для которого главные напряжения определяются формулами (3.14); поэтому удобно выразить эквивалентные напряжения через нормальное  $\sigma_z$  и касательное  $\tau_z$  напряжения, возникающие на площадках поперечного сечения бруса, проходящего через исследуемую точку. При этом отпадает необходимость в вычислении главных напряжений. Взамен приведенных в табл. 10.1 общих формул (10.6) — (10.8) для расчета бруса получаются следующие выражения для эквивалентных напряжений (формулы по первым двум гипотезам прочности, как не применяемые в расчетной практике, не приведены).

По гипотезе наибольших касательных напряжений

$$\sigma_{\text{эIII}} = \sqrt{\sigma_z^2 + 4\tau_z^2}. \quad (10.9)$$

По гипотезе Мора

$$\sigma_{\text{эIV}} = \frac{1-\nu}{2} \sigma_z + \frac{1+\nu}{2} \sqrt{\sigma_z^2 + 4\tau_z^2}; \quad (10.10)$$

$\sigma_z$  следует подставлять со своим знаком.

По гипотезе удельной потенциальной энергии формоизменения (гипотезе октаэдрических касательных напряжений)

$$\sigma_{\text{эV}} = \sqrt{\sigma_z^2 + 3\tau_z^2}. \quad (10.11)$$

### Растяжение (сжатие) и кручение бруса

При таком виде нагружения в поперечном сечении бруса возникают два внутренних силовых фактора: продольная сила  $N_z$  и крутящий момент  $M_z$ .

<sup>1</sup> Исключением является случай чистого сдвига, так как обычно известно допускаемое касательное напряжение и нет надобности в определении  $\sigma_{\text{экв}}$ . В случаях косоугольного изгиба и при сочетании изгиба с растяжением (сжатием), если даже напряженное состояние в опасной точке не одноосное, его можно считать одноосным (см. стр. 294), так как влияние касательного напряжения, возникающего на площадке поперечного сечения, обычно крайне незначительно.  
<sup>2</sup> Случаи возникновения в опасной точке бруса объемного напряженного состояния крайне редки и могут рассматриваться как исключение. Таким исключением является, например, напряженное состояние в точках вала с напрессованной на него втулкой при работе вала на изгиб с кручением.

Для бруса круглого (сплошного или кольцевого) поперечного сечения опасными являются точки контура поперечного сечения; для этих точек

$$\sigma_z = \frac{N_z}{F}; \quad \tau_z = \frac{M_z}{W_p}.$$

Для бруса прямоугольного поперечного сечения опасные точки расположены в серединах больших сторон сечения; для этих точек

$$\sigma_z = \frac{N_z}{F}; \quad \tau_z = \frac{M_z}{W_k}.$$

Данные по вычислению геометрических характеристик прочности при кручении  $W_p$  и  $W_k$  приведены в гл. 6.

**Пример 10.1.** Определить коэффициент запаса прочности винта домкрата грузоподъемностью  $P = 100$  кН, если материал винта — сталь Ст. 4 с  $\sigma_T = 260$  н/мм<sup>2</sup>; винт имеет трапециевидальную резьбу диаметром  $d = 60$  мм и шагом  $S = 8$  мм (по ГОСТ 9484—60). Момент, передаваемый нарезанной частью винта (момент в резьбе),  $M_p = 0,11Pd_{cp}$ . Сравнить результаты, получаемые по гипотезе наибольших касательных напряжений и по гипотезе удельной потенциальной энергии формоизменения.

**Решение.** В опасном поперечном сечении винта возникает сжимающая продольная сила  $N_z = -P = -100$  кН и крутящий момент  $M_z = M_p = 0,11Pd_{cp} = 0,11 \cdot 100 \cdot 10^3 \cdot 56 = 616 \cdot 10^3$  н · мм ( $d_{cp} = d_2 = 56$  мм по ГОСТ 9484—60). Расчет ведем по внутреннему диаметру резьбы  $d_1 = 52$  мм.

Нормальные напряжения в поперечном сечении винта

$$\sigma_z = \frac{N_z}{\frac{\pi}{4} d_1^2} = \frac{-100 \cdot 10^3}{0,785 \cdot 52^2} = -47,1 \text{ н/мм}^2;$$

касательные напряжения в точках контура поперечного сечения

$$\tau_z = \frac{M_z}{\frac{\pi}{16} d_1^3} = \frac{616 \cdot 10^3}{\frac{3,14}{16} 52^3} = 22,3 \text{ н/мм}^2.$$

Эквивалентные напряжения по формулам (10.9) и (10.11):

$$\sigma_{эIII} = \sqrt{\sigma_z^2 + 4\tau_z^2} = \sqrt{(-47,1)^2 + 4 \cdot 22,3^2} = 64,8 \text{ н/мм}^2;$$

$$\sigma_{эV} = \sqrt{\sigma_z^2 + 3\tau_z^2} = \sqrt{(-47,1)^2 + 3 \cdot 22,3^2} = 60,9 \text{ н/мм}^2.$$

Коэффициенты запаса, соответствующие примененным при расчете гипотезам прочности:

$$n_{III} = \frac{\sigma_T}{\sigma_{эIII}} = \frac{260}{64,8} = 4,02;$$

$$n_V = \frac{\sigma_T}{\sigma_{эV}} = \frac{260}{60,9} = 4,27.$$

#### Изгиб и кручение бруса круглого поперечного сечения

При таком виде нагружения в произвольном поперечном сечении бруса возникают изгибающий и крутящий моменты и поперечная сила. Влиянием последней в подавляющем большинстве случаев пренебрегают; при этом для бруса из материала, одинаково сопротивляющегося растяжению и сжатию, опасными являются точки пересечения силовой линии с контуром поперечного сечения. При хрупком или хрупко-пластичном материале опасна та из указанных точек, в которой возникает растягивающее нормальное напряжение. В опасной точке возникает упрощенное плоское напряженное состояние. Формулы (10.9) — (10.11) для определения эквивалентного напряжения удобно представить в виде

$$\sigma_{экв} = \frac{M_{экв}}{W_n}, \quad (10.12)$$

где  $M_{экв}$  — эквивалентный (приведенный) момент, величина которого зависит от изгибающего и крутящего моментов и принятой гипотезы прочности;

$$W_n \text{ — осевой момент сопротивления } \left[ \text{для круга } W_n = \frac{\pi d^3}{32}, \text{ для} \right. \\ \left. \text{кругового кольца } W_n = \frac{\pi d^3}{32} (1 - c^4) \right].$$

Таким образом, расчет на изгиб с кручением бруса круглого поперечного сечения выполняется *по форме*, как расчет на прямой изгиб, но в расчетной формуле роль изгибающего момента играет эквивалентный момент. Для его вычисления служат формулы:  
*по гипотезе наибольших касательных напряжений*

$$M_{эIII} = \sqrt{M_n^2 + M_k^2}, \quad (10.13)$$

*по гипотезе Мора*

$$M_{эIV} = \frac{1-\nu}{2} M_n + \frac{1+\nu}{2} \sqrt{M_n^2 + M_k^2}, \quad (10.14)$$



по гипотезе удельной потенциальной энергии формоизменения (октаэдрических касательных напряжений)

$$M_{эВ} = \sqrt{M_n^2 + 0,75M_k^2}. \quad (10.15)$$

В формулах (10.13) — (10.15)  $M_k = M_z$  — крутящий момент;  $M_n = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}$  — результирующий изгибающий момент (см. стр. 299).

Для нахождения опасного поперечного сечения рассчитываемого бруса (вала) следует построить эпюры крутящих моментов и эпюры изгибающих моментов в двух взаимно перпендикулярных плоскостях (в общем случае пространственного изгиба). Для бруса постоянного диаметра опасным является поперечное сечение, для которого эквивалентный момент максимален. Если по эпюрам  $M_z$ ,  $M_x$ ,  $M_y$  не очевидно, где  $M_{эВ}$  максимален, следует вычислить его значения для нескольких предположительно опасных сечений.<sup>1</sup>

**Пример 10.2.** Определить по гипотезе наибольших касательных напряжений коэффициент запаса по отношению к пределу текучести для опасного поперечного сечения вала (рис. 10.1) постоянного по всей длине диаметра ( $d = 65$  мм). Вал передает мощность  $N = 42$  кВт при угловой скорости  $\omega = 30$  рад/сек. Материал вала — сталь 45 с  $\sigma_T = 30$  кг/мм<sup>2</sup>.

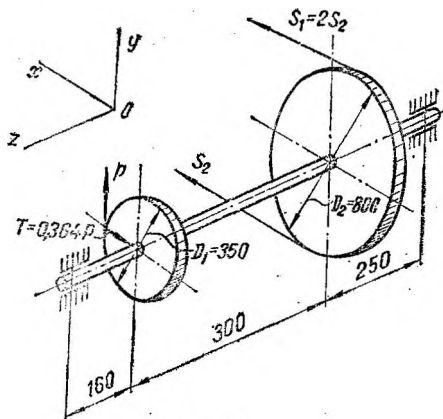


РИС. 10.1

**Решение.** Вращающий момент, передаваемый валом,

$$m_k = \frac{N}{\omega} = \frac{42 \cdot 10^3}{30} = 1,4 \cdot 10^3 \text{ н} \cdot \text{м}.$$

<sup>1</sup> Можно построить эпюру  $M_{эВ}$ , пользуясь одной из формул (10.13)—(10.15), но, как правило, это нецелесообразно — ход расчета, указанный в тексте, быстрее приводит к цели.

Окружное и радиальное усилия, действующие на зубчатое колесо:

$$P = \frac{2m_k}{D_1} = \frac{2 \cdot 1,4 \cdot 10^3}{350 \cdot 10^{-3}} = 8,0 \cdot 10^3 \text{ н} = 8 \text{ кН};$$

$$T = 0,364 P = 0,364 \cdot 8 = 2,91 \text{ кН}.$$

Натяжения ветвей ремня:

$$m_k = S_1 \frac{D_2}{2} - S_2 \frac{D_2}{2} = 2S_2 \frac{D_2}{2} - S_2 \frac{D_2}{2};$$

$$S_2 = \frac{2m_k}{D_2} = \frac{2 \cdot 1,4 \cdot 10^3}{800 \cdot 10^{-3}} = 3,5 \cdot 10^3 \text{ н} = 3,5 \text{ кН};$$

$$S_1 = 2S_2 = 2 \cdot 3,5 = 7 \text{ кН}.$$

Приведя все силы к точкам, лежащим на оси вала, получим расчетную схему по рис. 10.2, а (при приведении сил  $P$ ,  $S_1$  и  $S_2$  получаются скручивающие моменты  $m_{к1} = m_{к2} = m_k$ ).

Опорные реакции:

в плоскости  $zOy$

$$\sum m_{Bx} = 0; \quad -V_A \cdot 71 + P \cdot 55 = 0;$$

$$V_A = P \frac{55}{71} = 8 \frac{55}{71} = 6,2 \text{ кН};$$

$$\sum Y = 0; \quad -V_A + P - V_B = 0; \quad V_B = P - V_A = 8 - 6,2 = 1,8 \text{ кН};$$

в плоскости  $zOx$

$$\sum m_{By} = 0; \quad -H_A \cdot 71 - T \cdot 55 + R \cdot 25 = 0;$$

$$H_A = \frac{10,5 \cdot 25 - 2,91 \cdot 55}{71} = 1,44 \text{ кН};$$

$$\sum X = 0; \quad H_A + T - R + H_B = 0;$$

$$H_B = 10,5 - 1,44 - 2,91 = 6,15 \text{ кН}.$$

Эпюры крутящих и изгибающих моментов представлены на рис. 10.2, б, в, г. Очевидно, опасным является сечение С под серединой шкива; для этого сечения результирующий изгибающий момент

$$M_{вС} = \sqrt{M_{хС}^2 + M_{yС}^2} = \sqrt{0,45^2 + 1,54^2} = 1,6 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

эквивалентный момент

$$M_{\text{эIII}} = \sqrt{M_{\text{BC}}^2 + M_{\text{КС}}^2} = \sqrt{1,6^2 + 1,4^2} = 2,13 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

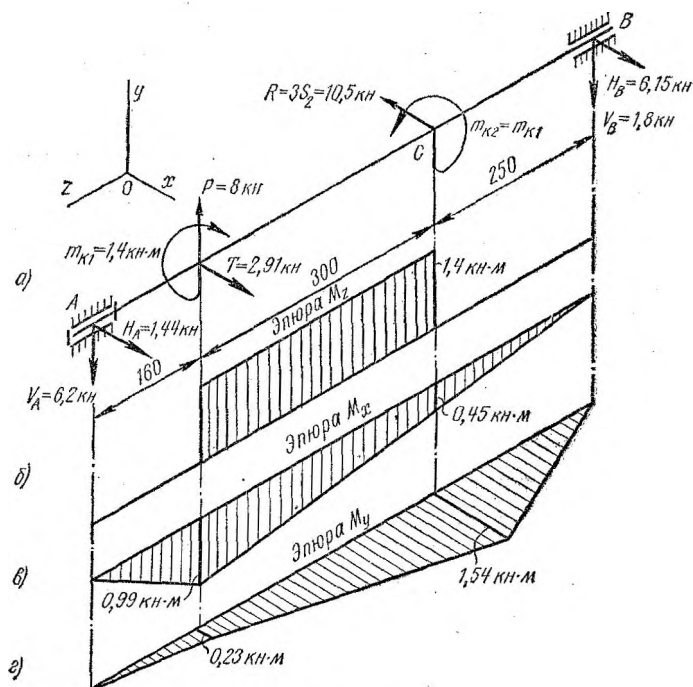


РИС. 10.2

На основании формулы (9.12)

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{эIII}} &= \frac{M_{\text{эIII}}}{W_{\text{II}}} = \frac{M_{\text{эIII}}}{\frac{\pi d^3}{32}} = \frac{2,13 \cdot 10^6}{\frac{3,14}{32} 65^3} = 78,8 \text{ н/мм}^2 = \\ &= \frac{78,8}{9,81} = 8,03 \text{ кг/мм}^2. \end{aligned}$$

Коэффициент запаса

$$n = \frac{\sigma_{\text{r}}}{\sigma_{\text{эIII}}} = \frac{30}{8,03} = 3,74.$$

**Пример 10.3.** Определить требуемые величины диаметров  $d_1$  и  $d_2$  вала зубчатой передачи (рис. 10.3, а). Вал передает мощность  $N = 26$  л. с. при угловой скорости  $n = 410$  об/мин. Расчет выполнить по гипотезе удельной потенциальной энергии формоизменения; при-

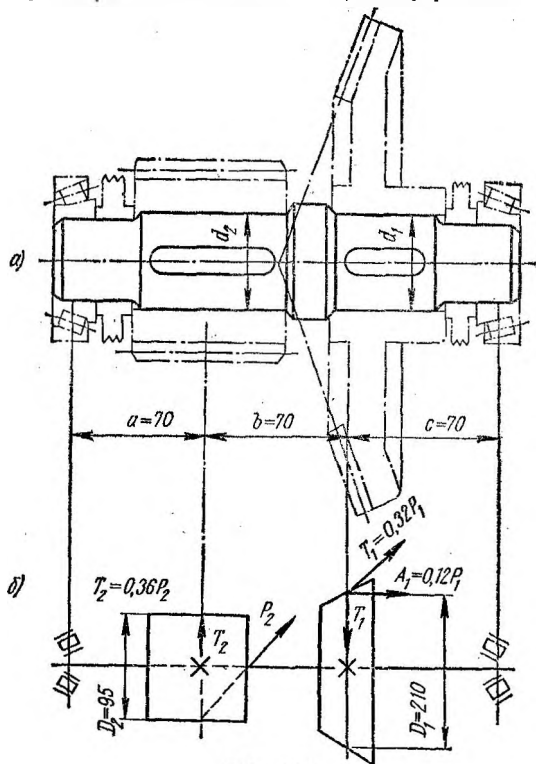


РИС. 10.3

нять  $[\sigma] = 500$  кг/см<sup>2</sup>. Силы, действующие на зубчатые колеса, показаны на рис. 10.3, б.

**Решение.** Приведа все силы к точкам, лежащим на оси вала, получим расчетную схему по рис. 10.4, а (для ясности чертежа сила  $A_1$  несколько смещена от оси вала). При переносе сил  $P_1$  и  $P_2$  добавляются скручивающие пары сил с моментами  $m_{к1} = P_1 \frac{D_1}{2}$  и  $m_{к2} = P_2 \frac{D_2}{2}$ . При переносе силы  $A_1$  добавляется пара сил с моментом  $m_x = A_1 \frac{D_1}{2}$ , вызывающим изгиб вала в плоскости  $zOy$  (в той же плоскости, что и силы  $T_1$  и  $T_2$ ).

Момент, передаваемый валом,

$$m_k = m_{k1} = m_{k2} = 71620 \frac{N}{n} = 71620 \frac{26}{410} = 4540 \text{ кг} \cdot \text{см.}$$

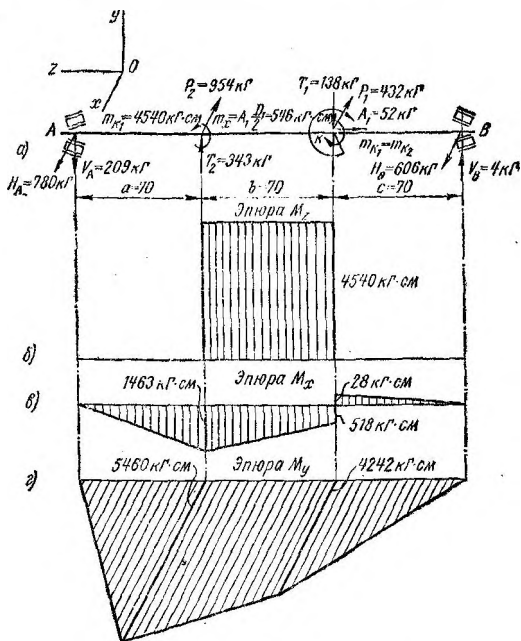


РИС. 10.4

Силы, действующие на зубчатые колеса:

$$P_1 = \frac{2m_{k1}}{D_1} = \frac{2 \cdot 4540}{21} = 432 \text{ кг};$$

$$P_2 = \frac{2m_{k2}}{D_2} = \frac{2 \cdot 4540}{9,5} = 954 \text{ кг};$$

$$T_1 = 0,32P_1 = 0,32 \cdot 432 = 138 \text{ кг};$$

$$T_2 = 0,36P_2 = 0,36 \cdot 954 = 343 \text{ кг};$$

$$A_1 = 0,12P_1 = 0,12 \cdot 432 = 52 \text{ кг}.$$

Опорные реакции:

в плоскости  $zOy$

$$\sum m_{Bx} = 0; \quad -V_A \cdot 21 + T_2 \cdot 14 - T_1 \cdot 7 + A_1 \frac{D_1}{2} = 0;$$

$$V_A = \frac{14T_2 - 7T_1 + A_1 \frac{D_1}{2}}{21} = \frac{14 \cdot 343 - 7 \cdot 138 + 52 \frac{21}{2}}{21} = 209 \text{ кг};$$

$$\sum m_{Ax} = 0; \quad -V_B \cdot 21 + A_1 \frac{D_1}{2} + T_1 \cdot 14 - T_2 \cdot 7 = 0;$$

$$V_B = \frac{A_1 \frac{D_1}{2} + 14T_1 - 7T_2}{21} = \frac{52 \frac{21}{2} + 14 \cdot 138 - 7 \cdot 343}{21} = 4 \text{ кг};$$

в плоскости  $zOx$

$$\sum m_{By} = 0; \quad -H_A \cdot 21 + P_2 \cdot 14 + P_1 \cdot 7 = 0;$$

$$H_A = \frac{14P_2 + 7P_1}{21} = \frac{14 \cdot 954 + 7 \cdot 432}{21} = 780 \text{ кг};$$

$$\sum m_{Ay} = 0; \quad H_B \cdot 21 - P_1 \cdot 14 - P_2 \cdot 7 = 0;$$

$$H_B = \frac{14P_1 + 7P_2}{21} = \frac{14 \cdot 432 + 7 \cdot 954}{21} = 606 \text{ кг}.$$

Эпюры крутящих и эпюры изгибающих моментов представлены на рис. 10.4, б, в, г. При расчете влияние продольной силы не учитываем, так как соответствующие ей нормальные напряжения ничтожно малы по сравнению с нормальными напряжениями от изгиба. На основе формул (10.1), (10.12), (10.15) условие прочности может быть записано в виде

$$\sigma_{\text{эВ}} = \frac{M_{\text{эВ}}}{W_{\text{н}}} = \frac{\sqrt{M_x^2 + M_y^2 + 0,75M_z^2}}{W_{\text{н}}} \leq [\sigma],$$

откуда

$$W_{\text{н}} = \frac{\pi d^3}{32} \geq \frac{\sqrt{M_x^2 + M_y^2 + 0,75M_z^2}}{[\sigma]}.$$

Для сечения под серединой цилиндрической шестерни

$$W_{\text{н}2} = \frac{\sqrt{1463^2 + 5460^2 + 0,75 \cdot 4540^2}}{500} = 13,8 \text{ см}^3;$$

$$d_2 = \sqrt[3]{\frac{32}{\pi} W_{\text{н}2}} = \sqrt[3]{\frac{32}{3,14} \cdot 13,8} = 5,2 \text{ см};$$

принимаем  $d_2 = 52 \text{ мм}$ .

Для сечения под серединой конического колеса

$$W_{\text{н}1} \geq \frac{\sqrt{518^2 + 4242^2 + 0,75 \cdot 4540^2}}{500} = 12 \text{ см}^3;$$

$$d_1 = \sqrt[3]{\frac{32}{\pi} W_{\text{н}1}} = \sqrt[3]{\frac{32}{3,14} \cdot 12} = 4,96 \text{ см};$$

принимаем  $d_1 = 50 \text{ мм}$ .

## Общий случай нагружения бруса круглого поперечного сечения

В этом случае в поперечных сечениях бруса возникают крутящий и изгибающий моменты, продольная и поперечная силы. В подавляющем большинстве случаев влияние поперечной силы не учитывают. Может оказаться, что и влияние продольной силы нет смысла учитывать (см. пример 10.3); здесь рассмотрен расчет с учетом продольной, но без учета поперечной силы.

Для бруса из пластичного материала опасна та из точек пересечения контура поперечного сечения с силовой линией, в которой нормальные напряжения от изгиба и от растяжения (сжатия) совпадают по знаку. Для бруса из хрупкого материала сказанное полностью справедливо при растягивающей продольной силе; при сжимающей продольной силе следует выполнить расчет для обеих точек пересечения контура поперечного сечения с силовой линией. В опасной точке возникает упрощенное плоское напряженное состояние, и для нахождения эквивалентного напряжения используется одна из формул (10.9) — (10.11). При этом

$$\sigma_z = \pm \frac{N_z}{F} \pm \frac{M_z}{W_H};$$

$$\tau_z = \frac{M_z}{W_\rho}.$$

При брус из пластичного материала в формуле для  $\sigma_z$  знаки слагаемых для опасной точки всегда совпадают. При хрупком материале и  $N_z > 0$  оба слагаемых принимаются со знаком плюс; при  $N_z < 0$  первое слагаемое отрицательно, а второе для одной из проверяемых точек положительно, а для другой — отрицательно (см. пример 10.4).

В рассматриваемом случае нагружения понятие «эквивалентный момент» неприменимо.

При проектном расчете возникают некоторые затруднения, связанные с тем, что в расчетную формулу искомая величина  $d$  входит как в третьей, так и во второй степени, т. е. получается кубическое уравнение, решать которое приходится путем подбора удовлетворяющих ему значений неизвестного ( $d$ ). Целесообразнее выполнить расчет на изгиб с кручением, временно пренебрегая влиянием продольной силы, затем несколько увеличить полученное по расчету значение  $d$  и произвести проверку. При неудовлетворительных результатах этой проверки следует внести коррективы в значение  $d$  и повторить расчет (см. пример 10.5).

**Пример 10.4.** Проверить прочность чугунного бруса (рис. 10.5, а), если  $[\sigma_p] = 350 \text{ кг/см}^2$ ,  $[\sigma_c] = 1200 \text{ кг/см}^2$ .

**Решение.** Построив эпюры внутренних силовых факторов (рис. 10.5, б, в, г), заключаем, что опасными являются поперечные сечения участка ВС бруса. Предположительно опасными являются точки К и L (см. рис. 10.5, а). Нормальные и касательные напряжения в указанных точках поперечного сечения:

$$(\sigma_2)_K = -\frac{N_2}{F} - \frac{M_H}{W_H} = -\frac{8 \cdot 10^3}{40} - \frac{210 \cdot 10^2}{74,5} = -482 \text{ кг/см}^2;$$

$$(\sigma_2)_L = -\frac{N_2}{F} + \frac{M_H}{W_H} = -\frac{8 \cdot 10^3}{40} + \frac{210 \cdot 10^2}{74,5} = 82 \text{ кг/см}^2;$$

$$\tau_2 = (\tau_2)_K = (\tau_2)_L = \frac{M_2}{W_p} = \frac{330 \cdot 10^2}{149} = 221 \text{ кг/см}^2.$$

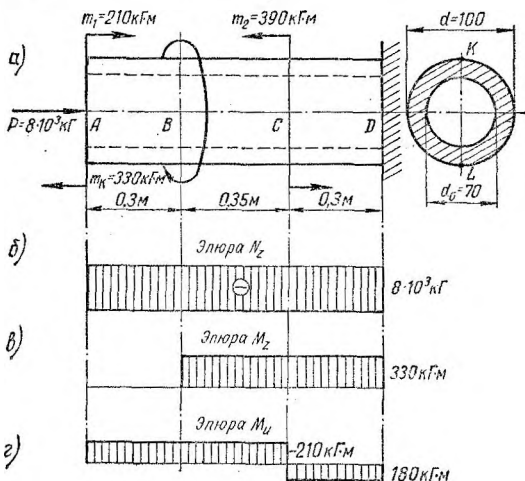


РИС. 10.5

Здесь

$$F = \frac{\pi d^2}{4} (1 - c^2) = \frac{3,14}{4} 10^2 (1 - 0,7^2) = 40 \text{ см}^2;$$

$$W_H = \frac{\pi d^3}{32} (1 - c^4) = \frac{3,14}{32} 10^3 (1 - 0,7^4) = 74,5 \text{ см}^3;$$

$$W_p = 2W_H = 2 \cdot 74,5 = 149 \text{ см}^3.$$

Эквивалентные напряжения для точек K и L [по формуле (10.10)] при

$$\nu = \frac{[\sigma_p]}{[\sigma_c]} = \frac{350}{1200} = 0,292;$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{элВ}}^K &= \frac{1-\nu}{2} (\sigma_2)_K + \frac{1+\nu}{2} \sqrt{(\sigma_2)_K^2 + 4\tau_2^2} = \\ &= \frac{1-0,292}{2} (-482) + \frac{1+0,292}{2} \sqrt{(-482)^2 + 4 \cdot 221^2} = \\ &= -171 + 422 = 251 \text{ кг/см}^2; \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \sigma_{\text{эIV}}^L &= \frac{1-\nu}{2} (\sigma_z)_L + \frac{1+\nu}{2} \sqrt{(\sigma_z)_L^2 + 4\tau_z^2} = \\ &= \frac{1-0,292}{2} 82 + \frac{1+0,292}{2} \sqrt{82^2 + 4 \cdot 221^2} = 29 + 291 = 320 \text{ кг/см}^2. \end{aligned}$$

Опасной оказалась точка  $L$ . Условие прочности удовлетворяется:

$$\sigma_{\text{эIV}}^L < [\sigma_p].$$

**Пример 10.5.** Определить, пользуясь гипотезой наибольших касательных напряжений, требуемый диаметр поперечного сечения бруса, в котором возникают: продольная сила  $N_z = 20 \cdot 10^3$  кг, крутящий момент  $M_z = 400$  кг·м, изгибающий момент  $M_{\text{н}} = 350$  кг·м. Принять  $[\sigma] = 1200$  кг/см<sup>2</sup>.

Решение. Временно пренебрегая влиянием продольной силы, рассчитываем брус на изгиб с кручением:

$$\begin{aligned} W_{\text{н}} &= \frac{\pi d^3}{32} \geq \frac{\sqrt{M_{\text{н}}^2 + M_z^2}}{[\sigma]} = \frac{\sqrt{(350 \cdot 10^3)^2 + (400 \cdot 10^3)^2}}{1200} = 44,3 \text{ см}^3; \\ d &= \sqrt[3]{\frac{32}{3,14} \cdot 44,3} = 7,7 \text{ см}. \end{aligned}$$

Принимаем  $d = 80$  мм (тогда  $F = \frac{3,14}{4} \cdot 8^2 = 50,2$  см<sup>2</sup>;  $W_{\text{н}} = \frac{\pi}{32} d^3 = \frac{3,14}{32} \cdot 8^3 = 50,2$  см<sup>3</sup>;  $W_p = 2W_{\text{н}} = 2 \cdot 50,2 = 100,4$  см<sup>3</sup>) и определяем наибольшее эквивалентное напряжение. Для опасной точки

$$\sigma_z = \frac{N_z}{F} + \frac{M_{\text{н}}}{W_{\text{н}}} = \frac{20 \cdot 10^3}{50,2} + \frac{350 \cdot 10^2}{50,2} = 1095 \text{ кг/см}^2;$$

$$\tau_z = \frac{M_z}{W_p} = \frac{400 \cdot 10^3}{100,4} = 398 \text{ кг/см}^2;$$

$$\sigma_{\text{эIII}} = \sqrt{\sigma_z^2 + 4\tau_z^2} = \sqrt{1095^2 + 4 \cdot 398^2} = 1353 \text{ кг/см}^2,$$

что на 12,7% выше допускаемого напряжения, т. е. диаметр  $d = 80$  мм недостаточен. Принимаем  $d = 82$  мм (тогда  $F = 52,7$  см<sup>2</sup>;  $W_{\text{н}} = 54,1$  см<sup>3</sup>;  $W_p = 108,2$  см<sup>3</sup>):

$$\sigma_z = \frac{20 \cdot 10^3}{52,7} + \frac{350 \cdot 10^2}{54,1} = 1027 \text{ кг/см}^2;$$

$$\tau_z = \frac{400 \cdot 10^3}{108,2} = 369 \text{ кг/см}^2;$$

$$\sigma_{\text{эIII}} = \sqrt{1027^2 + 4 \cdot 369^2} = 1262 \text{ кг/см}^2,$$

т. е.  $\sigma_{\text{эIII}}$  превышает  $[\sigma]$  примерно на 5%, и, следовательно, принятый диаметр достаточен.

## Общий случай нагружения бруса прямоугольного поперечного сечения

При этих условиях в произвольном поперечном сечении бруса возникают шесть внутренних силовых факторов (рис. 10.6). Характер эпюр нормальных и касательных напряжений, соответствующих каж-

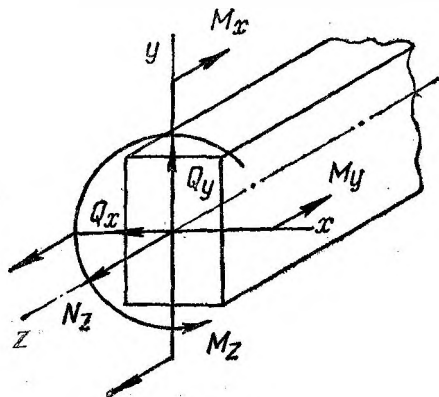


РИС. 10.6

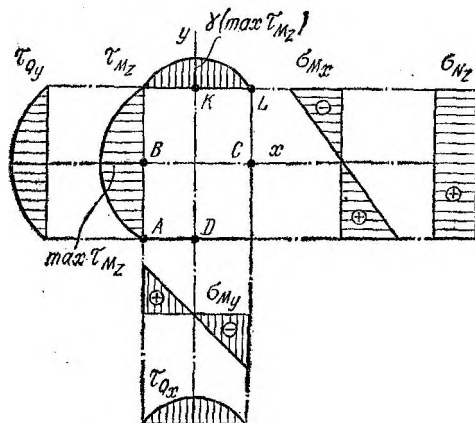


РИС. 10.7

дому из внутренних силовых факторов, показан на рис. 10.7. Влияние поперечных сил зачастую оказывается существенным и должно учитываться.<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Брус прямоугольного поперечного сечения, работающий в рассматриваемых условиях, во многих случаях имеет небольшую длину и нагружается значительными сосредоточенными силами, перпендикулярными к его продольной оси (например, державка токарного резца).

Для выявления опасного поперечного сечения должны быть построены эпюры внутренних силовых факторов. Если по этим эпюрам не очевидно, какое сечение является опасным, расчет следует выполнить для всех предположительно опасных сечений. При этом в каждом из сечений надо найти точку, для которой эквивалентное напряжение имеет наибольшую величину. Сопоставляя величины эквивалентных напряжений для таких относительно<sup>1</sup> опасных точек, принадлежащих каждому из рассматриваемых сечений, устанавливают опасную точку бруса, для которой составляют условие прочности.

В общем случае проверке подлежат точки  $A, B, C, D, K, L$ , отмеченные на рис. 10.7.

В точке  $A$  возникает одноосное напряженное состояние (одноосное растяжение), и независимо от принятой гипотезы прочности

$$(\sigma_{\text{эКВ}})_A = (\sigma_z)_A = \frac{N_z}{F} + \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y}.$$

На рис. 10.7 даны эпюры напряжений, соответствующие внутренним силовым факторам, направления которых показаны на рис. 10.6. Если в отличие от этой схемы продольная сила будет не растягивающей, а сжимающей, то при пластичном материале бруса из угловых точек опаснее будет  $L$ ; для нее

$$(\sigma_{\text{эКВ}})_L = |(\sigma_z)_L| = \left| -\frac{N_z}{F} - \frac{M_x}{W_x} - \frac{M_y}{W_y} \right|.$$

Если же материал хрупкий или хрупко-пластичный, то придется проверить обе отмеченные угловые точки (конечно, при условии, что результирующее нормальное напряжение в точке  $A$  растягивающее):

$$\begin{aligned} (\sigma_{\text{эКВ}})_A &= -\frac{N_z}{F} + \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y}; \\ (\sigma_{\text{эКВ}})_L &= \left| -\frac{N_z}{F} - \frac{M_x}{W_x} - \frac{M_y}{W_y} \right|. \end{aligned}$$

В остальных отмеченных точках имеет место упрощенное плоское напряженное состояние. При эпюрах исходных напряжений по рис. 10.7 в формулы (10.9) — (10.11) должны быть подставлены следующие значения  $\sigma_z$  и  $\tau_z$ :

для точки  $B$

$$\begin{aligned} (\sigma_z)_B &= \frac{N_z}{F} + \frac{M_y}{W_y}; \\ (\tau_z)_B &= \frac{M_z}{W_K} - \frac{3}{2} \frac{Q_y}{F}; \end{aligned}$$

<sup>1</sup> Точка относительно опасна в том смысле, что она является наиболее напряженной для рассматриваемого сечения, но не всегда опасной для бруса в целом.

для точки  $C$

$$(\sigma_z)_C = \frac{N_z}{F} - \frac{M_y}{W_y};$$

$$(\tau_z)_C = \frac{M_z}{W_k} + \frac{3}{2} \frac{Q_y}{F};$$

для точки  $D$

$$(\sigma_z)_D = \frac{N_z}{F} + \frac{M_x}{W_x};$$

$$(\tau_z)_D = \gamma \frac{M_z}{W_k} - \frac{3}{2} \frac{Q_x}{F};$$

для точки  $K$

$$(\sigma_z)_K = \frac{N_z}{F} - \frac{M_x}{W_x};$$

$$(\tau_z)_K = \gamma \frac{M_z}{W_k} + \frac{3}{2} \frac{Q_x}{F}.$$

При других направлениях внутренних силовых факторов следует внести соответствующие коррективы в знаки составляющих напряжений. Во многих случаях вполне очевидно, какие точки являются заведомо менее напряженными, и вычисление  $\sigma_{\text{экв}}$  выполняют для меньшего числа точек, чем указано здесь. Значения  $W_k$  и  $\gamma$  приведены в табл. 6.1.

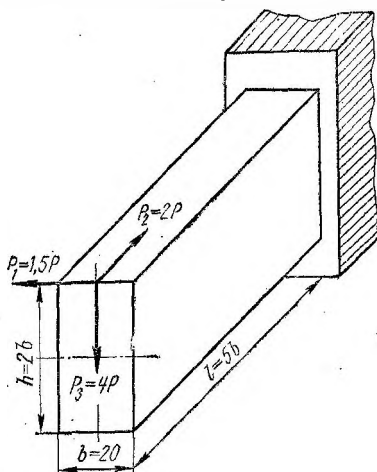


РИС. 10.8

**Пример 10.6.** Определить допускаемую величину  $P$  для бруса, изображенного на рис. 10.8. Расчет выполнить по гипотезе наибольших касательных напряжений; принять  $[\sigma_p] = 210 \text{ н/мм}^2$ .

**Решение.** Приведа все силы к центру тяжести торцового поперечного сечения бруса, получим расчетную схему (рис. 10.9) и построим эпюры внутренних силовых факторов (показаны на том же рисунке). По этим эпюрам заключаем, что опасное сечение — в заделке.

На рис. 10.10 показаны внутренние силовые факторы, возникающие в этом сечении; там же отмечены предположительно опасные точки. Эпюры напряжений не строим, так как они отличаются от показанных на рис. 10.7 только знаками нормальных напряжений.

Наибольшее по абсолютной величине нормальное напряжение возникает в точке А:

$$(\sigma_{\text{III}})_A = |(\sigma_2)_A| = \left| -\frac{N_2}{F} - \frac{M_x}{W_x} - \frac{M_y}{W_y} \right| = \frac{2P}{2b^2} + \frac{18Pb}{6(2b)^2} + \frac{7,5Pb}{b^2 \cdot 2b} = 50,5 \frac{P}{b^2}.$$

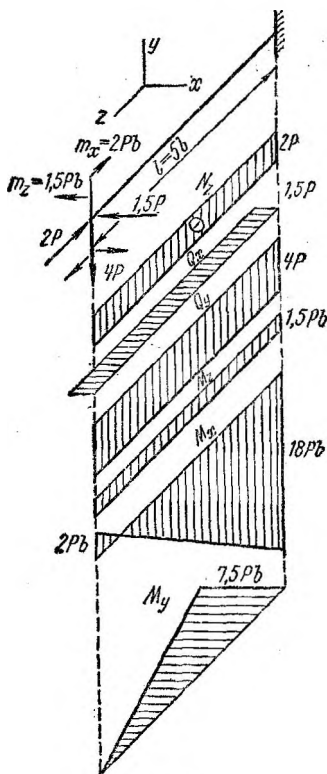


РИС. 10.9

Из точек, расположенных в серединах длинных сторон сечения, опаснее точка С, в которой совпадают по направлению нормальные напряжения от изгиба и сжатия и касательные напряжения от кручения и изгиба (соответствующие поперечной силе  $Q_y$ ):

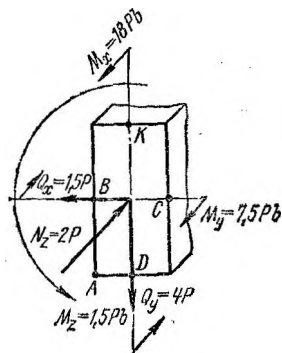


РИС. 10.10

$$|(\sigma_2)_B| = \left| -\frac{N_2}{F} - \frac{M_y}{W_y} \right| = \frac{2P}{2b^2} + \frac{7,5Pb}{b^2 \cdot 2b} = 23,5 \frac{P}{b^2};$$

$$(\tau_2)_B = \frac{M_z}{W_k} + \frac{3}{2} \cdot \frac{Q_y}{F} = \frac{1,5Pb}{ab^2h} + \frac{3}{2} \cdot \frac{4P}{2b^2} = \frac{1,5Pb}{0,246 \cdot 2b^3} + \frac{3P}{b^2} = 6,05 \frac{P}{b^2}.$$

где  $\alpha = 0,246$  при  $h : b = 2$  (по данным табл. 6.1);

$$\begin{aligned} (\sigma_{\text{III}})_B &= \sqrt{(\sigma_z)_B^2 + 4(\tau_z)_B^2} = \sqrt{\left(\frac{23,5P}{b^2}\right)^2 + 4\left(\frac{6,05P}{b^2}\right)^2} = \\ &= 26,4 \frac{P}{b^2}. \end{aligned}$$

Без сопоставления величин  $\sigma_{\text{III}}$  затруднительно сказать, какая из точек  $K$  или  $D$  (в серединах коротких сторон сечения) опаснее, так как в точке  $D$  совпадают направления нормальных напряжений, но противоположны направления касательных напряжений  $\tau_{M_z}$  и  $\tau_{Q_x}$ , а в точке  $K$ , наоборот, совпадают направления  $\tau_{M_z}$  и  $\tau_{Q_x}$  и противоположны направления  $\sigma_{M_x}$  и  $\sigma_{N_z}$ .

Для точки  $D$

$$\begin{aligned} |(\sigma_z)_D| &= \left| -\frac{N_z}{F} - \frac{M_x}{W_x} \right| = \frac{2P}{2b^2} + \frac{18Pb}{b(2b)^2} = 28 \frac{P}{b^2}; \\ (\tau_z)_D &= \gamma \frac{M_z}{W_K} - \frac{3}{2} \cdot \frac{Q_x}{F} = 0,796 \frac{1,5Pb}{0,246b^2 \cdot 2b} - \frac{3}{2} \cdot \frac{1,5P}{2b^2} = 1,3 \frac{P}{b^2}; \\ (\sigma_{\text{III}})_D &= \sqrt{(\sigma_z)_D^2 + 4(\tau_z)_D^2} = \sqrt{\left(28 \frac{P}{b^2}\right)^2 + 4\left(1,3 \frac{P}{b^2}\right)^2} = 28,2 \frac{P}{b^2}; \end{aligned}$$

Для точки  $K$

$$\begin{aligned} (\sigma_z)_K &= -\frac{N_z}{F} + \frac{M_x}{W_x} = -\frac{2P}{2b^2} + \frac{18Pb}{b(2b)^2} = 26 \frac{P}{b^2}; \\ (\tau_z)_K &= \gamma \frac{M_z}{W_K} + \frac{3}{2} \cdot \frac{Q_x}{F} = 0,796 \frac{1,5Pb}{0,246b^2 \cdot 2b} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1,5P}{2b^2} = 3,54 \frac{P}{b^2}; \\ (\sigma_{\text{III}})_K &= \sqrt{(\sigma_z)_K^2 + 4(\tau_z)_K^2} = \sqrt{\left(26 \frac{P}{b^2}\right)^2 + 4\left(3,54 \frac{P}{b^2}\right)^2} = 27 \frac{P}{b^2}. \end{aligned}$$

Итак, опасной оказалась угловая точка  $A$ . Из условия прочности

$$(\sigma_{\text{III}})_A = |(\sigma_z)_A| = 50,5 \frac{P}{b^2} \ll [\sigma_p]$$

следует, что

$$[P] = \frac{b^2 [\sigma_p]}{50,5} = \frac{20^2 \cdot 210}{50,5} = 1665 \text{ н} = 1,665 \text{ км.}$$

Анализ напряжений в предположительно опасных точках показывает, что при заданном характере нагружения влияние продольной

силы, поперечных сил и крутящего момента несущественно — решающую роль играет изгиб бруса. Без большой погрешности можно было определить  $[P]$  из расчета бруса на косоу изгиб. При некоторых навыках в выполнении подобных расчетов можно было бы путем грубой устной прикидки оценить сравнительную опасность рассмотренных точек и сразу же установить, что опасна точка  $A$ . Конечно, сказанное относится к данному частному примеру, и в общем случае при других соотношениях сил и размеров нельзя обойтись без обстоятельного анализа, подобного проиллюстрированному выше.

В заключение укажем, что рассмотренная схема нагружения соответствует условиям работы державки токарного резца, для которого заданные силы представляют собою три составляющие усилия резания.

**РАСЧЕТ ТОНКОСТЕННЫХ РЕЗЕРВУАРОВ  
И ТОЛСТОСТЕННЫХ ЦИЛИНДРОВ**

**§ 11.1. РАСЧЕТ ТОНКОСТЕННЫХ СОСУДОВ, НАХОДЯЩИХСЯ  
ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВНУТРЕННЕГО ДАВЛЕНИЯ**

Резервуары для жидкостей и газов обычно представляют собой тонкостенные оболочки, срединная поверхность которых является поверхностью вращения. *Срединной* называется поверхность, делящая пополам толщину стенки оболочки. Наиболее распространены резервуары, состоящие из цилиндрических, сферических и конических оболочек. Нагрузкой служит либо равномерно распределенное по всей внутренней поверхности оболочки давление газа, либо переменное по высоте резервуара давление заключенной в нем жидкости. Реже приходится встречаться с расчетами резервуаров на действие наружного давления. Расчеты на прочность при действии внутреннего и наружного давления принципиально выполняются одинаково, но при наружном давлении дополнительно должен быть выполнен расчет на устойчивость (см. [16, 43, 59, 67]).

Для резервуаров рассматриваемого типа (тонкостенных осесимметричных оболочек) при отсутствии нагрузок в виде сосредоточенных сил и моментов, постоянной или плавно изменяющейся кривизне меридианов можно считать, что напряжения по толщине стенки резервуара распределены равномерно — стенка не испытывает изгиба. При этом места жесткого закрепления оболочки из рассмотрения исключаются. Теория расчета, соответствующая указанным предположкам, носит название *безмоментной теории оболочек*.

Напряжения, возникающие в стенках оболочек в местах жестких закреплений и в местах изломов меридианов, носят местный характер, т. е. быстро затухают уже на незначительном расстоянии от зоны их возникновения. Таким образом, расчет по безмоментной теории для областей, достаточно удаленных от мест, где в стенках оболочки возникают изгибающие моменты, обеспечивает вполне удовлетворительную точность расчета.

На рис. 11.1, а показан резервуар, заполненный до уровня  $H$  жидкостью с удельным весом  $\gamma$ ; над жидкостью находится газ под давлением  $p_0$ . Элемент, выделенный из стенки резервуара двумя бесконечно близкими меридиональными и двумя бесконечно близкими коническими сечениями (перпендикулярными к меридиональным), показан на рис. 11.1, б. Грани этого элемента являются главными площадками для данной точки стенки. Нормальное напряжение, направленное вдоль меридиана (возникающее в коническом сечении), носит название *меридионального напряжения* и обозначается  $\sigma_m$ ; нормальное напряжение, направленное перпендикулярно к меридиану (возникающее в меридиональном сечении), носит название *окружного или кольцевого напряжения* и обозначается  $\sigma_t$ .  $\sigma_m$  и  $\sigma_t$  — главные напряжения. Они связаны между собой уравнением Лапласа:



$$\frac{\sigma_m}{\rho_m} + \frac{\sigma_t}{\rho_t} = \frac{p}{\delta}, \quad (11.1)$$

где  $\rho_m$  и  $\rho_t$  — радиусы кривизны соответственно меридионального и нормального к нему сечений для данной точки срединной поверхности (главные радиусы кривизны);

$p$  — давление, действующее на соответствующую точку стенки;

$\delta$  — толщина стенки.

Третьей главной площадкой является площадка, касательная к срединной поверхности; соответствующее главное напряжение принимают равным нулю. Таким образом, принимают, что в любой точке стенки возникает двухосное напряженное состояние, однородное по толщине стенки.

Строго говоря, напряженное состояние не совсем однородно, так как для внутренней точки стенки третье главное напряжение отлично от нуля — оно равно по абсолютной величине давлению  $p$ , действующему на эту точку. Так как в тонкостенных резервуарах  $p$  невелико по сравнению с  $\sigma_m$  и  $\sigma_t$ , то им можно пренебречь и считать, как было указано, что во всех точках по толщине стенки напряженное состояние одинаково.

В общем случае, когда  $\rho_m \neq \infty$  и  $\rho_t \neq \infty$ , в первую очередь определяют меридиональное напряжение, используя уравнение равновесия сил, действующих на отделенную коническим сечением часть резервуара (рис. 11.1, а):

$$\sigma_m 2\pi r \delta \cos \alpha = \sum P_{iz} \quad (11.2)$$

где  $r$  — радиус кривизны параллели в плоскости, перпендикулярной к оси резервуара;

$\sum P_{iz}$  — сумма проекций на ось резервуара всех внешних сил, дей-

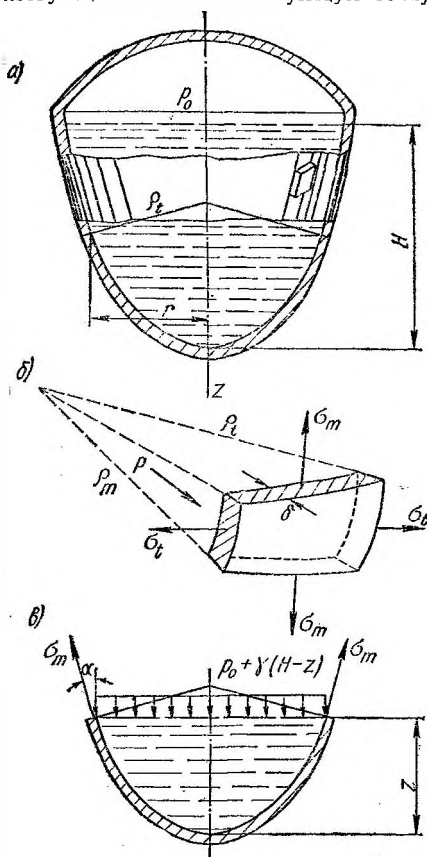
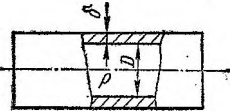
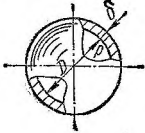


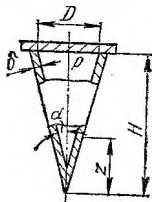
РИС. 11.1

Формулы для расчета тонкостенных резервуаров, находящихся под действием внутреннего давления

Форма резервуара и характер нагружения	Значения $\sigma_m$ и $\sigma_t$ для произвольной точки стенки резервуара	Наибольшие значения напряжений $\max \sigma_m$ и $\max \sigma_t$	Наибольшие значения эквивалентных напряжений $\sigma_{\text{ЭIII}}$ и $\sigma_{\text{ЭV}}$
<p>Цилиндр, наполненный газом под давлением <math>p</math></p> 	$\sigma_m = \frac{pD}{4\delta}; \quad (11.4)$	—	$\sigma_{\text{ЭIII}} = \frac{pD}{2\delta}; \quad (11.6)$
	$\sigma_t = \frac{pD}{2\delta} \quad (11.5)$		$\sigma_{\text{ЭV}} = 0,433 \frac{pD}{\delta} \quad (11.7)$
<p>Сфера, наполненная газом под давлением <math>p</math></p> 	$\sigma_m = \sigma_t = \frac{pD}{4\delta} \quad (11.8)$	—	$\sigma_{\text{ЭIII}} = \sigma_{\text{ЭV}} = \frac{pD}{4\delta} \quad (11.9)$

РАСЧЕТ РЕЗЕРВУАРОВ И ЦИЛИНДРОВ

Конус, наполненный газом под давлением  $p$



$$\sigma_m = \frac{pDz}{4\delta H \cos \alpha}; \quad (11.10)$$

$$\sigma_t = \frac{pDz}{2\delta H \cos \alpha} \quad (11.11)$$

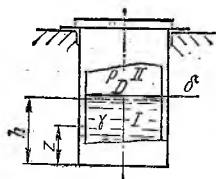
$$\max \sigma_m = \frac{pD}{4\delta \cos \alpha}; \quad (11.12)$$

$$\max \sigma_t = \frac{pD}{2\delta \cos \alpha} \quad (11.13)$$

$$\sigma_{\text{ЭIII}} = \frac{pD}{2\delta \cos \alpha}; \quad (11.14)$$

$$\sigma_{\text{ЭV}} = \frac{0,433pD}{\delta \cos \alpha} \quad (11.15)$$

Цилиндр, заполненный до уровня  $h$  жидкостью с удельным весом  $\gamma$  и в верхней части наполненный газом под давлением  $p_0$



$$\sigma_m = \frac{(p_0 + \gamma h) D}{4\delta} \quad (11.16)$$

Для нижней части (I) резервуара

$$\sigma_{tH} = \frac{D}{2\delta} [p_0 + \gamma(h - z)] \quad (11.17)$$

Для верхней части (II) резервуара

$$\sigma_{tB} = \frac{p_0 D}{2\delta} \quad (11.18)$$

$$\max \sigma_{tH} = \frac{D}{2\delta} (p_0 + \gamma h) \quad (11.19)$$

Для нижней части резервуара

$$(\sigma_{\text{ЭIII}})_H = \frac{D}{2\delta} (p_0 + \gamma h); \quad (11.20)$$

$$(\sigma_{\text{ЭV}})_H = 0,433 \frac{D}{\delta} (p_0 + \gamma h) \quad (11.21)$$

Для верхней части резервуара при  $\gamma h > p_0$

$$(\sigma_{\text{ЭIII}})_B = \frac{(p_0 + \gamma h) D}{4\delta}; \quad (11.22)$$

при  $\gamma h < p_0$

$$(\sigma_{\text{ЭIII}})_B = \frac{p_0 D}{2\delta}; \quad (11.22a)$$

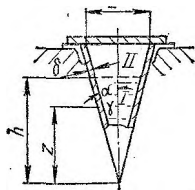
при  $\gamma h \approx p_0$

$$(\sigma_{\text{ЭV}})_B = \frac{D p_0}{4\delta} \sqrt{3 + \left(\frac{\gamma h}{p_0}\right)^2} \quad (11.23)$$

РАСЧЕТ ТОНКОСТЕННЫХ СОСУДОВ

Форма резервуара и характер нагружения	Значения $\sigma_m$ и $\sigma_t$ для произвольной точки стенки резервуара	Наибольшие значения напряжений $\max \sigma_m$ и $\max \sigma_t$	Наибольшие значения эквивалентных напряжений $\sigma_{\text{эIII}}$ и $\sigma_{\text{эV}}$
--	---	--	--

Для нижней части (I) резервуара

Конус, заполненный до уровня  $h$  жидкостью с удельным весом  $\gamma$ 

$$\sigma_{mH} = \frac{\gamma(3h - 2z)z \operatorname{tg} \alpha}{6\delta \cos \alpha}; \quad (11.24)$$

$$\sigma_{tH} = \frac{\gamma(h - z)z \operatorname{tg} \alpha}{\delta \cos \alpha} \quad (11.25)$$

$$\max \sigma_{mH} = \frac{3\gamma h^2 \operatorname{tg} \alpha}{16\delta \cos \alpha} \quad (11.27)$$

$$\left( \text{при } z = \frac{3}{4}h \right);$$

$$\max \sigma_{tH} = \frac{\gamma h^2 \operatorname{tg} \alpha}{4\delta \cos \alpha} \quad (11.28)$$

$$\left( \text{при } z = \frac{h}{2} \right)$$

$$(\sigma_{\text{эIII}})_H = \frac{\gamma h^2 \operatorname{tg} \alpha}{4\delta \cos \alpha}; \quad (11.30)$$

$$(\sigma_{\text{эV}})_H = \frac{0,22\gamma h^2 \operatorname{tg} \alpha}{\delta \cos \alpha}; \quad (11.31)$$

$$(\sigma_{\text{эIII}})_B = (\sigma_{\text{эV}})_B =$$

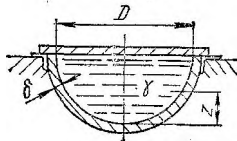
Для верхней части (II) резервуара

$$\sigma_{mB} = \frac{\gamma h^2 \operatorname{tg} \alpha}{6\delta z \cos \alpha}; \quad (11.26)$$

$$\sigma_{tB} = 0$$

$$\max \sigma_{mB} = \frac{\gamma h^2 \operatorname{tg} \alpha}{6\delta \cos \alpha} \quad (11.29)$$

$$= \frac{\gamma h^2 \operatorname{tg} \alpha}{6\delta \cos \alpha} \quad (11.32)$$

Полусфера, заполненная жидкостью с удельным весом  $\gamma$ 

$$\sigma_m = \frac{\gamma D^2 (3D^2 - 6Dz + 4z^2)}{24\delta (D^2 - Dz)}; \quad (11.33)$$

$$\sigma_t = \frac{\gamma D^2 (3D^2 - 12Dz + 8z^2)}{24\delta (D^2 - Dz)} \quad (11.34)$$

$$\max \sigma_m = \max \sigma_t = \frac{\gamma D^2}{8\delta} \quad (11.35)$$

$$\left( \text{при } z = 0 \right);$$

$$(\sigma_m)_{z=0,5D} = -(\sigma_t)_{z=0,5D} =$$

$$= \frac{\gamma D^2}{12\delta} \quad (11.36)$$

$$\sigma_{\text{эIII}} = \frac{\gamma D^2}{8\delta}; \quad (11.37)$$

$$\sigma_{\text{эV}} = \frac{0,144\gamma D^2}{\delta} \quad (11.38)$$

ствующих на отсеченную часть (обычно собственный вес резервуара не учитывают):

$$\sum P_{iz} = \gamma V_H + \rho \pi r^2. \quad (11.3)$$

Здесь  $\gamma$  — удельный вес жидкости, находящейся в резервуаре;

$V_H$  — объем оставленной (нижней) части резервуара;

$\rho$  — давление на уровне проведенного сечения, определяемое высотой столба жидкости, расположенного выше сечения, и давлением  $p_0$  газа, находящегося над жидкостью:  $\rho = \gamma(H - z) + p_0$ .

Формула (11.3) соответствует случаю, когда опора резервуара расположена выше проведенного сечения; в противном случае в величину  $\sum P_{iz}$  должна быть включена реакция опоры.

Расчетные формулы для ряда частных случаев, полученные на основе приведенных зависимостей и применения гипотез прочности, даны в табл. 11.1.

**Пример 11.1.** Определить требуемую толщину стенки цилиндрического резервуара диаметром  $D = 1,8$  м, находящегося под действием внутреннего давления  $p = 15$  бар.

Допускаемое напряжение  $[\sigma_p] = 100$  н/мм<sup>2</sup>.

**Решение.** Применяя гипотезу наибольших касательных напряжений, на основе формулы (11.6) из табл. 11.1 получим следующее условие прочности:

$$\sigma_{\text{эIII}} = \frac{pD}{2\delta} \leq [\sigma_p],$$

откуда требуемая толщина стенки

$$\delta \geq \frac{pD}{2[\sigma_p]} = \frac{15 \cdot 10^{-1} \cdot 1,8 \cdot 10^3}{2 \cdot 100} = 13,5 \text{ мм},$$

где учтено, что 1 бар =  $1 \cdot 10^{-1}$  н/мм<sup>2</sup>.

При расчете по гипотезе удельной потенциальной энергии изменения формы [формула (11.7)] условие прочности

$$\sigma_{\text{эV}} = 0,433 \frac{pD}{\delta} \leq [\sigma_p],$$

откуда

$$\delta \geq \frac{0,433 pD}{[\sigma_p]} = \frac{0,433 \cdot 15 \cdot 10^{-1} \cdot 1,8 \cdot 10^3}{100} = 11,7 \text{ мм}.$$

Обычно полученную по расчету толщину стенки увеличивают на 1—2 мм с учетом ее возможного ослабления в результате коррозии. В данном примере с учетом прибавки на коррозию следует принять:

при расчете по гипотезе наибольших касательных напряжений  $\delta = 15$  мм и при расчете по гипотезе удельной потенциальной энергии изменения формы<sup>1</sup>  $\delta = 13$  мм.

**Пример 11.2.** Для конического резервуара с полусферической крышкой (рис. 11.2) определить допускаемую величину внутреннего газового давления, если для материала резервуара  $[\sigma_p] = 1200$  кг/см<sup>2</sup>. Расчет выполнить по гипотезе удельной потенциальной энергии изменения формы.

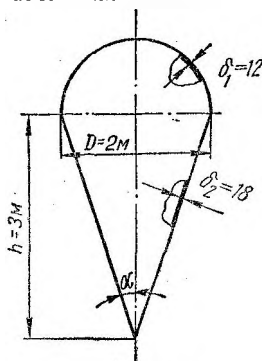


РИС. 11.2

**Решение.** Для сферической части резервуара условие прочности на основе формулы (11.9) запишется в виде

$$\sigma_{\Delta V} = \frac{pD}{4\delta_1} \leq [\sigma_p],$$

откуда допускаемое давление

$$[p]_{\text{сф}} = \frac{[\sigma_p] 4\delta_1}{D} = \frac{1200 \cdot 4 \cdot 1,2}{200} = 28,8 \text{ кг/см}^2.$$

Аналогично для конической части резервуара формула (11.15)

$$\sigma_{\Delta V} = 0,433 \frac{pD}{\delta_2 \cos \alpha} \leq [\sigma_p],$$

откуда допускаемое давление

$$[p]_{\text{кон}} = \frac{[\sigma_p] \delta_2 \cos \alpha}{0,433D} = \frac{1200 \cdot 1,8 \cdot 0,948}{0,433 \cdot 200} = 23,6 \text{ кг/см}^2,$$

где  $\cos \alpha = 0,948$  ( $\operatorname{tg} \alpha = \frac{D}{2h} = \frac{1}{3}$  — см. рис. 11.2).

Окончательно должно быть принято  $[p] = [p]_{\text{кон}} = 23,6$  кг/см<sup>2</sup>. Конструкцию следует признать нерациональной — прочность сферической части резервуара существенно выше, чем конической.

**Пример 11.3.** Исследовать изменение окружных и меридиональных напряжений по высоте резервуара (рис. 11.3, а), в котором находится жидкость с удельным весом  $\gamma = 12,5$  кн/м<sup>3</sup>. Определить требуемую толщину  $\delta$  стенок резервуара, если  $[\sigma] = 70$  н/мм<sup>2</sup>.

**Решение.** Для определения напряжений  $\sigma_t$  и  $\sigma_m$  надо рассмотреть отдельно каждую из трех частей сосуда, отмеченных на рис. 11.3, а.

**Часть I** (цилиндрическая часть резервуара выше уровня свободной поверхности жидкости). Величину окружных напряжений  $\sigma_{tI}$

<sup>1</sup> Нормы расчета котельных агрегатов и трубопроводов основаны на применении гипотезы удельной потенциальной энергии изменения формы.

определяем из уравнения Лапласа, полагая в нем  $p_{mI} = \infty$ ,  $p_{tI} = \frac{D}{2}$  и  $p = 0$ :

$$\frac{\sigma_{tI}}{D/2} = 0 \quad \text{или} \quad \sigma_{tI} = 0.$$

Рассекая резервуар произвольной плоскостью, перпендикулярной к его оси симметрии, и рассматривая условие равновесия нижней

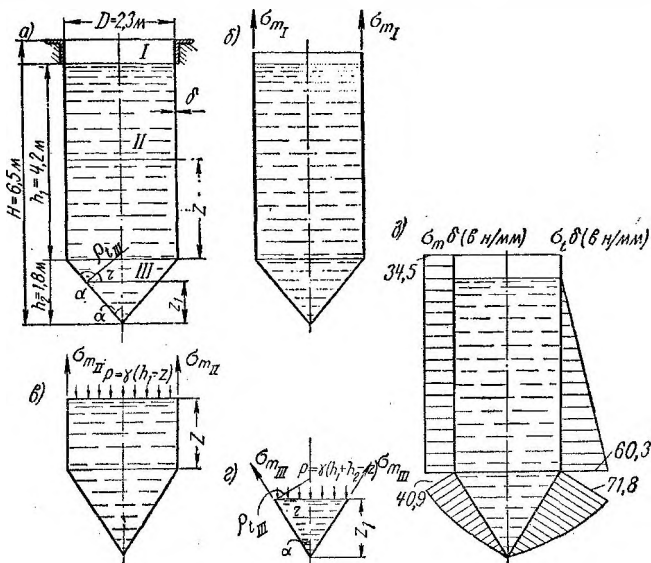


РИС. 11.3

части (рис. 11.3, б), получаем (собственный вес резервуара не учитываем)

$$\sigma_{mI} \pi D \delta = \gamma V_K + \gamma V_{\text{ц}}$$

где  $V_K$  и  $V_{\text{ц}}$  — объемы жидкости соответственно в конической и цилиндрической частях резервуара.

Таким образом,

$$\sigma_{mI} \pi D \delta = \gamma \left( \frac{1}{3} \pi \frac{D^2}{4} h_2 + \frac{\pi D^2}{4} h_1 \right),$$

откуда

$$\sigma_{mI} = \frac{\gamma D}{4 \delta} \left( \frac{h_2}{3} + h_1 \right) =$$

$$= \frac{12,5 \cdot 10^{-6} \cdot 2,3 \cdot 10^3}{4\delta} \left( \frac{1,8 \cdot 10^3}{3} + 4,2 \cdot 10^3 \right) = \frac{34,5}{\delta},$$

где  $\delta$  — в мм и  $\sigma_{mI}$  — в н/мм<sup>2</sup>.

Часть II (цилиндрическая часть резервуара ниже уровня свободной поверхности жидкости). Из уравнения Лапласа при  $\rho_{mII} = \rho_{mI} = \infty$ ,  $\rho_{tII} = \rho_{tI} = \frac{D}{2}$  и давлении на уровне проведенного сечения  $p = \gamma(h_1 - z)$  имеем

$$\frac{2\sigma_{tII}}{D} = \frac{\gamma(h_1 - z)}{\delta},$$

откуда

$$\sigma_{tII} = \frac{\gamma D (h_1 - z)}{2\delta}.$$

Итак, по высоте II части резервуара окружные напряжения изменяются по линейному закону:

при  $z = 0$

$$\max \sigma_{tII} = \frac{\gamma D h_1}{2\delta} = \frac{12,5 \cdot 10^{-6} \cdot 2,3 \cdot 10^3 \cdot 4,2 \cdot 10^3}{2\delta} = \frac{60,3}{\delta};$$

при  $z = h_1$

$$\min \sigma_{tII} = 0.$$

Меридиональные напряжения определяются из условия равновесия отсеченной части сосуда, изображенной на рис. 11.3, а. Действие отброшенной верхней части жидкости заменено давлением на уровне проведенного сечения  $p = \gamma(h_1 - z)$ :

$$\sigma_{mII} \pi D \delta = \gamma \frac{1}{3} \cdot \frac{\pi D^3}{4} h_2 + \gamma \frac{\pi D^2}{4} z + \gamma (h_1 - z) \frac{\pi D^2}{4},$$

откуда

$$\sigma_{mII} = \gamma \frac{D}{4\delta} \left( \frac{h_2}{3} + z + h_1 - z \right) = \frac{\gamma D \left( \frac{h_2}{3} + h_1 \right)}{4\delta},$$

т. е.

$$\sigma_{mII} = \sigma_{mI} = \frac{34,5}{\delta}.$$

Часть III (коническая часть резервуара). В этой части меридианы также прямолинейны, т. е.  $\rho_{mIII} = \infty$ . Второй главный радиус кривизны  $\rho_{tIII}$  показан на рис. 11.3, а. Из чертежа

$$\rho_{tIII} = \frac{r}{\cos \alpha},$$

где  $r = z_1 \operatorname{tg} \alpha$  и  $\rho_{tIII} = \frac{z_1 \operatorname{tg} \alpha}{\cos \alpha}$ .

Давление на уровне  $z_1$

$$p = \gamma (h_1 + h_2 - z_1).$$

Из уравнения Лапласа получаем

$$\frac{\sigma_{tIII}}{z_1 \operatorname{tg} \alpha} = \frac{\gamma (h_1 + h_2 - z_1)}{\delta \cos \alpha},$$

откуда

$$\sigma_{tIII} = \frac{\gamma (h_1 + h_2 - z_1) z_1 \operatorname{tg} \alpha}{\delta \cos \alpha}.$$

Эта функция в пределах  $0 \leq z_1 \leq h_2$  не имеет экстремума. Ограничимся определением двух частных значений  $\sigma_{tIII}$ :

при  $z_1 = 0$

$$\min \sigma_{tIII} = 0;$$

при  $z_1 = h_2$

$$\max \sigma_{tIII} = \frac{\gamma h_1 h_2 \operatorname{tg} \alpha}{\delta \cos \alpha}.$$

Учтя, что

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{D}{2h_2} = \frac{2,3}{2 \cdot 1,8} = 0,640, \quad \alpha = 32^\circ 35', \quad \cos \alpha = \cos 32^\circ 35' = 0,841,$$

и подставив числовые данные, получим

$$\max \sigma_{tIII} = \frac{12,5 \cdot 10^{-8} \cdot 4,2 \cdot 10^3 \cdot 1,8 \cdot 10^3 \cdot 0,640}{0,841 \delta} = \frac{71,8}{\delta}.$$

Для определения меридионального напряжения  $\sigma_{mIII}$  проводим коническое сечение (перпендикулярное к меридиану) на уровне  $z_1$  (рис. 11.3, з) и из условия равновесия нижней отсеченной части получаем

$$\sigma_{mIII} 2\pi r \delta \cos \alpha = p \pi r^2 + \frac{1}{3} \gamma \pi r^2 z_1$$

или

$$\begin{aligned} \sigma_{mIII} &= \frac{\gamma (h_1 + h_2 - z_1) r + \frac{1}{3} \gamma z_1 r}{2\delta \cos \alpha} = \\ &= \frac{\gamma (h_1 + h_2 - z_1) z_1 \operatorname{tg} \alpha + \frac{1}{3} \gamma z_1^2 \operatorname{tg} \alpha}{2\delta \cos \alpha}. \end{aligned}$$

В пределах  $0 \leq z_1 \leq h_2$  функция не имеет экстремума. Находим два частных значения  $\sigma_{mIII}$ :



при  $z_1 = 0$

$$\min \sigma_{mIII} = 0;$$

при  $z_1 = h_2$

$$\max \sigma_{mIII} = \frac{\gamma \left( h_1 h_2 + \frac{1}{3} h_2^2 \right) \operatorname{tg} \alpha}{2\delta \cos \alpha} =$$

$$= \frac{12,5 \cdot 10^{-6} \left( 4,2 \cdot 1,8 + \frac{1}{3} \cdot 1,8^2 \right) 10^6 \cdot 0,640}{2\delta \cdot 0,841} = \frac{40,9}{\delta}.$$

На рис. 11.3, д показаны эпюры  $\sigma_m$  и  $\sigma_t$ .

Расчет на прочность выполняем по гипотезе наибольших касательных напряжений. При двухосном растяжении ( $\sigma_3 = 0$ ) опасными будут точки, в которых  $\sigma_1$  максимально, т. е. в нашем случае точки верхней кромки конической части сосуда. Условие прочности

$$\sigma_{эIII} = \sigma_1 = \max \sigma_{tIII} = \frac{71,8}{\delta} \ll [\sigma],$$

откуда

$$\delta \geq \frac{71,8}{[\sigma]} = \frac{71,8}{70} = 1,26 \text{ мм.}$$

С учетом добавки на коррозию стенок следует принять  $\delta = 3,5$  мм.

В месте перехода от цилиндрической части сосуда к конической во избежание местного изгиба стенок устанавливают кольцо.

## § 11.2. РАСЧЕТ ТОЛСТОСТЕННЫХ ЦИЛИНДРОВ, НАХОДЯЩИХСЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВНУТРЕННЕГО И НАРУЖНОГО ДАВЛЕНИЯ

Под действием равномерно распределенного внутреннего давления находятся, в частности, цилиндры машин и аппаратов химических и пищевых производств, гидравлических прессов и другого оборудования. Равномерно распределенное наружное давление испытывают, например, охватываемые детали в соединениях с гарантированным натягом. В качестве примера цилиндра, находящегося одновременно под действием внутреннего и наружного давления, можно указать промежуточный цилиндр трехслойного цилиндра, собранного с натягом.

В отличие от рассмотренных в предыдущем параграфе тонкостенных цилиндров для толстостенных нельзя принимать распределение окружных напряжений равномерным по толщине стенки, кроме того, здесь радиальные напряжения соизмеримы с окружными, и их необходимо учитывать. Для закрытого цилиндра (цилиндра или трубы с днищами), находящегося под действием внутреннего и наружного давления (рис. 11.4), напряженное состояние для произвольной точки — трехосное, главными являются окружное  $\sigma_t$ , радиальное  $\sigma_r$  и осевое  $\sigma_z$  (меридиональное) напряжения. Напряжения  $\sigma_t$  и  $\sigma_r$  из-

меняются по толщине стенки цилиндра по гиперболическому закону, осевые напряжения  $\sigma_z$  распределены по поперечному сечению цилиндра

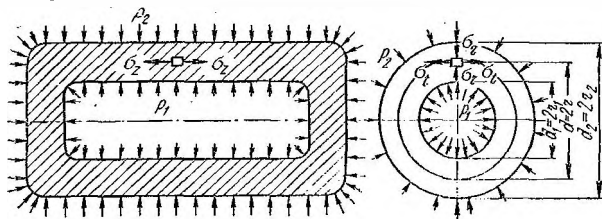


РИС. 11.4

дра равномерно. Величины указанных напряжений определяют по формулам, называемым формулами Ляме:

$$\sigma_t = \frac{p_1 r_1^2 - p_2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} + \frac{(p_1 - p_2) r_1^2 r_2^2}{(r_2^2 - r_1^2) r^2}; \quad (11.39)$$

$$\sigma_r = \frac{p_1 r_1^2 - p_2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} - \frac{(p_1 - p_2) r_1^2 r_2^2}{(r_2^2 - r_1^2) r^2}; \quad (11.40)$$

$$\sigma_z = \frac{p_1 r_1^2 - p_2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}. \quad (11.41)$$

В этих формулах  $r$  — расстояние от рассматриваемой точки до оси цилиндра; остальные обозначения ясны из рисунка.

Характер эпюр напряжений  $\sigma_t$ ,  $\sigma_r$ ,  $\sigma_z$  показан на рис. 11.5 (эпюры построены при  $r_2 = 2r_1$ ,  $p_1 = 2p_2$ ).

Радиальное перемещение  $u$  произвольной точки стенки определяют по формуле

$$u = \frac{1 - 2\mu}{E} \cdot \frac{p_1 r_1^2 - p_2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} r + \frac{1 + \mu}{E} \times \frac{(p_1 - p_2) r_1^2 r_2^2}{(r_2^2 - r_1^2) r}. \quad (14.42)$$

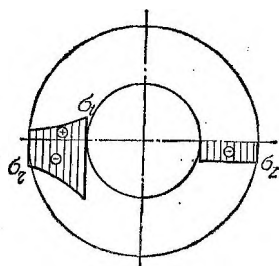


РИС. 11.5

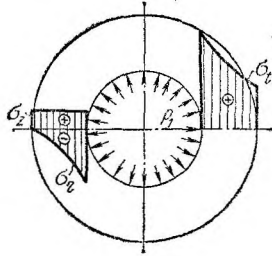
Для открытого цилиндра (без дна) формулы для окружных и меридиональных напряжений остаются в силе; осевое напряжение  $\sigma_z = 0$ . Таким образом, напряженное состояние в точках стенки двухосное. Формула для определения радиального перемещения имеет вид

$$u = \frac{1 - 2\mu}{E} \cdot \frac{p_1 r_1^2 - p_2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} r + \frac{1 + \mu}{E} \cdot \frac{(p_1 - p_2) r_1^2 r_2^2}{(r_2^2 - r_1^2) r}. \quad (11.43)$$

Расчетные формулы для толстостенных цилиндров, находящихся под действием внутреннего  $p_1$  или внешнего  $p_2$  давления

Тип цилиндра, характер нагружения и вид эпюр главных напряжений	Главные напряжения для произвольной точки стенки	Радиальное перемещение произвольной точки стенки	Главные напряжения для опасной точки	Эквивалентные напряжения для опасной точки
---	--	--	--------------------------------------	--

Закрытый под действием внутреннего давления



$$\sigma_t = \frac{p_1 r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \left( 1 + \frac{r_2^2}{r^2} \right); \quad (11.44)$$

$$\sigma_r = \frac{p_1 r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \left( 1 - \frac{r_2^2}{r^2} \right); \quad (11.45)$$

$$\sigma_z = \frac{p_1 r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \quad (11.46)$$

$$u = \frac{p_1 r_1^2}{E(r_2^2 - r_1^2)} [(1-2\nu)r + \sigma_1]; \quad (11.47)$$

$$r = r_1;$$

$$\sigma_{\text{III}} = p_1 \left( \frac{r_2^2 + r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} + 1 \right); \quad (11.51)$$

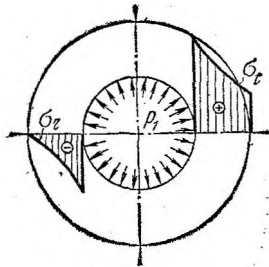
$$\sigma_{\text{IV}} = p_1 \left( \frac{r_2^2 + r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} + \nu \right); \quad (11.52)$$

$$\sigma_2 = \frac{p_1 r_1^2}{r_2^2 - r_1^2}; \quad (11.49)$$

$$\sigma_3 = -p_1 \quad (11.50)$$

$\sigma_{\text{V}}$  — см. формулу (10.8)

Открытый под действием внутреннего давления



$$\sigma_t \text{ — по формуле (11.44)} \quad u = \frac{p_1 r_1^2}{E(r_2^2 - r_1^2)} [(1-\nu)r + \sigma_1]; \quad (11.53)$$

$$\sigma_r \text{ — по формуле (11.45)}$$

$$\sigma_z = 0$$

$$\sigma_1 \text{ — по формуле (11.48)}$$

$$\sigma_2 = 0;$$

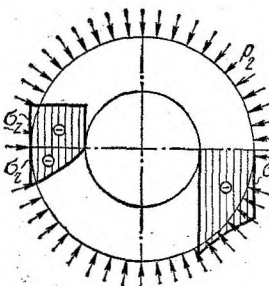
$$\sigma_3 \text{ — по формуле (11.50)}$$

$$\sigma_{\text{III}} \text{ — по формуле (11.51);}$$

$$\sigma_{\text{IV}} \text{ — по формуле (11.52);}$$

$$\sigma_{\text{V}} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_3} \quad (11.54)$$

Закрытый под действием внешнего давления



$$\sigma_t = -\frac{p_2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \left( 1 + \frac{r_2^2}{r^2} \right); \quad (11.55)$$

$$\sigma_r = -\frac{p_2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \left( 1 - \frac{r_2^2}{r^2} \right); \quad (11.56)$$

$$\sigma_z = -\frac{p_2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \quad (11.57)$$

$$u = -\frac{p_2 r_2^2}{E(r_2^2 - r_1^2)} \times [(1-2\nu)r + \frac{(1+\nu)r_1^2}{r}]; \quad (11.58)$$

$$r = r_1;$$

$$\sigma_1 = 0;$$

$$\sigma_2 = -\frac{p_2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}; \quad (11.60)$$

$$\sigma_3 = -\frac{2p_2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \quad (11.61)$$

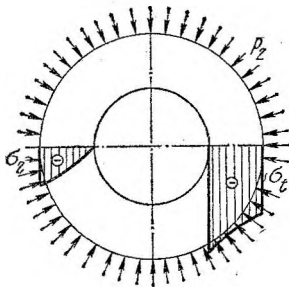
$$\sigma_{\text{III}} = \frac{2p_2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}; \quad (11.62)$$

$$\sigma_{\text{IV}} = \frac{2\nu p_2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}; \quad (11.63)$$

$$\sigma_{\text{V}} = \sqrt{\sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_2 \sigma_3} \quad (11.64)$$

Тип цилиндра, характер нагружения и вид эпюр Главных напряжений	Главные напряжения для произвольной точки стенки	Радиальное перемещение произвольной точки стенки	Главные напряжения для опасной точки	Эквивалентные напряжения для опасной точки
---	--	--	--------------------------------------	--

Открытый под действием наружного давления



$\sigma_t$ —по формуле (11.55);

$\sigma_r$ —по формуле (11.56);

$\sigma_z = 0$

$$u = -\frac{p_2 r_2^2}{E(r_2^2 - r_1^2)} \times$$

$$\times \left[ \frac{(1+\mu)r_1^2}{r} \right] \quad (11.65)$$

$r = r_1;$

$\sigma_1 = \sigma_3 = 0;$  (11.66)

$\sigma_2$ —по формуле (11.61)

$\sigma_{\text{эIII}}$ —по формуле (11.62);

$\sigma_{\text{эIV}}$ —по формуле (11.63)

$\sigma_{\text{эV}} = \sigma_{\text{эIII}}$

Для расчета цилиндра на прочность по эпюрам главных напряжений устанавливают, какая точка (точки) стенки опасна, и по выбранной гипотезе прочности составляют условие прочности.

В табл. 11.2 приведены расчетные формулы для толстостенных цилиндров, находящихся под действием только внутреннего или только наружного давления.

Из формул, приведенных в последнем столбце табл. 11.2, приравнявая эквивалентное напряжение допускаемому, можно получить формулы для определения требуемой величины наружного радиуса цилиндра (трубы) при заданных давлении, внутреннем радиусе и материале (допускаемом напряжении). Так, в частности, выполняя расчет по гипотезе наибольших касательных напряжений для цилиндра, находящегося под действием внутреннего давления [см. формулу (11.51)], получаем

$$r_2 \geq r_1 \sqrt{\frac{[\sigma]}{[\sigma] - 2p}}. \quad (11.67)$$

Для того же случая при расчете по гипотезе Мора [см. формулу (11.52)] получим

$$r_2 \geq r_1 \sqrt{\frac{p(1-\nu) + [\sigma_p]}{[\sigma_p] - p(1+\nu)}}. \quad (11.68)$$

(где  $\nu = \frac{[\sigma_p]}{[\sigma]}$ ) и по гипотезе энергии формоизменения [см. формулы (11.54), (11.48), (11.50)]:

$$r_2 \geq r_1 \sqrt{\frac{[\sigma]^2 + p \sqrt{4[\sigma]^2 - 3p^2}}{[\sigma]^2 - 3p^2}}. \quad (11.69)$$

Из последних формул следует, что при некоторой величине внутреннего давления, независимо от величины  $r_2$  (толщины стенки цилиндра), обеспечить соблюдение условия прочности невозможно. Так, например, если вести расчет по гипотезе наибольших касательных напряжений, удовлетворить условию прочности нельзя при  $p \geq 0,5[\sigma]$ . Аналогично по гипотезе Мора условие прочности пере-

стает выполняться при  $p = \frac{[\sigma_p][\sigma_c]}{[\sigma_p] + [\sigma_c]}$  и по гипотезе энергии формо-

изменения при  $p = \frac{[\sigma]}{\sqrt{3}}$ .

Увеличение давления возможно при применении составных цилиндров (труб), собираемых с натягом. Для двухслойного цилиндра от натяга во внутреннем цилиндре возникают сжимающие окружные напряжения, алгебраически суммирующиеся с растягивающими окружными напряжениями от внутреннего (опасного) давления. Таким образом, напряжения во внутренних (опасных) точках уменьшаются.

Связь между натягом  $\Delta$  (разность до сборки между наружным диаметром внутреннего цилиндра и внутренним диаметром внешнего

цилиндра) и давлением, возникающим на поверхности контакта цилиндров (контактным давлением), выражается формулой

$$\rho_K = \frac{\Delta}{d \left( \frac{c_1}{E_1} + \frac{c_2}{E_2} \right)}, \quad (11.70)$$

где

$$\left. \begin{aligned} c_1 &= \frac{d^2 + d_1^2}{d^2 - d_1^2} - \mu_1; \\ c_2 &= \frac{d_2^2 + d^2}{d_2^2 - d^2} + \mu_2. \end{aligned} \right\} \quad (11.71)$$

Здесь  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $\mu_1$  и  $\mu_2$  — модули продольной упругости и коэффициенты Пуассона соответственно материалов внутреннего и наружного цилиндров.

Обозначения диаметров даны на рис. 11.6, там же показан характер эпюра напряжений, обусловленных действием контактного давления.

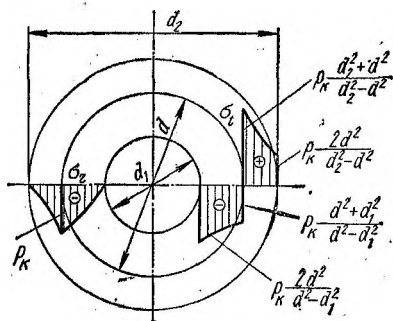


РИС. 11.6

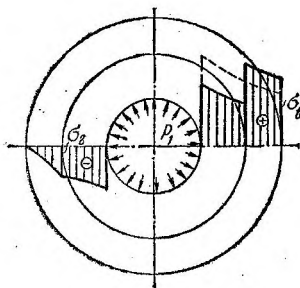


РИС. 11.7

У внешнего цилиндра окружные напряжения в точках поверхности контакта возрастают по сравнению с теми, которые были бы при сборке без натяга, следовательно, помимо проверки прочности внутреннего цилиндра, необходима проверка прочности и внешнего цилиндра. Характер эпюра напряжений, обусловленных совместным действием внутреннего (рабочего) давления  $p_1$  и контактного давления  $\rho_K$ , показан на рис. 11.7. Штриховой линией показана эпюра окружных напряжений для составного цилиндра, собранного без натяга.

Целесообразно так выбрать величину контактного давления (а следовательно, и натяга), чтобы внутренний и внешний цилиндры были равнопрочны. При расчете по гипотезе наибольших касательных на-

пряжений равнопрочность будет обеспечена при величине натяга, определяемой формулой Гадолина ( $r_K = 0,5 d$ ):

$$\Delta = \frac{4p_1}{E} \cdot \frac{r_K r_2^2 (r_K^2 - r_1^2)}{r_2^2 (r_K^2 - r_1^2) + r_K^2 (r_2^2 - r_1^2)}. \quad (11.72)$$

При этом эквивалентное напряжение определяется по формуле

$$\sigma_{\text{эIII}} = p_1 \frac{2r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \left( 1 - \frac{1}{\frac{r_2^2}{r_2^2 - r_K^2} + \frac{r_K^2}{r_K^2 - r_1^2}} \right). \quad (11.73)$$

Эта величина имеет минимум при

$$r_K = \sqrt{r_1 r_2}.$$

При таком выборе диаметра контактной поверхности эквивалентное напряжение определяется по формуле

$$\min \sigma_{\text{эIII}} = p_1 \frac{r_2}{r_2 - r_1}. \quad (11.74)$$

В случаях посадок с гарантированным натягом требуемая величина контактного давления определяется в зависимости от величины вращающего момента или осевого усилия, которое должно передать соединение за счет сил трения, возникающих на поверхности контакта. Данные по расчету посадок с гарантированным натягом см., например, в работах [12, 32, 56].

**Пример 11.4.** Определить допускаемую величину внутреннего давления для закрытой и открытой толстостенных труб при  $r_2 : r_1 = 2$ . Принять  $[\sigma] = 160$  н/мм<sup>2</sup>.

**Решение.** Для закрытой трубы при расчете по гипотезе наибольших касательных напряжений условие прочности на основе формулы (11.51)

$$\sigma_{\text{эIII}} = p_1 \left( \frac{r_2^2 + r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} + 1 \right) \leq [\sigma],$$

откуда, подставив  $r_2 = 2r_1$ , получим

$$\sigma_{\text{эIII}} = p_1 \left( \frac{4r_1^2 + r_1^2}{4r_1^2 - r_1^2} + 1 \right) = \frac{8}{3} p_1 \leq [\sigma].$$

Отсюда допускаемое давление

$$[p_1] = \frac{3}{8} [\sigma] = \frac{3}{8} 160 = 60 \text{ н/мм}^2 = 600 \text{ бар}.$$

Для той же трубы условие прочности по гипотезе энергии формоизменения

$$\sigma_{3V} = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} \leq [\sigma],$$

где на основе формул (11.48), (11.49), (11.50) главные напряжения для опасной точки

$$\sigma_1 = \frac{\rho_1(r_2^2 + r_1^2)}{r_2^2 - r_1^2} = \frac{\rho_1(4r_1^2 + r_1^2)}{4r_1^2 - r_1^2} = \frac{5}{3} \rho_1$$

$$\sigma_2 = \frac{\rho_1 r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} = \frac{\rho_1 r_1^2}{4r_1^2 - r_1^2} = \frac{1}{3} \rho_1$$

$$\sigma_3 = -\rho_1.$$

После подстановки получаем окончательно условие прочности в виде

$$\begin{aligned} \sigma_{3V} &= \sqrt{\frac{1}{2} \left[ \left( \frac{5}{3} \rho_1 - \frac{1}{3} \rho_1 \right)^2 + \left( \frac{1}{3} \rho_1 + \rho_1 \right)^2 + \left( -\rho_1 - \frac{5}{3} \rho_1 \right)^2 \right]} = \\ &= \rho_1 \sqrt{\frac{1}{2} \left[ \frac{16}{9} + \frac{16}{9} + \frac{64}{9} \right]} = \frac{\sqrt{48}}{3} \rho_1 \leq [\sigma], \end{aligned}$$

откуда

$$[\rho_1] = \frac{3[\sigma]}{\sqrt{48}} = \frac{3 \cdot 160}{\sqrt{48}} = 69,2 \text{ н/мм}^2 = 692 \text{ бар.}$$

Для открытой трубы при расчете по гипотезе наибольших касательных напряжений получаем тот же результат:  $[\rho_1] = 600 \text{ бар}$ . Это объясняется тем, что в условие прочности промежуточное главное напряжение, т. е. в данном случае осевое напряжение  $\sigma_2$ , не входит.

При расчете по гипотезе энергии формоизменения на основе формулы (11.54) и указанных выше значений главных напряжений имеем (учитывая, что  $\sigma_2 = 0$ )

$$\sigma_{3V} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1 \sigma_3} = \sqrt{\left( \frac{5}{3} \rho_1 \right)^2 + \rho_1^2 + \frac{5}{3} \rho_1 \cdot \rho_1} = \frac{7}{3} \rho_1 \leq [\sigma],$$

откуда

$$[\rho_1] = \frac{3[\sigma]}{7} = \frac{3 \cdot 160}{7} = 68,7 \text{ н/мм}^2 = 687 \text{ бар.}$$



## УСТОЙЧИВОСТЬ СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ

## § 12.1. РАСЧЕТ СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ НА УСТОЙЧИВОСТЬ ПО ФОРМУЛЕ ЭЙЛЕРА И ПО ЭМПИРИЧЕСКИМ ФОРМУЛАМ

Понятие о продольном изгибе.

Условие устойчивости

При центральном сжатии прямого стержня прямолинейная форма его равновесия устойчива до достижения сжимающей силой так называемого *критического* значения. При превышении сжимающей силой критического значения стержень изгибается (выпучивается) и приобретает новую устойчивую форму равновесия — криволинейную. При этом стержень испытывает совместное действие изгиба и сжатия. Изгиб (выпучивание) стержня, происходящий при действии на него силы, большей критической, называют *продольным изгибом*. Даже незначительное превышение сжимающей силой критического значения связано с появлением весьма значительных прогибов стержня, а следовательно, с возникновением больших изгибающих моментов и напряжений. Практически потеря устойчивости прямолинейной формы равновесия стержня (для краткости принято говорить просто о потере стержнем устойчивости) равносильна выходу конструкции из строя, даже если это явление и не сопровождается разрушением (изломом) стержня.

Расчет, выполняемый для обеспечения таких соотношений между величиной сжимающей нагрузки, размерами стержня и характеристиками его материала, при которых исключена опасность продольного изгиба, называется *расчетом сжатого стержня на устойчивость* или *расчетом на продольный изгиб*.

Проверку сжатого стержня на устойчивость выполняют по формуле

$$n_y = \frac{P_{кр}}{P} \geq [n_y], \quad (12.1)$$

где  $n_y$  — коэффициент запаса устойчивости;

$P_{кр}$  — критическая сила;

$P$  — сила, сжимающая стержень;

$[n_y]$  — требуемый (заданный, допускаемый) коэффициент запаса устойчивости.

Величина  $[n_y]$  зависит от материала и назначения стержня, а для элементов строительных конструкций также и от его гибкости (см. § 12.2). В некоторых случаях (например, для элементов строительных конструкций и в мостостроении) значения  $[n_y]$  определены соответствующими правилами и нормами (даже если величина  $[n_y]$  в явной форме и не фигурирует в расчете, — см. § 12.2); в других — расчетчик выбирает величину  $[n_y]$ , ориентируясь на опыт про-

ектирования и эксплуатации конструкций, подобных рассчитываемой. Обычно принимают следующие значения  $[n_y]$ : для стальных конструкций типа кронштейнов, ферм и т. п. —  $1,8 \div 3,0$ ; для ходовых и грузовых винтов —  $3,5 \div 5,0$ ; для конструкций из чугуна —  $5,0 \div 6,5$ ; для конструкций из алюминиевых сплавов —  $2,5 \div 3,5$ ; для деревянных стоек —  $3,0 \div 5,0$ .

Бóльшие из указанных значений  $[n_y]$  следует принимать при невысокой точности определения действующих нагрузок, а также в случае повышенной ответственности конструкции.

#### Формула Эйлера. Коэффициенты приведения длины

При потере устойчивости с упругой стадии работы стержня критическая сила ( $P_{кр}$ ) определяется по формуле Эйлера:

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 E J_{\min}}{(\mu l)^2}, \quad (12.2)$$

где  $E$  — модуль продольной упругости материала стержня (в среднем принимают: для стали  $E = 2,1 \cdot 10^6$  кг/см<sup>2</sup>; для чугуна —  $1,2 \cdot 10^6$  кг/см<sup>2</sup>; для алюминиевых сплавов —  $0,72 \cdot 10^6$  кг/см<sup>2</sup>; для сосны и ели —  $0,15 \cdot 10^6$  кг/см<sup>2</sup>);

$J_{\min}$  — минимальный главный центральный момент инерции поперечного сечения стойки;

$l$  — длина стойки;

$\mu$  — коэффициент приведения длины, величина которого для стержня постоянного поперечного сечения зависит от типа и расположения опор, а также от характера нагрузки (сосредоточенная сила, приложенная в торцовом или в промежуточном сечении, несколько сосредоточенных сил, распределенная нагрузка). Для некоторых случаев значения  $\mu$  приведены в табл. 12.1,<sup>1</sup> 12.2, а для однопролетной шарнирно закрепленной стойки, находящейся под действием двух сосредоточенных сил, — на рис. 12.1. Более полные данные о значениях  $\mu$ , в частности для стоек с промежуточными опорами и для стоек, нагруженных одновременно сосредоточенными и распределенными силами, приведены в справочниках [56, 59].

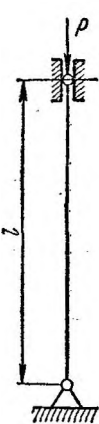
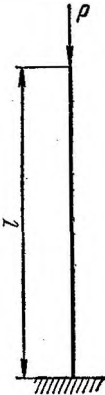
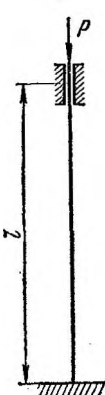
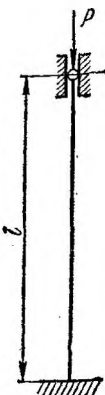
Нормальное напряжение, возникающее в поперечном сечении стержня при критическом значении сжимающей силы, также называется *критическим*:

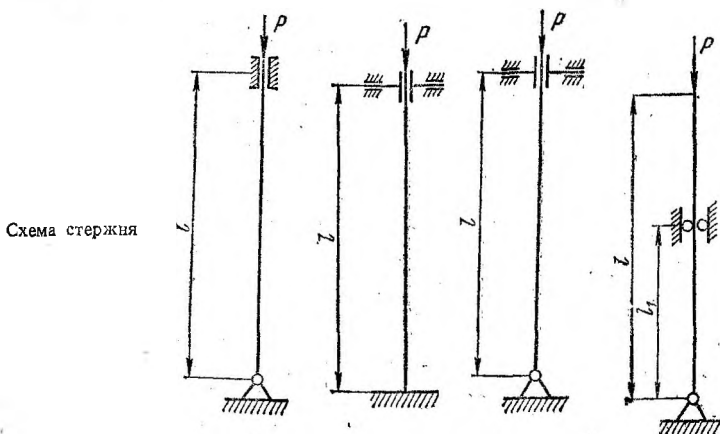
$$\sigma_{кр} = \frac{P_{кр}}{F}. \quad (12.3)$$

<sup>1</sup> Изображения опорных закреплений, примененные в табл. 12.1, 12.2 и далее, условны. Во всех случаях подразумевается, что в плоскости, перпендикулярной к плоскости чертежа, характер закрепления такой же, как и в плоскости изображения. В частности, имеется в виду, что «плавающая» заделка не дает возможности поворота закрепленного сечения ни в одной плоскости.

Таблица 12.1

Значения коэффициента приведения длины  $\mu$  для однопролетных стержней постоянного поперечного сечения [57,59]

Схема стержня				
Характеристика опорных закреплений	Оба конца стержня закреплены шарнирно	Один конец стержня жестко защемлен, другой свободен	Оба конца стержня жестко защемлены (могут сближаться)	Нижний конец стержня жестко защемлен, верхний закреплен шарнирно
$\mu$	1,0	2,0	0,5	~0,7



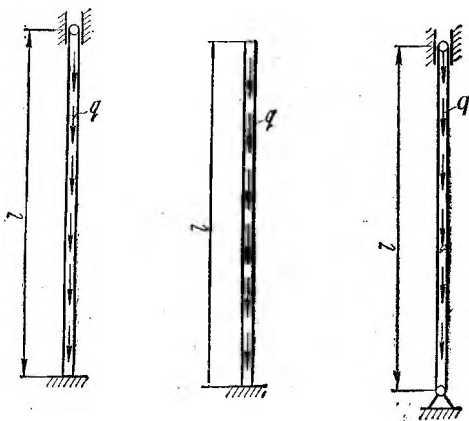
Продолжение табл. 12.1

Характеристика опорных креплений	Нижний конец стержня закреплен шарнирно, верхний жестко зашце-млен	Нижний ко-нец стержня жестко заще-млен, верхний не может по-ворачиваться («плавающая» заделка)	Нижний ко-нец стержня закреплен шарнирно, верхний не может пово-рачиваться («плавающая» заделка)	Шарнирно закрепленный стержень с консолью
$\mu$	$\sim 0,7$	1,0	2,0	1,35( $l_1=0,5l$ ); 1,13( $l_1=0,7l$ )

Таблица 12.2

Значения коэффициента приведения длины  $\mu$  для стержней постоянного поперечного сечения при действии равномерно распределенной сжимающей нагрузки  $P_{кр} = (ql)_{кр}$  [57, 59]

Схема стержня



Характеристика опорных креплений

Оба конца стержня закреплены шарнирно

Один конец стержня жестко зашце-млен, другой свободен

Оба конца стержня жестко зашце-млены (могут сближаться)

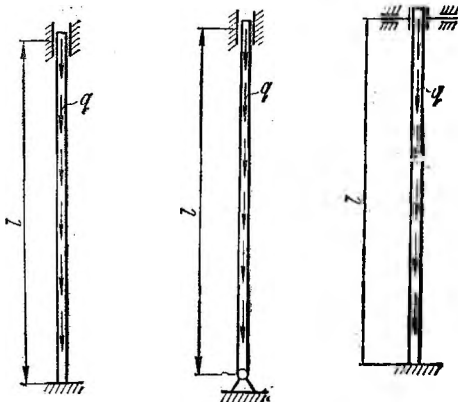
 $\mu$ 

0,730

1,12

0,365

Схема стержня



Характеристика опорных закреплений

Нижний конец стержня жестко зашпелен, верхний закреплен шарнирно

Нижний конец стержня закреплен шарнирно, верхний зашпелен жестко, но имеет свободу продольного перемещения

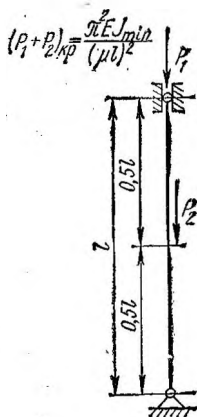
Нижний конец стержня жестко зашпелен, верхний не может поворачиваться («плавающая» заделка)

$\mu$

0,433

0,577

0,723



$$k = \frac{P_1 + P_2}{P_1}$$

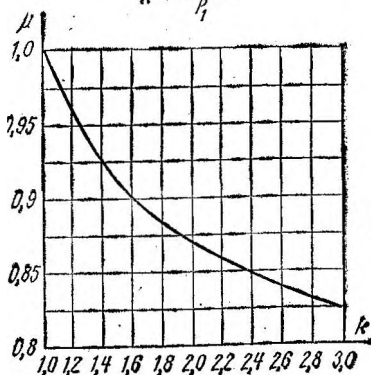


РИС. 12.1

Если  $P_{кр}$  определяется по формуле Эйлера, то формула для критического напряжения имеет вид

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \quad (12.4)$$

Здесь  $\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}}$  — гибкость стойки ( $i_{\min} = \sqrt{\frac{J_{\min}}{F}}$  — минимальный

главный центральный радиус инерции поперечного сечения стойки).

В некоторых случаях закрепление стержня в плоскостях наибольшей и наименьшей жесткости осуществлено различно. При этом расчет следует вести по наибольшей гибкости, которая может соответствовать как минимальному, так и максимальному моменту инерции поперечного сечения стержня, т. е. в этом случае в формулу (12.2) не обязательно входит  $J_{\min}$  (см. пример 12.4).

#### Пределы применимости формулы Эйлера. Эмпирические формулы

Формула Эйлера применима лишь в пределах справедливости закона Гука, т. е. при условии, что критическое напряжение ( $\sigma_{кр}$ ) не превышает предела пропорциональности ( $\sigma_{пц}$ ) материала стержня:

$$\sigma_{кр} \leq \sigma_{пц} \quad (12.5)$$

Из выражений (12.4) и (12.5) следует, что формула Эйлера применима лишь при условии

$$\lambda \geq \lambda_{\text{пред}} \quad (12.6)$$

где  $\lambda$  — гибкость рассчитываемого стержня, зависящая от его приведенной длины ( $\mu l$ ), размеров и формы поперечного сечения (от главного центрального радиуса инерции  $i$ , обычно минимального —  $i_{\min}$ );

$\lambda_{\text{пред}}$  — предельная (граничная) гибкость для материала стержня, зависящая только от физико-механических свойств материала и определяемая по формуле

$$\lambda_{\text{пред}} = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_{пц}}} \quad (12.7)$$

Использование формулы Эйлера в области ее неприменимости дает *завышенное* значение критической (а следовательно, и допускаемой) нагрузки, что весьма опасно.

Критические напряжения для стальных, дюралюминиевых и деревянных стержней при гибкостях, меньших предельных, могут быть определены по линейной эмпирической зависимости

$$\sigma_{кр} = a - b\lambda, \quad (12.8)$$

которую называют формулой Тетмайера — Ясинского. Коэффициенты  $a$  и  $b$ , имеющие размерность напряжения, определяются экспериментально; для некоторых материалов их значения даны в табл. 12.3. При расчетах в неупругой области коэффициенты приведения длины ( $\mu$ ) можно без большой погрешности принимать такими же, как и при расчетах по формуле Эйлера.

Формула (12.8) применима при гибкости рассчитываемого стержня, лежащей в пределах  $\lambda_0 \leq \lambda < \lambda_{\text{пред}}$ , где  $\lambda_0$  — то значение гибкости, при котором критическое напряжение равно предельному (опасному) напряжению при чистом сжатии (без опасности продольного изгиба). Для стержней из пластичных и хрупко-пластичных материалов указанное предельное напряжение равно пределу текучести, физическому ( $\sigma_T$ ) или условному ( $\sigma_{0,2}$ ); для хрупких материалов предельное напряжение равно пределу прочности при сжатии ( $\sigma_{\text{пч.с}}$ ). Значения  $\lambda_{\text{пред}}$  и  $\lambda_0$  даны в табл. 12.3.

Таблица 12.3

Значения  $\sigma_T$ ,  $\sigma_{\text{пч}}$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $\lambda_{\text{пред}}$  и  $\lambda_0$ 

Материал	$\sigma_T$ ( $\sigma_{0,2}$ )	$\sigma_{\text{пч}}$	$a$	$b$	$\lambda_{\text{пред}}$	$\lambda_0$
	кг/см <sup>2</sup>					
Сталь Ст. 2	2200	1900	2640	7,0	105	62
Сталь Ст. 3	2400	2000	3100	11,4	100	61
Сталь 20, Ст. 4	2600	2200	3280	11,1	96	60
Сталь 25, Ст. 5, 35Л	2800	2400	3500	11,5	92	57
Сталь 35, 45Л	3200	2700	3980	14,3	90	55
Сталь 45	3600	3050	4490	16,7	85	52
Сталь 50, 55Л	3800	3200	4730	18,7	82	50
Сталь 10Г2СД, 14Г2, 15ГС, 14ХГС, 15ХСНД	3500	3000	4290	15,2	83	50
Сталь 30ХМА, 35ХМФА, 30ГСА, 40ХНМА	8500	7000	10000	55,7	55	28
Дюралюминий Д16Т	3200	2550	4060	28,3	53	30
Дюралюминий Д6Т	2800	2200	3000	14,3	57	15
Сосна, ель	—	—	293	1,94	70	—

Таким образом, сжатые стержни по методике их расчета делят на три группы: 1) стержни большой гибкости ( $\lambda \geq \lambda_{\text{пред}}$ ), для которых критическое напряжение определяют по формуле Эйлера; 2) стержни средней гибкости ( $\lambda_0 \leq \lambda < \lambda_{\text{пред}}$ ), для них критическое напряжение определяют по эмпирической формуле; 3) стержни малой гибкости ( $\lambda < \lambda_0$ ), для которых критическое напряжение принимают постоянным (равным  $\sigma_{\text{пред}}$ ), т. е. эти стержни рассчитывают не на устойчивость, а на прочность.

Для сжатых стержней большой гибкости применение стали с высокими механическими характеристиками не оправдано, так как величина модуля продольной упругости ( $E$ ) почти одинакова для стали разных марок и, следовательно, применение стали более высокого качества не приводит к повышению  $\sigma_{\text{кр}}$ . Для стержней средней и малой гибкости с повышением механических характеристик стали возрастает и  $\sigma_{\text{кр}}$ .

Для стержней из чугунного литья (СЧ 12-28, СЧ 15-32 и др.)  $\lambda_{\text{пред}} \approx 80$ ; при меньшей гибкости критическое напряжение определяют по эмпирической формуле

$$\sigma_{\text{кр}} = 7760 - 120\lambda + 0,53\lambda^2 \text{ [кг/см}^2\text{]}. \quad (12.9)$$

Эта формула применима при  $\sigma_{\text{кр}} < \sigma_{\text{пч.с}}$ ; если получится, что  $\sigma_{\text{кр}} \geq \sigma_{\text{пч.с}}$ , стержень следует рассчитывать на прочность, а не на устойчивость. Например, для чугуна СЧ 15-32  $\sigma_{\text{пч.с}} \approx 6500 \text{ кг/см}^2$ , и расчет на прочность следует вести при  $\lambda < \lambda_0 = 10$ .

Для расчетов на устойчивость в случаях неприменимости формулы Эйлера, помимо формул (12.8), (12.9), используются также другие эмпирические зависимости (см. работы [3, 13, 41, 67]).

Возможно обобщение формулы Эйлера на неупругую область работы материала стержня при потере устойчивости путем введения взамен модуля  $E$  так называемого приведенного модуля (модуль Энгессера — Ясинского — Кармана) или касательного модуля (модуль Энгессера — Шенли). Эти два метода освещены в работах [17, 67].

Удобный метод использования данных о механических характеристиках материала для нахождения действительных критических напряжений путем умножения на поправочный коэффициент критических напряжений, вычисленных по формуле Эйлера, дан в работе [65].

#### Дополнительные указания к расчетам на устойчивость

1. Местные ослабления сжатых стержней (например, заклепочными отверстиями), как показывают специальные исследования, практически не влияют на величину критической силы, т. е. во все расчетные зависимости следует вводить геометрические характеристики ( $J$ ,  $i$ ,  $F$ ) неослабленного сечения (брутто-сечения).

2. При расчете тонкостенных трубчатых стержней (трубы с отношением диаметра к толщине стенки  $D : \delta = 10 \div 60$ ) следует учитывать опасность местного выпучивания стенок. Расчет надо вести по пониженной величине критического напряжения, получаемой путем умножения  $\sigma_{\text{кр}}$ , вычисленного, как изложено выше, на коэффициент  $\nu < 1$  (см. табл. 12.4, 12.5).

Таблица 12.4

Коэффициент  $\nu$  снижения критического напряжения для дюралюминиевых труб

$\frac{D}{\delta}$	Гибкость									
	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120
10	0,845	0,845	0,845	0,850	0,862	0,874	0,886	0,898	0,910	0,922
20	0,836	0,840	0,840	0,846	0,858	0,870	0,882	0,894	0,906	0,918
30	0,827	0,832	0,835	0,840	0,855	0,864	0,876	0,885	0,896	0,910
40	0,818	0,820	0,825	0,832	0,838	0,846	0,854	0,861	0,870	0,880
50	0,809	0,812	0,816	0,820	0,824	0,828	0,832	0,834	0,838	0,840
60	0,760	0,760	0,762	0,770	0,776	0,782	0,786	0,790	0,795	0,800

Примечание. При  $\lambda \geq 55$  критическое напряжение следует определять по формуле (12.4); при  $30 < \lambda < 55$  — по формуле  $\sigma_{\text{кр}} = 4060 - 28,3\lambda \text{ (кг/см}^2\text{)}$ .

При  $\lambda < 28$  приближенно можно принимать критическое напряжение постоянным и считать, что  $\nu_{\text{кр}} \approx 0,80, 2$ .



Таблица 12.5  
 Коэффициент  $\gamma$  снижения критического напряжения  
 для хромомолибденовых труб

$\frac{D}{\delta}$	Гибкость										
	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110
10	0,973	0,960	0,914	0,812	0,820	0,853	0,895	0,922	0,942	0,954	0,960
20	0,930	0,915	0,874	0,786	0,815	0,873	0,888	0,915	0,940	0,948	0,960
30	0,878	0,864	0,825	0,736	0,810	0,821	0,880	0,907	0,938	0,947	0,959
40	0,780	0,780	0,749	0,683	0,785	0,805	0,863	0,898	0,936	0,945	0,958
50	0,569	0,635	0,621	0,594	0,765	0,789	0,850	0,890	0,933	0,942	0,957
60	0,533	0,536	0,498	0,510	0,741	0,766	0,840	0,880	0,930	0,940	0,956

Примечание. При  $\lambda > 55$  критическое напряжение следует вычислять по формуле (12.4); при  $28 < \lambda < 55$  — по формуле  $\sigma_{кр} = 10\,000 - 55,7\lambda$  (кг/см<sup>2</sup>); при  $10 < \lambda < 28$  можно принимать критическое напряжение постоянным и равным  $\sigma_{0,2}$ .

3. При расчете на устойчивость ходовых или грузовых винтов рекомендуется вычислять расчетный момент инерции по эмпирической формуле

$$J = \frac{\pi d_1^4}{64} \left( 0,375 + 0,625 \frac{d}{d_1} \right), \quad (12.10)$$

где  $d$  и  $d_1$  — соответственно наружный и внутренний диаметры резьбы. Площадь поперечного сечения винта при вычислении радиуса инерции и прочих расчетах определяется по внутреннему диаметру резьбы.

Характер опор винта устанавливают в зависимости от отношения длины  $l_{оп}$  опоры (подшипника, опорной гайки) к ее расчетному диаметру  $d_{оп}$ : при  $l_{оп} : d_{оп} < 1,5$  опору считают шарнирной; при  $l_{оп} : d_{оп} > 3$  — жесткой; при  $l_{оп} : d_{оп} = 1,5 \div 3,0$  опору рассматривают как несовершенную (упругую) заделку [37]. Разрезную гайку считают шарнирной опорой. Для опорных гаек за  $d_{оп}$  принимают средний диаметр резьбы. При двух несовершенных заделках  $\mu = 0,74$ ; при одной жесткой и другой несовершенной заделках  $\mu = 0,594$ . Для других случаев  $\mu$  принимается по табл. 12.1.

4. Целесообразно применять для сжатых стержней, закрепление которых в главных плоскостях инерции одинаково, сечения с равными между собой главными центральными моментами инерции: Сказанное относится к монолитным сечениям, о расчете составных стоек говорится в п. 5. Рациональность сечения оценивается по величине отношения  $J$  к  $F^2$ : чем это отношение больше, тем сечение выгоднее.

5. При расчетах составных стержней определение гибкости производится в соответствии с указаниями [63].

Составные элементы из уголков, швеллеров и т. п., соединенные вплотную или через прокладки, рассчитывают, как сплошно-

стенчатые (монолитные), при условии, что наибольшие расстояния между их соединениями (прокладками и т. п.) не превышают  $40i$ , где  $i$  — радиус инерции одного уголка или швеллера относительно центральной оси, параллельной плоскости расположения прокладок. В пределах элемента должно быть не менее двух прокладок.

Для стержня из двух швеллеров (двутавров), соединенных планками  $I$  (рис. 12.2, а), надо сопоставить гибкость  $\lambda_x$  относительно «материальной» оси, т. е. оси, пересекающей элементы сечения, и при-

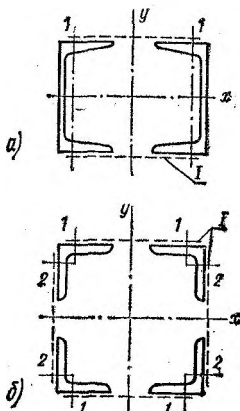


РИС. 12.2

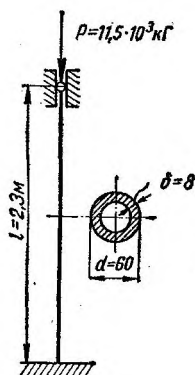


РИС. 12.3

веденную гибкость  $\lambda_{пр}$  относительно «свободной» (не пересекающей элементов сечения) оси и вести расчет по большей из них. Приведенная гибкость вычисляется по формуле

$$\lambda_{пр} = \sqrt{\lambda_y^2 + \lambda_1^2}, \quad (12.11)$$

где  $\lambda_y$  — гибкость всего стержня относительно оси  $y$ ;

$\lambda_1$  — гибкость отдельной ветви относительно оси  $I$  на участке между приваренными планками (в свету) или между центрами крайних заклепок.

Желательно выбирать расстояние между швеллерами (двутаврами) так, чтобы соблюдалось условие равноустойчивости:  $\lambda_x = \lambda_{пр}$ .

Для стержня из четырех уголков (рис. 12.2, б), у которого обе главные центральные оси «свободные», расчет надо вести по большей из приведенных гибкостей, вычисляемых по формуле

$$\lambda_{пр} = \sqrt{\lambda^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2}, \quad (12.12)$$

где  $\lambda$  — наибольшая гибкость всего стержня ( $\lambda_x$  или  $\lambda_y$ );  
 $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  — гибкости отдельных ветвей относительно осей 1 и 2, определяемые, как указано выше, для стержня из двух швеллеров.

Целесообразно, чтобы приведенные гибкости относительно обеих главных центральных осей были одинаковы.

Гибкость отдельной ветви (для обоих рассмотренных типов составных стержней) на участке между планками ( $\lambda_1, \lambda_2$ ) должна быть не более 40.

Расчет соединительных планок приведен в нормах [63]; там же даны указания по расчету составных стержней с решетками.

**Пример 12.1.** Проверить на устойчивость при  $[n_y] = 3,0$  трубчатую стойку (рис. 12.3) из стали 30ХГС ( $\sigma_{пц} = 80 \text{ кг/мм}^2$ ,  $\sigma_{0,2} = 50 \text{ кг/мм}^2$ ,  $\sigma_{пц} = 35 \text{ кг/мм}^2$ ,  $E = 2,1 \cdot 10^4 \text{ кг/мм}^2$ ).

**Решение.** Предельная гибкость для материала стойки

$$\lambda_{\text{пред}} = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_{пц}}} = 3,14 \sqrt{\frac{2,1 \cdot 10^4}{35}} = 77.$$

Геометрические характеристики поперечного сечения

$$\begin{aligned} J_{\text{min}} &= J = \frac{\pi d^4}{64} \left[ 1 - \left( \frac{d - 2\delta}{d} \right)^4 \right] = \\ &= \frac{3,14 \cdot 6^4}{64} \left[ 1 - \left( \frac{6 - 2 \cdot 0,8}{6} \right)^4 \right] = 45,3 \text{ см}^4; \\ F &= \frac{\pi d^2}{4} \left[ 1 - \left( \frac{d - 2\delta}{d} \right)^2 \right] = \\ &= \frac{3,14 \cdot 6^2}{4} \left[ 1 - \left( \frac{6 - 2 \cdot 0,8}{6} \right)^2 \right] = 13,1 \text{ см}^2; \\ i_{\text{min}} = i &= \sqrt{\frac{J}{F}} = \sqrt{\frac{45,3}{13,1}} = 1,86 \text{ см}. \end{aligned}$$

Гибкость стойки ( $\mu \approx 0,7$  по табл. 12.1)

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\text{min}}} = \frac{0,7 \cdot 230}{1,86} = 86,7,$$

следовательно,  $\lambda > \lambda_{\text{пред}}$  и формула Эйлера применима.

Критическая сила

$$P_{\text{кр}} = \sigma_{\text{кр}} F = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} F = \frac{3,14^2 \cdot 2,1 \cdot 10^4}{86,7^2} 13,1 = 36,2 \cdot 10^3 \text{ кг}.$$

Коэффициент запаса устойчивости

$$n_y = \frac{P_{\text{кр}}}{P} = \frac{36,2 \cdot 10^3}{11,5 \cdot 10^3} = 3,15 > [n_y].$$

**Пример 12.2.** Определить критическую длину стальной стойки из двутавра № 20, находящейся под действием собственного веса. Нижний конец стойки жестко зашкелен, верхний свободен.

**Решение.** Критической является длина стержня, при которой он теряет устойчивость при действии на него заданной нагрузки (в данном случае собственного веса). Критическое значение равномерно распределенной по длине стержня сжимающей нагрузки определяется по формуле

$$(ql)_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 EJ_{\min}}{(\mu l)^2},$$

откуда

$$l_{\text{кр}}^3 = \frac{\pi^2 EJ_{\min}}{\mu^2 q}.$$

Принимая  $E=2,1 \cdot 10^6$  кг/см<sup>2</sup>,  $J_{\min} = J_y = 115$  см<sup>4</sup> (ГОСТ 8239—56),  $q = 21,0 \cdot 10^{-2}$  кг/см (ГОСТ 8239—56\*),  $\mu = 1,12$  (см. табл. 12.2), получаем

$$l_{\text{кр}} = \sqrt[3]{\frac{\pi^2 EJ_{\min}}{q \mu^2}} = \sqrt[3]{\frac{3,14^2 \cdot 2,1 \cdot 10^6 \cdot 115}{21,0 \cdot 10^{-2} \cdot 1,12^2}} \approx 2,10 \cdot 10^3 \text{ см} \approx 21,0 \text{ м}.$$

Заметим, что при такой длине гибкость стойки чрезвычайно велика:

$$\lambda_{\text{кр}} = \frac{l_{\text{кр}}}{i_{\min}} = \frac{21,0 \cdot 10^3}{2,07} \approx 1010.$$

Стержни такой гибкости в конструкциях не применяются.

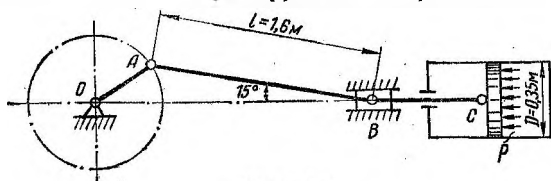


РИС. 12.4

**Пример 12.3.** Определить требуемый диаметр шатуна  $AB$  кривошипношатунного механизма (рис. 12.4). Давление в цилиндре  $p = 18$  бар; материал шатуна — сталь 45;  $E = 2,0 \cdot 10^5$  н/мм<sup>2</sup>, требуемый коэффициент запаса устойчивости  $[n_y] = 4,5$ . Принять, что заданное положение шатуна является расчетным.<sup>1</sup> Влияние собственного веса и сил инерции не учитывать.

**Решение.** Сила, действующая на поршень и сжимающая шток  $BC$ ,

$$P = p \frac{\pi D^2}{4} = 18 \cdot 10^5 \frac{3,14 \cdot 0,35^2}{4} = 173 \cdot 10^3 \text{ н}.$$

<sup>1</sup> Схема к примеру заимствована из пособия [38].

Сжимающее усилие в шатуне (из условия равновесия шарнира  $B$ )

$$N = \frac{P}{\cos 15^\circ} = \frac{173 \cdot 10^3}{0,965} = 180 \cdot 10^3 \text{ н.}$$

Для определения требуемого момента инерции поперечного сечения шатуна используем условие устойчивости (12.1) и формулу (12.2):

$$n_y = \frac{N_{кр}}{N} = \frac{\pi^2 EJ_{\min}}{(\mu l)^2 N} \geq [n_y],$$

откуда

$$J_{\min} = J = \frac{\pi d^4}{64} \geq \frac{N [n_y] (\mu l)^2}{\pi^2 E} = \frac{180 \cdot 10^3 \cdot 4,5 (1600)^2}{3,14^2 \cdot 2,0 \cdot 10^6} = 105 \cdot 10^4 \text{ мм}^4.$$

Требуемый диаметр шатуна

$$d = \sqrt[4]{\frac{64J}{\pi}} = \sqrt[4]{\frac{64 \cdot 105 \cdot 10^4}{3,14}} = 68 \text{ мм.}$$

Для того чтобы установить, допустимо ли было применение формулы Эйлера, вычислим гибкость стержня при принятом диаметре его сечения:

$$\lambda = \frac{\mu l}{i} = \frac{\mu l}{\frac{d}{4}} = \frac{1600}{\frac{68}{4}} = 94,2.$$

По табл. 12.3 для стали 45  $\lambda_{\text{пред}} = 85$ , следовательно,  $\lambda > \lambda_{\text{пред}}$  и формула Эйлера применима.

**Пример 12.4.** Стержень прямоугольного сечения закреплен таким образом, что в плоскости наименьшей жесткости оба его конца жестко защемлены, а в плоскости наибольшей жесткости могут свободно поворачиваться — закреплены шарнирно (рис. 12.5). Определить размер  $h$  из условия равноустойчивости стержня в главных плоскостях и вычислить допускаемое значение силы  $P$ , если  $[n_y] = 3,7$ . Материал стержня — сталь Ст. 5.

Решение. При равноустойчивости стержня в главных плоскостях гибкости относительно главных центральных осей поперечного сечения стержня равны между собой:

$$\lambda_x = \lambda_y,$$

где  $\lambda_x = \frac{\mu_x l}{i_x}$  и  $\lambda_y = \frac{\mu_y l}{i_y}$ .

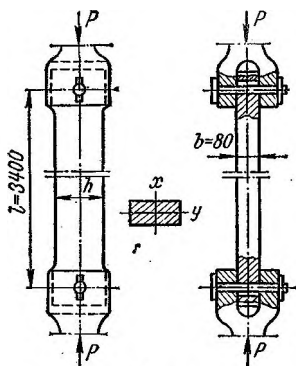


РИС. 12.5

По табл. 12.1  $\mu_x = 1,0$ ,  $\mu_y = 0,5$ , таким образом,

$$\frac{l}{i_x} = \frac{0,5l}{i_y},$$

откуда  $i_x = 2i_y$ ,  
где

$$i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}} = \sqrt{\frac{bh^3}{12bh}} = \frac{h}{\sqrt{12}};$$

$$i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}} = \sqrt{\frac{b^3h}{12bh}} = \frac{b}{\sqrt{12}}.$$

Следовательно,

$$\frac{h}{\sqrt{12}} = 2 \frac{b}{\sqrt{12}}; \quad h = 2b = 2 \cdot 80 = 160 \text{ мм.}$$

Гибкость стержня

$$\lambda = \lambda_x = \lambda_y = \frac{\mu_x l}{i_x} = \frac{l \sqrt{12}}{h} = \frac{3400 \sqrt{12}}{160} = 73,7;$$

$$\lambda < \lambda_{\text{пред}} (\lambda_{\text{пред}} = 92 \text{ — см. табл. 12.3})$$

и, следовательно, формула Эйлера неприменима.

Определяем  $\sigma_{\text{кр}}$  ( $P_{\text{кр}}$ ) по линейной эмпирической зависимости (12.8), используя при этом данные табл. 12.3:

$$P_{\text{кр}} = F\sigma_{\text{кр}} = bh(3500 - 11,5\lambda) = 8 \cdot 16(3500 - 11,5 \cdot 73,7) = \\ = 340 \cdot 10^3 \text{ кг.}$$

Допускаемая нагрузка

$$[P] = \frac{P_{\text{кр}}}{[n_y]} = \frac{340 \cdot 10^3}{3,7} = 91,8 \cdot 10^3 \text{ кг.}$$

## § 12.2. РАСЧЕТ СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ НА УСТОЙЧИВОСТЬ ПО КОЭФФИЦИЕНТАМ ПРОДОЛЬНОГО ИЗГИБА

Условие устойчивости. Расчетные формулы

Условие устойчивости прямолинейной формы равновесия сжатого стержня в случае применения рассматриваемого метода расчета записывается в виде

$$\sigma = \frac{P}{F} \leq [\sigma_y] = \varphi [\sigma_c], \quad (12.13)$$

где  $\sigma$  — нормальное напряжение, возникающее в поперечном сечении стержня;

$P$  — сила, сжимающая стержень;

$F$  — площадь брутто (без учета местных ослаблений) поперечного сечения стержня;

$[\sigma_y]$  — допускаемое напряжение на сжатие, установленное с учетом опасности потери устойчивости (или, короче, допускаемое напряжение при расчете на устойчивость);

$\varphi$  — коэффициент продольного изгиба (или коэффициент уменьшения основного допускаемого напряжения на сжатие), величина которого зависит от материала и гибкости стержня (см. табл. 12.6);

$[\sigma_c]$  — основное допускаемое напряжение на сжатие, т. е. установленное без учета опасности продольного изгиба (для пластичных материалов  $[\sigma_c] = [\sigma_p]$ ).

Таблица 12.6  
Значения коэффициента продольного изгиба [59,63]

Гиб- кость $\lambda$	Сталь марок			Чугун марок		Дюралю- миний Д16Т	Дерево (сосна, ель)
	Ст. 3, Ст. 4	Ст. 5	14Г2, 15ГС, 10Г2С, 10Г2СД, 15ХСНД	СЧ 12-28, СЧ 15-32, СЧ 18-36, СЧ 21-40	СЧ 24-44, СЧ 28-48		
0	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
10	0,99	0,98	0,98	0,97	0,95	0,999	0,99
20	0,97	0,96	0,95	0,91	0,87	0,998	0,97
30	0,95	0,93	0,92	0,81	0,75	0,835	0,93
40	0,92	0,90	0,89	0,69	0,60	0,700	0,87
50	0,89	0,85	0,84	0,57	0,43	0,568	0,80
60	0,86	0,80	0,78	0,44	0,32	0,455	0,71
70	0,81	0,74	0,71	0,34	0,23	0,353	0,61
80	0,75	0,67	0,63	0,26	0,18	0,269	0,49
90	0,69	0,59	0,54	0,20	0,14	0,212	0,38
100	0,60	0,50	0,46	0,16	0,12	0,172	0,31
110	0,52	0,43	0,39	—	—	0,142	0,25
120	0,45	0,37	0,33	—	—	0,119	0,22
130	0,40	0,32	0,29	—	—	0,101	0,18
140	0,36	0,28	0,25	—	—	0,087	0,16
150	0,32	0,25	0,23	—	—	0,076	0,14
160	0,29	0,23	0,21	—	—	—	0,12
170	0,26	0,21	0,19	—	—	—	0,11
180	0,23	0,19	0,17	—	—	—	0,10
190	0,21	0,17	0,15	—	—	—	0,09
200	0,19	0,15	0,13	—	—	—	0,08
210	0,17	0,14	0,12	—	—	—	—
220	0,16	0,13	0,11	—	—	—	—

При наличии местных ослаблений дополнительно должен быть произведен расчет на прочность:

$$\sigma = \frac{P}{F_{нт}} \leq [\sigma_c], \quad (12.14)$$

где  $F_{нт}$  — площадь нетто (с учетом ослаблений) поперечного сечения стержня.

По коэффициентам продольного изгиба в основном рассчитывают элементы строительных конструкций и мостов. Производя расчеты по обусловленным нормами величинам основных допускаемых напряжений, обеспечивают работу сжатых стержней с коэффициентами запаса устойчивости, принятыми при составлении таблиц коэффициентов  $\varphi$ . Для элементов машиностроительных конструкций в боль-

шинстве случаев приняты более высокие коэффициенты запаса и, кроме того, нет строгой регламентации величин допускаемых напряжений; поэтому не рекомендуется выполнять их расчет по коэффициентам  $\phi$ .

Исключением являются элементы металлических конструкций подъемно-транспортных сооружений, для которых расчет по коэффициентам  $\phi$  имеет широкое распространение.

Предписанная строительными нормами и правилами зависимость для расчета на устойчивость центрально сжатых стержней несколько отличается от приведенной здесь формулы (12.13). Указанная зависимость имеет вид

$$\frac{N}{\phi F} \leq R_c, \quad (12.15)$$

где  $N$  — расчетное значение сжимающей силы;

$R_c$  — расчетное сопротивление сжатию материала стержня.

При наличии местных ослаблений, помимо расчета на устойчивость по формуле (12.15), должен быть произведен расчет на прочность:

$$\frac{N}{F_{нт}} \leq R, \quad (12.16)$$

где  $N$  — расчетное сопротивление растяжению материала стержня (для стали  $R_c = R$ ).

Подробнее об этом см. в работах [62, 63, 64].

Основные допускаемые напряжения на сжатие при расчете по формуле (12.13) могут быть приняты по следующим данным:

Материал	$[\sigma_c]$ , кг/см <sup>2</sup>
Сталь Ст. 3, Ст. 4	1600
Сталь Ст. 5	1750
Сталь 14Г2, 15ГС, 10Г2СД, 15ХСНД	2100
Дюралюминий Д16Т	1700
Отливки из серого чугуна марок:	
СЧ 12-28, СЧ 15-32	1300
СЧ 18-36, СЧ 21-40	1500
СЧ 24-44, СЧ 28-48	1700
Сосна, ель	100
Дуб	130

Дополнительные указания к расчетам по коэффициентам продольного изгиба<sup>1</sup>

1. При расчетах по коэффициентам продольного изгиба следует учитывать пп. 1, 2, 4, 5 дополнительных указаний, приведенных на стр. 366—368.

<sup>1</sup> Указания и примеры 12.7—12.9 составлены при участии канд. техн. наук, доц. С. В. Рабиновича.



2. При расчете тонкостенных трубчатых стержней на коэффициент  $\gamma$  (см. табл. 12.4, 12.5) должно быть умножено основное допускаемое напряжение. Табл. 12.5 может быть с известным приближением использована для трубчатых стержней из стали любой марки.

3. Методика проектного расчета (подбора сечения) сжатого стержня на основе формулы (12.13) зависит от формы его поперечного сечения.

Следует различать два случая:

а) форма поперечного сечения стержня такова, что при различных его размерах соблюдается свойство геометрического подобия (круг, кольцо с заданным отношением внутреннего диаметра к наружному, правильный многоугольник, прямоугольник с заданным отношением сторон, равнобокий угольник с постоянным отношением толщины стенки к ее ширине);

б) формы поперечного сечения стержня при различных его размерах свойством геометрического подобия не обладают (профили двутавра, швеллера и т. п.).

В первом случае проектный расчет сжатого стержня на устойчивость может быть выполнен в следующем порядке (см. примеры 12.7, 12.8):

1) по заданной сжимающей силе  $P$  и основному допускаемому напряжению на сжатие  $[\sigma_c]$  находят требуемую площадь поперечного сечения  $F_c$  стержня из его расчета на простое сжатие:

$$F_c = \frac{P}{[\sigma_c]}; \quad (12.17)$$

2) по найденному значению  $F_c$  при заданных форме сечения, длине и способам закрепления концов стержня определяют минимальный радиус инерции  $i_c$  и наибольшую гибкость

$$\lambda_c = \frac{\mu l}{i_c};$$

3) по табл. 12.7 определяют соответствующее величине  $\lambda_c$  значение коэффициента продольного изгиба  $\varphi$ , по которому находят искомую площадь поперечного сечения стержня

$$F = \frac{F_c}{\varphi}. \quad (12.18)$$

Во втором случае расчет может быть выполнен непосредственно по графикам типа, показанного на рис. 12.6 для широкополочных двутавров (по ГОСТ 6183—52).

График составлен при основном допускаемом напряжении  $[\sigma_c] = 1600 \text{ кг/см}^2$ ; если же  $[\sigma_c]$  отлично от принятого, то величину сжимающей силы следует умножить на отношение  $\frac{1600}{[\sigma_c]}$  (см. пример 12.9).

Графики, подобные приведенному, могут быть составлены и для других форм сечений. Находят применение также расчетные графики других типов (см. работу [36]).

При отсутствии графиков расчет приходится выполнять последовательными приближениями, так как коэффициент  $\varphi$  зависит от гибкости стержня  $\lambda$ , которая в начале расчета неизвестна (см. пример 12.8). Для упрощения проектного расчета могут быть также составлены вспомогательные таблицы (см. работы [74, 80]).

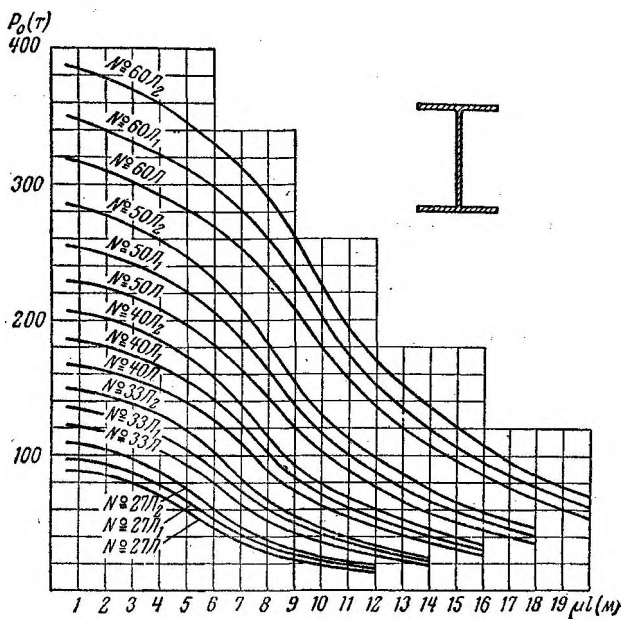


РИС. 12.6

4. Для деревянных стержней табличные значения  $\varphi$  получены по формулам:

$$\text{при } \lambda \leq 75 \quad \varphi = 1 - 0,8 \left( \frac{\lambda}{100} \right)^2; \quad (12.19)$$

$$\text{при } \lambda > 75 \quad \varphi = \frac{3100}{\lambda^2}. \quad (12.20)$$

Взамен методики, рекомендованной для первого случая, можно непосредственно применять эти формулы, что приводит к некоторому упрощению расчетов по сравнению с методом последовательных приближений (см. пример 12.7).

**Пример 12.5.** Проверить на устойчивость стойку (рис. 12.7) из стали 15ХСНД.

Решение. Радиус инерции поперечного сечения

$$i_{\min} = i = \sqrt{\frac{J}{F}} = \sqrt{\frac{\pi d^4 (1 - c^4)}{64 \frac{\pi d^2}{4} (1 - c^2)}} = \\ = \frac{d}{4} \sqrt{1 + c^2} = \frac{6}{4} \sqrt{1 + 0,9^2} = 2,02 \text{ см} \\ \left( c = \frac{d_0}{d} = \frac{54}{60} = 0,9 \right).$$

Гибкость стойки

$$\lambda = \frac{\mu l}{i} = \frac{0,5 \cdot 230}{2,02} = 57.$$

Площадь поперечного сечения

$$F = \frac{\pi d^2}{4} (1 - c^2) = \frac{3,14 \cdot 6^2}{4} (1 - 0,9^2) = 5,36 \text{ см}^2.$$

По табл. 12.5, интерполируя, получаем

$$\psi = 0,873 - \frac{0,873 - 0,815}{10} 3 = 0,856.$$

По табл. 12.6, интерполируя, получаем

$$\varphi = 0,840 - \frac{0,840 - 0,780}{10} 7 = 0,798.$$

Основное допускаемое напряжение (по данным, приведенным на стр. 374)  $[\sigma_c] = 2100 \text{ кг/см}^2$ ; допускаемое напряжение при расчете на устойчивость (с учетом поправки на тонкостенность стойки)

$$[\sigma_y] = \varphi \psi [\sigma_c] = 0,798 \cdot 0,856 \cdot 2100 = 1430 \text{ кг/см}^2.$$

Напряжение, возникающее в поперечном сечении стойки при заданной нагрузке:

$$\sigma = \frac{P}{F} = \frac{7500}{5,36} = 1400 \text{ кг/см}^2;$$

$\sigma < [\sigma_y]$  (примерно на 2,1%).

**Пример 12.6.** Определить допускаемую величину центральной сжимающей силы для стойки из четырех соединенных планками неравнобоких уголков (рис. 12.8). Материал уголков — сталь Ст. 3;  $[\sigma_c] = 1600 \text{ кг/см}^2$ .

Расстояние между планками выбрать так, чтобы максимальная гибкость ветви в плоскостях, параллельных планкам, не превышала 40. Определить коэффициент запаса устойчивости при нагрузке, равной допускаемой.

Решение. Для одного уголка (по ГОСТ 8510—57)  $i_1 = 1,43$  см,  $i_2 = 2,39$  см; следовательно, расстояние между планками ( $l_{\text{вет}}$ ) определяется по гибкости<sup>1</sup> относительно оси 1:

$$\lambda_1 = \frac{l_{\text{вет}}}{i_1} = 40,$$

откуда

$$l_{\text{вет}} = 40i_1 = 40 \cdot 1,43 = 57,2 \text{ см} = 572 \text{ мм.}$$

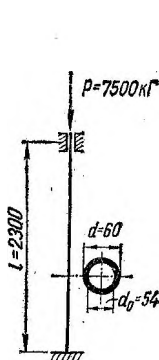


РИС. 12.7

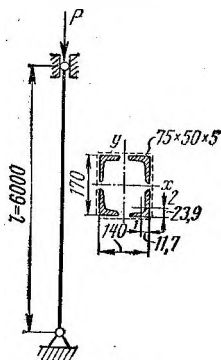


РИС. 12.8

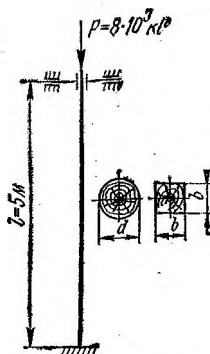


РИС. 12.9

При таком расстоянии между планками

$$\lambda_2 = \frac{l_{\text{вет}}}{i_2} = \frac{57,2}{2,39} = 24.$$

Приведенная гибкость стержня [см. формулу (12.12)]

$$\lambda_{\text{пр}} = \sqrt{\lambda^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2}.$$

В данном случае очевидно, что гибкость всего стержня, рассматриваемого как монолитный, максимальна относительно оси  $y$ , т. е.  $\lambda = \lambda_y$ :

$$\lambda_y = \frac{l}{i_y};$$

$$i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}} = \sqrt{\frac{4[12,5 + 6,11(7,0 - 1,17)^2]}{4 \cdot 6,11}} \approx 6,0 \text{ см};$$

$$\lambda = \lambda_y = \frac{600}{6} = 100;$$

<sup>1</sup> Участок уголка между планками рассматривается как стержень с шарнирно закрепленными концами ( $\mu = 1,0$ ).

$$\lambda_{\text{пр}} = \sqrt{\lambda^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2} = \sqrt{100^2 + 40^2 + 24^2} = 110.$$

На основании формулы (12.13)

$$[P] = \varphi [\sigma_c] F,$$

где  $\varphi = 0,52$  (см. табл. 12.6).

Подставив числовые значения, получаем

$$[P] = 0,52 \cdot 1600 \cdot 4 \cdot 6,11 = 20,3 \cdot 10^3 \text{ кг}.$$

Коэффициент запаса устойчивости

$$n_y = \frac{\sigma_{\text{кр}}}{[\sigma_y]}.$$

$\lambda_{\text{пр}} > \lambda_{\text{пред}}$  (см. табл. 12.3), следовательно, формула Эйлера применима:

$$\sigma_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 E}{\lambda_{\text{пр}}^2} = \frac{3,14^2 \cdot 2,1 \cdot 10^6}{110^2} = 1710 \text{ кг/см}^2;$$

$$n_y = \frac{\sigma_{\text{кр}}}{\varphi [\sigma_c]} = \frac{1710}{0,52 \cdot 1600} = 2,06.$$

**Пример 12.7.** Определить из расчета на устойчивость требуемые размеры поперечного сечения сосновой стойки (рис. 12.9), рассмотрев указанные на чертеже два варианта сечения.

**Решение.** Из формулы (12.13) следует

$$F \geq \frac{P}{\varphi [\sigma_c]}.$$

Предполагая, что  $\lambda > 75$ , применим формулу (12.20)

$$\varphi = \frac{3100}{\lambda^2}.$$

По табл. 12.1  $\mu = 1,0$  и для круглого сечения

$$\lambda^2 = \frac{(\mu l)^2}{i^2} = \frac{l^2}{\left(\frac{d}{4}\right)^2};$$

$$\varphi = \frac{3100 d^2}{16 l^2};$$

$$F = \frac{\pi d^2}{4} \geq \frac{P 16 l^2}{3100 d^2 [\sigma_c]},$$

откуда

$$d \geq \sqrt[4]{\frac{4P \cdot 16l^2}{3,14 \cdot 3100 [\sigma_c]}} = \sqrt[4]{\frac{4 \cdot 8 \cdot 10^3 \cdot 16 \cdot 500^2}{3,14 \cdot 3100 \cdot 100}} \approx 19 \text{ см}.$$

Здесь было принято  $[\sigma_c] = 100 \text{ кг/см}^2$  (см. стр. 374). При принятом диаметре

$$i = \frac{d}{4} = \frac{19,1}{4} = 4,77 \text{ см}; \quad \lambda = \frac{500}{4,77} \approx 105$$

Так как гибкость стержня получилась больше 75, то формула (12.20), использованная для  $\varphi$ , применима.

При квадратном сечении

$$i = \frac{b}{\sqrt{12}}; \quad \lambda^2 = \frac{12l^2}{b^2}; \quad \varphi = \frac{3100b^2}{12l^2};$$

$$F = b^2 \geq \frac{P}{\varphi[\sigma_c]} = \frac{P12l^2}{3100b^2[\sigma_c]},$$

откуда

$$b \geq \sqrt[4]{\frac{12Pl^2}{3100[\sigma_c]}} = \sqrt[4]{\frac{12 \cdot 8 \cdot 10^3 \cdot 500^2}{3100 \cdot 100}} = 16,6 \text{ см.}$$

При принятом  $b$ :

$$i = \frac{b}{\sqrt{12}} = \frac{16,6}{\sqrt{12}} = 4,84; \quad \lambda = \frac{\mu l}{i} = \frac{500}{4,84} = 103,$$

т. е. опять-таки формула (12.20) применима.

Решим этот же пример, применив изложенную на стр. 375 методику для сечений, обладающих свойством геометрического подобия.

По формуле (12.17) требуемая площадь поперечного сечения стойки при ее расчете на простое сжатие

$$F_c = \frac{P}{[\sigma_c]} = \frac{8 \cdot 10^3}{100} = 80 \text{ см}^2.$$

По табл. 12.1  $\mu = 1,0$  и для круглого сечения

$$\lambda_c = \frac{\mu l}{i_c} = \frac{l}{\frac{d_c}{4}} = \frac{l}{\sqrt{\frac{F_c}{4\pi}}} = \frac{500}{\sqrt{\frac{20}{\pi}}} = 198.$$

Из табл. 12.7 находим  $\varphi = 0,283$ .

По формуле (12.18) имеем

$$F = \frac{F_c}{\varphi} = \frac{80}{0,283} = 282 \text{ см}^2,$$

откуда искомый диаметр сечения

$$d = \sqrt{\frac{4}{\pi} F} = \sqrt{\frac{4 \cdot 282}{\pi}} \approx 19 \text{ см.}$$

Таблица 12.7

Коэффициенты продольного изгиба, соответствующие условной гибкости  $\lambda_c$  (для подбора сечений, обладающих свойством геометрического подобия)

$\lambda_c$	$\varphi$					
	Сталь марок		Чугун марок		Дюралюминий Д16Т	Дерево (сосна, ель)
	Ст. 2, Ст. 3, Ст. 4	Ст. 5	Сч 12-28, Сч 15-32, Сч 18-36, Сч 21-40	Сч 24-44, Сч 28-48		
0	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
10	0,99	0,98	0,97	0,95	1,00	0,99
20	0,96	0,96	0,905	0,86	1,00	0,97
30	0,94	0,93	0,84	0,79	0,81	0,93
40	0,92	0,90	0,75	0,70	0,77	0,88
50	0,90	0,86	0,68	0,61	0,685	0,83
60	0,87	0,83	0,60	0,54	0,61	0,78
70	0,84	0,79	0,55	0,47	0,55	0,71
80	0,80	0,74	0,49	0,415	0,50	0,65
90	0,76	0,70	0,44	0,38	0,45	0,60
100	0,72	0,66	0,41	0,34	0,415	0,55
110	0,68	0,62	0,37	0,31	0,38	0,50
120	0,64	0,58	0,34	0,29	0,35	0,46
130	0,60	0,54	0,32	0,265	0,32	0,43
140	0,57	0,51	0,295	0,24	0,30	0,40
150	0,53	0,48	0,27	0,225	0,28	0,37
160	0,50	0,45	0,25	0,215	0,26	0,35
170	0,475	0,43	0,24	0,205	0,25	0,33
180	0,45	0,41	0,23	0,19	0,235	0,31
190	0,43	0,39	0,21	0,18	0,22	0,295
200	0,41	0,37	0,20	0,17	0,21	0,28
220	0,38	0,33	0,18	0,15	0,19	0,25
240	0,35	0,31	0,17	0,14	0,17	0,23
260	0,33	0,28	0,15	0,13	0,16	0,21
280	0,31	0,27	—	0,12	0,15	0,20
300	0,29	0,25	—	0,11	0,14	0,18
340	0,26	0,23	—	—	0,12	0,16
380	0,23	0,21	—	—	0,11	0,15
420	0,21	0,19	—	—	0,10	0,13
460	0,19	0,17	—	—	0,09	0,12
500	0,175	0,155	—	—	0,08	0,11
550	0,16	0,14	—	—	—	—
600	—	0,13	—	—	—	—

Примечание. При составлении таблицы принято  $\lambda_c = \frac{\lambda}{\sqrt{\varphi}}$ .

При квадратном сечении

$$\lambda_c = \frac{\mu l}{i_c} = \frac{l}{\frac{b_c}{\sqrt{12}}} = \frac{l}{\sqrt{\frac{F_c}{12}}} = \frac{500}{\sqrt{\frac{80}{12}}} = 194.$$

Из табл. 12.7 находим  $\varphi = 0,289$ .

По формуле (12.18) имеем

$$F = \frac{F_c}{\varphi} = \frac{80}{0,289} = 276 \text{ см}^2,$$

откуда искомая сторона квадратного сечения

$$b = \sqrt{F} = \sqrt{276} = 16,6 \text{ см.}$$

**Пример 12.8.** Определить требуемый номер профиля равнобоких уголков для подкоса  $AB$  кронштейна (рис. 12.10, а). Материал подкоса — сталь Ст. 3;  $[\sigma_c] = 1600 \text{ кг/см}^2$ .

**Решение.** Сжимающее усилие в подкосе (рис. 12.10, б):

$$\begin{aligned} \sum m_C &= 0; \quad P \cdot 1250 - (N \sin \alpha) 1000 = 0; \\ \cos \alpha &= \frac{1000}{1500} \quad (\text{см. рис. 12.10, а}); \quad \alpha = 48^\circ 10'; \\ \sin \alpha &= 0,749; \\ N &= \frac{1,25P}{\sin \alpha} = \frac{1,25 \cdot 4 \cdot 10^3}{0,749} = 670 \cdot 10^3 \text{ кг.} \end{aligned}$$

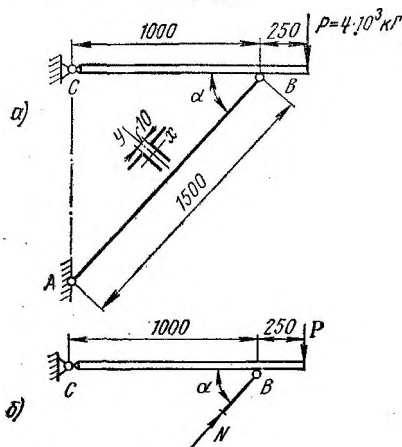


РИС. 12.10

На основании формулы (12.13)

$$F \geq \frac{N}{\varphi [\sigma_c]}.$$

Предварительно принимаем  $\varphi_1 = 0,5$ , тогда

$$F_1 = \frac{6,70 \cdot 10^3}{0,5 \cdot 1600} = 8,38 \text{ см}^2.$$

Требуемая площадь одного уголка  $F_{1\text{уг}} = \frac{F_1}{2} = \frac{8,38}{2} = 4,19 \text{ см}^2$ ; по ГОСТ 8509—57 принимаем уголок  $56 \times 56 \times 4$  с  $F_{\text{уг}} = 4,38 \text{ см}^2$  и  $i_x = 1,73 \text{ см}$  (очевидно, для сечения из двух уголков  $i_y > i_x$  и, кроме того, относительно оси  $x$  радиус инерции всего сечения равен радиусу инерции одного уголка).



Гибкость подкоса

$$\lambda_1 = \frac{\mu l}{i_x} = \frac{150}{1,73} = 87.$$

По табл. 12.6  $\varphi_{1\text{табл}} = 0,768$ .

Для второй попытки принимаем

$$\varphi_2 = \frac{\varphi_1 + \varphi_{1\text{табл}}}{2} = \frac{0,5 + 0,768}{2} = 0,634,$$

при этом

$$F_2 = \frac{6,70 \cdot 10^8}{0,634 \cdot 1600} = 6,61 \text{ см}^2;$$

$$F_{2\text{уг}} = \frac{6,61}{2} \approx 3,3 \text{ см}^2.$$

По ГОСТ 8509—57 подходит уголок  $45 \times 45 \times 4$ , для которого  $F_{\text{уг}} = 3,48 \text{ см}^2$ ;  $i_x = 1,38 \text{ см}$ .

Тогда

$$\lambda_2 = \frac{150}{1,38} = 109; \quad \varphi_{2\text{табл}} = 0,528.$$

Для третьей попытки принимаем

$$\varphi_3 = \frac{\varphi_2 + \varphi_{2\text{табл}}}{2} = \frac{0,634 + 0,528}{2} = 0,581,$$

при этом

$$F_{3\text{уг}} = \frac{6,70 \cdot 10^8}{2 \cdot 0,581 \cdot 1600} = 3,6 \text{ см}^2.$$

По ГОСТ 8509—57 принимаем уголок  $50 \times 50 \times 4$ , для которого  $F_{\text{уг}} = 3,89 \text{ см}^2$ ;  $i_x = 1,54 \text{ см}$ .

Проверяем принятый профиль:

$$\lambda_3 = \frac{150}{1,54} = 97,5; \quad \varphi_{3\text{табл}} = 0,622;$$

$$[\sigma_y] = \varphi_{3\text{табл}} [\sigma_c] = 0,622 \cdot 1600 = 995 \text{ кг/см}^2;$$

$$\sigma = \frac{N}{2F_{\text{уг}}} = \frac{6,70 \cdot 10^8}{2 \cdot 3,89} = 862 \text{ кг/см}^2.$$

Подкос принятого профиля недогружен на 13,4%; нетрудно убедиться, что при любом ином номере профиля по ГОСТ 8509—57 будет либо недопустимая перегрузка, либо еще большая недогрузка.

Для того чтобы произведенный расчет был справедлив, расстояния между прокладками, с помощью которых соединены уголки, не должны превышать  $40i_x = 40 \cdot 1,54 = 61,6 \text{ см}$  (см. п. 5 указаний, стр. 369).

Решим этот же пример в предположении, что различные профили уголков обладают свойством геометрического подобия.

По формуле (12.17) требуемая площадь поперечного сечения одного уголка при расчете подкоса на простое сжатие

$$F_c = \frac{N}{2[\sigma_c]} = \frac{6,70 \cdot 10^3}{2 \cdot 1600} = 2,10 \text{ см}^2.$$

По ГОСТ 8509—57 подбираем уголок  $36 \times 36 \times 3$  с  $F = 2,1 \text{ см}^2$  и  $i_x = 1,10 \text{ см}$ .

Заметим, что у этого уголка отношение

$$\frac{d}{b} = \frac{3}{36} \approx 0,08.$$

Гибкость подкоса

$$\lambda_c = \frac{\mu l}{i_{xc}} = \frac{150}{1,10} = 136.$$

По табл. 12.7  $\varphi = 0,582$ .

По формуле (12.18)

$$F = \frac{F_c}{\varphi} = \frac{2,10}{0,582} = 3,60 \text{ см}^2.$$

Выбираем уголок  $50 \times 50 \times 4$  с площадью  $F = 3,89 \text{ см}^2$ , форма поперечного сечения подобна форме профиля уголка  $36 \times 36 \times 3$   $\left(\frac{d}{b} = \frac{4}{50} = 0,08\right)$ .

Результат получился тот же, что и при расчете методом последовательных приближений, но трудоемкость второго расчета, очевидно, существенно ниже.

**Пример 12.9.** Определить номер профиля широкополочного двутавра, используемого в качестве стойки, имеющей приведенную длину  $\mu l = 8,5 \text{ м}$ , если сжимающая сила  $P = 90 \text{ т}$  и  $[\sigma_c] = 1500 \text{ кг/см}^2$ .

Решение. Значение ординаты, которая должна быть отложена на графике рис. 12.6,

$$P_0 = \frac{1600}{[\sigma_c]} P = \frac{1600}{1500} 90 = 96 \text{ т}.$$

По графику рис. 12.6 находим, что должна быть выбрана двутавровая балка № 40Л<sub>2</sub>.

## § 12.3. ПРОДОЛЬНО-ПОПЕРЕЧНЫЙ ИЗГИБ

При работе прямого бруса на совместное действие прямого изгиба и осевого нагружения (растяжения или сжатия) возможны два принципиально различных подхода к его расчету на прочность.

При первом подходе предполагается, что брус имеет высокую жесткость и можно не учитывать обусловленных деформациями изменений в расположении сил и в характере их действия на брус. Такая предпосылка позволяет применять принцип независимости действия сил; иногда говорят, что расчет ведется по недеформированной схеме бруса. Соответствующий метод расчета подробно рассмотрен в гл. 9.

При втором подходе к расчету считают, что жесткость бруса сравнительно невелика, от действия осевых сжимающих сил (рис. 12.11) возникают дополнительные прогибы и соответственно дополнительные изгибающие моменты, пренебрегать которыми нельзя. Очевидно, если осевые силы при той же поперечной нагрузке будут растягивающими,

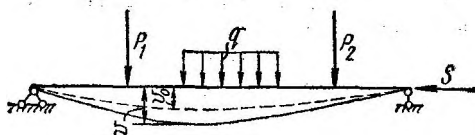


РИС. 12.11

то прогибы и изгибающие моменты будут меньше, чем вызванные действием только поперечной нагрузки. В этих случаях (как при сжимающей, так и при растягивающей осевой силе) принцип независимости действия сил неприменим и расчет следует вести по деформированной схеме бруса.

Термин «продольно-поперечный изгиб» принято относить только к расчету по деформированной схеме, т. е. расчету, выполняемому с учетом влияния осевой нагрузки на величину прогибов и изгибающих моментов.

При сжимающей осевой силе (см. рис. 12.11) расчет, основанный на принципе независимости действия сил, очевидно, дает погрешность, идущую не в запас прочности, а при растягивающей осевой силе, наоборот, погрешность такова, что расчетный коэффициент запаса ниже действительного, — ошибка идет в запас прочности. Учитывая сказанное и большее практическое значение случаев, когда осевая сила сжимающая, ограничимся рассмотрением только их.

Не проводя сравнительных расчетов, обычно трудно заранее сказать, велика ли будет погрешность от пренебрежения дополнительными прогибами и изгибающими моментами от осевой силы; все же ориентировочно можно рекомендовать при гибкости рассчитываемого бруса (в плоскости действия поперечной нагрузки), равной 40 или выше, вести расчет на продольно-поперечный изгиб.

Очевидно, что определение изгибающих моментов связано с необходимостью вычисления прогибов бруса, так как полный (результрующий) изгибающий момент равен сумме изгибающих моментов от поперечной нагрузки и от осевой силы; при этом вторые зависят от величин прогибов, т. е. (см. рис. 12.11)

$$M = M_0 + Sz,$$

где  $M$  — суммарный изгибающий момент в произвольном поперечном сечении бруса;

$M_0$  — изгибающий момент в том же сечении, обусловленный действием только поперечной нагрузки;

$S_0$  — изгибающий момент от действия осевой силы, плечом которой является прогиб  $v$  рассматриваемого сечения.

Для определения полного прогиба  $v$ , обусловленного совместным действием поперечной и осевой нагрузок, существуют уточненный и приближенный методы. По первому из них составляется и решается дифференциальное уравнение упругой линии бруса (см. работы [43, 51]).

По второму, приближенному, методу, рассмотрением которого ограничимся, принимают, что упругая линия балки с достаточной точностью может быть принята за синусоиду. При этом прогиб определяют по приближенной формуле

$$v = \frac{v_0}{1 - \frac{S}{S_0}}, \quad (12.21)$$

где  $v_0$  — прогиб данного сечения от действия только поперечных нагрузок;

$S$  — осевая сила;

$S_0$  — так называемая *эйлерова сила*.

Для определения величины эйлеровой силы служит формула

$$S_0 = \frac{\pi^2 E I_x}{(\mu l)^2}. \quad (12.22)$$

Эта формула подобна формуле Эйлера для определения критической силы центрально сжатого стержня, но по смыслу и области применения имеет определенные отличия. Во-первых, при расчете на продольно-поперечный изгиб не имеет смысла говорить о потере устойчивости в *плоскости действия поперечной нагрузки*, так как при любом значении осевой силы брус испытывает изгиб и при увеличении осевой силы не происходит *качественного* изменения характера деформации. Таким образом, отождествлять эйлерову силу и критическую неправильно, можно рассматривать эйлерову силу лишь как некоторое введенное по аналогии с формулой Эйлера обозначение величины, стоящей в правой части формулы (12.21). Во-вторых, выражение для эйлеровой силы применимо, независимо от гибкости рассматриваемого бруса, в то время как формула Эйлера применима лишь при гибкости, большей предельной (см. стр. 364). В-третьих, в формулу (12.22) входит момент инерции поперечного сечения всегда относительно главной центральной оси поперечного сечения бруса, которая перпендикулярна к плоскости действия поперечной нагрузки, *независимо от того, минимален или максимален этот момент инерции*.

Формула (12.21) для определения суммарного прогиба применима лишь при условии, что кривизна упругой линии бруса на всем его протяжении однозначна. Большую точность формула дает для бруса

с шарнирно закрепленными концами, но допустимо ее применение и при других способах концевых закреплений с подстановкой в формулу (12.22) соответствующего значения коэффициента приведения длины  $\mu$  (см. табл. 12.1).

Наибольшее сжимающее напряжение (по нему ведут расчет на прочность) в произвольном поперечном сечении бруса определяют по формуле

$$\sigma_{c \max} = \frac{S}{F} + \frac{M_0}{W_x} + \frac{Sv}{W_x}. \quad (12.23)$$

В этой формуле первое слагаемое дает величину нормального напряжения от действия осевой силы (от сжатия бруса), второе — величину наибольшего напряжения сжатия, вызванного изгибом от поперечной нагрузки, третье — то же, вызванного дополнительным изгибом от осевой силы.

Величина нормального напряжения  $\sigma_{c \max}$ , так же как и все остальные величины, входящие в формулу (12.23), берется по модулю (для упрощения записи в самой формуле это не отражено).

Расчет на прочность, естественно, должен быть выполнен для того сечения, в котором величина  $\sigma_{c \max}$  достигает наибольшего значения. В простейших случаях, когда максимальный изгибающий момент возникает в сечении, прогиб которого имеет наибольшую величину, это сечение и является опасным. Обозначив через  $M_{0 \max}$  максимальный изгибающий момент от поперечной нагрузки,  $f_0$  и  $f$  — соответственно стрелу прогиба от действия только поперечной нагрузки и суммарную, взамен формул (12.22) и (12.23) будем иметь:

$$f = \frac{f_0}{1 - S_3}; \quad (12.24)$$

$$\sigma_{c \max} = \frac{S}{F} + \frac{M_{0 \max}}{W_x} + \frac{Sf}{W_x} = \frac{S}{F} + \frac{M_{0 \max}}{W_x} + \frac{Sf_0}{W_x \left(1 - S_3\right)}. \quad (12.25)$$

В более сложных случаях, когда нагружение бруса несимметрично, положение опасного сечения не очевидно, так как места максимального прогиба и сечения, где изгибающий момент от поперечной нагрузки максимален, не совпадают. Исследование правой части выражения (12.23) на экстремум весьма громоздко, поэтому обычно ограничиваются расчетами для сечений с максимальной величиной  $M_0$  и с максимальным прогибом.

Сопоставление наибольшего значения величины  $\sigma_{c \max}$  с допустимым напряжением не позволяет дать правильную оценку прочности бруса, так как в рассматриваемом случае зависимость между нагрузками и напряжениями нелинейна — напряжения растут быстрее нагрузок. Из формул (12.23) и (12.25) видно, что при одновременном возрастании в  $n$  раз поперечной и осевой нагрузок в числителе последнего слагаемого в  $n$  раз увеличиваются не только величина  $S$ , но и величина  $v_0$  (или  $f_0$ ).

Случай, когда поперечная и осевая нагрузки пропорциональны одному параметру, т. е. когда при увеличении поперечной нагрузки, скажем, в  $n$  раз также в  $n$  раз возрастает и осевая нагрузка, называют *простым нагружением*. При таком нагружении под коэффициентом запаса прочности бруса понимают число  $n$ , на которое надо умножить все действующие на брус силы, чтобы максимальное напряжение сжатия в опасных точках опасного поперечного сечения стало равно пределу текучести (физическому  $\sigma_T$  или условному  $\sigma_{0,2c}$ ) для бруса из пластичного или хрупко-пластичного материала либо пределу прочности при сжатии для бруса из хрупкого материала. Полагая, что формулы (12.23) и (12.25) справедливы до достижения напряжением предельного значения, получаем следующее выражение для определения коэффициента запаса:

$$\sigma_T = \frac{nS}{F} + \frac{1}{W_x} \left( nM_{0 \max} + \frac{n^2 S f_0}{1 - \frac{nS}{S_3}} \right). \quad (12.26)$$

Формула справедлива для бруса из пластичного материала, при другом материале в левой части надо заменить  $\sigma_T$  на  $\sigma_{0,2c}$  или  $\sigma_{пл.с}$ . При несимметричном нагружении бруса вместо  $M_{0 \max}$  и  $f_0$  надо подставить соответственно  $M_0$  и  $v_0$  для проверяемого сечения.

Величину  $n$ , найденную из формулы (12.26), сопоставляют с требуемым коэффициентом запаса  $[n]$ , т. е. условие прочности:

$$n \geq [n].$$

Одним из частных случаев *сложного нагружения* является такой, при котором поперечной нагрузкой служит собственная сила тяжести бруса. Естественно, в указанном случае переход бруса в опасное состояние может произойти только за счет возрастания осевой силы, и формула для определения коэффициента запаса принимает вид

$$\sigma_T = \frac{nS}{F} + \frac{1}{W_x} \left( M_{0 \max} + \frac{nS f_0}{1 - \frac{nS}{S_3}} \right). \quad (12.27)$$

Наконец, возможен случай, когда, помимо собственной силы тяжести бруса, на него действует поперечная нагрузка, могущая возрасти пропорционально осевой силе. Обозначив  $M_{10 \max}$  и  $f_{10}$  соответственно изгибающий момент и стрелу прогиба от собственного веса, а  $M_{20 \max}$  и  $f_{20}$  — те же величины от остальной поперечной нагрузки, получим следующее выражение для определения коэффициента запаса:

$$\sigma_T = \frac{nS}{F} + \frac{1}{W_x} \left( M_{10 \max} + nM_{20 \max} + \frac{nS f_{10}}{1 - \frac{nS}{S_3}} + \frac{n^2 S f_{20}}{1 - \frac{nS}{S_3}} \right). \quad (12.28)$$

В тех случаях, когда изгиб бруса происходит в плоскости наибольшей жесткости, необходим дополнительный расчет на устойчивость в плоскости наименьшей жесткости.

**Пример 12.10.** Определить коэффициенты запаса прочности и устойчивости заданного бруса (рис. 12.12). Материал бруса — сталь Ст. 3. Принять  $\sigma_T = 240 \text{ н/мм}^2$ ;  $E = 2,0 \cdot 10^5 \text{ н/мм}^2$ .

**Решение.** Принимая, что поперечная и осевая нагрузки могут возрастать одновременно и при этом соотношение между ними не нарушается — простое нагружение, определим коэффициент запаса прочности по формуле (12.26). Опасное сечение бруса совпадает

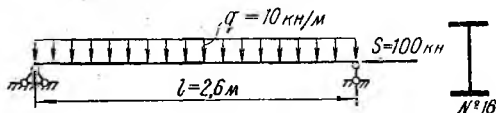


РИС. 12.12

с середины пролета. Для этого сечения изгибающий момент, как известно, определяется из выражения

$$M_0 \max = \frac{ql^2}{8} = \frac{10 \cdot 10^3 \cdot 2,6^2}{8} = 8,45 \cdot 10^3 \text{ н} \cdot \text{м},$$

а прогиб от поперечной нагрузки

$$f_0 = \frac{5}{384} \cdot \frac{ql^4}{EJ_x} = \frac{5}{384} \cdot \frac{10(2,6 \cdot 10^3)^4}{2 \cdot 10^5 \cdot 873 \cdot 10^4} = 3,40 \text{ мм},$$

где  $J_x = 873 \text{ см}^4$  по ГОСТ 8239—56\*.

Определяем величину эйлеровой силы

$$S_3 = \frac{\pi^2 EJ_x}{(\mu l)^2} = \frac{3,14^2 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 873 \cdot 10^4}{(2,6 \cdot 10^3)^2} = 254 \cdot 10^4 \text{ н}.$$

Приняв по ГОСТ 8239—56\*  $W_x = 109 \text{ см}^3$ ,  $F = 20,2 \text{ см}^2$  и подставив числовые данные в формулу (12.26), получим

$$240 = \frac{n \cdot 100 \cdot 10^3}{20,2 \cdot 10^2} + \frac{1}{109 \cdot 10^3} \left( 8,45 \cdot 10^6 n + \frac{n^2 \cdot 100 \cdot 10^3 \cdot 3,40}{1 - \frac{n \cdot 100 \cdot 10^3}{254 \cdot 10^4}} \right),$$

откуда

$$240 = 127n + \frac{3,12n^2}{1 - 0,0393n}.$$

Решив это квадратное уравнение, найдем два значения  $n$ :  $n_1 \approx 1,80$  и  $n_2 \approx 71,2$ . Нетрудно убедиться, что смысл имеет только первый корень. Действительно, уже при  $n = \frac{1}{0,0393} = 25,4$  знаменатель второго слагаемого правой части обращается в нуль, т. е. само слагаемое становится равным бесконечности.

Проверим брус на устойчивость. Гибкость в плоскости наименьшей жесткости (при  $i_y = i_{\min} = 17 \text{ мм}$ )

$$\lambda_{\max} = \frac{\mu l}{i_{\min}} = \frac{2,6 \cdot 10^3}{17} = 153.$$

Так как  $\lambda_{\max} > \lambda_{\text{пред}}$  (см. табл. 12.3), критическую силу определяем по формуле Эйлера:

$$S_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 E J_{\min}}{(\mu l)^2} = \frac{3,14^2 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 58,6 \cdot 10^4}{(2,6 \cdot 10^3)^2} = 171 \cdot 10^3 \text{ н} = 171 \text{ кн},$$

где

$$J_{\min} = J_y = 58,6 \text{ см}^4 \text{ (по ГОСТ 8239—56*)}.$$

Коэффициент запаса устойчивости

$$n_y = \frac{S_{\text{кр}}}{S} = \frac{171}{100} = 1,71.$$



РАСЧЕТЫ НА ПРОЧНОСТЬ ПРИ НАПРЯЖЕНИЯХ, ЦИКЛИЧЕСКИ ИЗМЕНЯЮЩИХСЯ ВО ВРЕМЕНИ

§ 13.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

В машиностроении часто приходится встречаться с расчетами на прочность деталей, в которых при работе возникают напряжения, периодически изменяющиеся во времени. Одним из наиболее характерных примеров такого рода деталей являются валы различных передач.

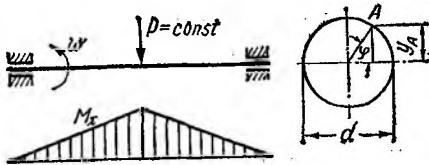


РИС. 13.1

Переменные напряжения могут возникать и при постоянной нагрузке. Простейшим примером является вращающаяся ось, нагруженная постоянной силой (рис. 13.1). Нормальное напряжение в произвольной точке контура ее поперечного сечения будет изменяться во времени по синусоидальному закону

$$\sigma_A = \frac{M_x}{J_x} y_A = \frac{M_x}{J_x} \cdot \frac{d}{2} \sin \varphi.$$

При равномерном вращении  $\varphi = \omega t$  и, следовательно,

$$\sigma_A = \frac{M_x}{J_x} \cdot \frac{d}{2} \sin \omega t.$$

Графическое изображение закона изменения напряжений во времени для рассмотренного случая представлено на рис. 13.2.

Совокупность последовательных значений переменных напряжений за один период процесса их изменения называется циклом.

Цикл напряжений, график которого изображен на рис. 13.2, называют симметричным ( $\sigma_{\max} = -\sigma_{\min}$ ).

График асимметричного цикла дан на рис. 13.3.

Ординаты, соответствующие напряжениям, характеризующим цикл (максимальному —  $\sigma_{\max}$ , минимальному —  $\sigma_{\min}$ , среднему —  $\sigma_m$

и амплитуде цикла —  $\sigma_a$ ), указаны на рис. 13.3. Связь между этими напряжениями выражается следующими зависимостями:

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2}; \quad (13.1)$$

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2}; \quad (13.2)$$

$$\sigma_{\max} = \sigma_m + \sigma_a; \quad (13.3)$$

$$\sigma_{\min} = \sigma_m - \sigma_a. \quad (13.4)$$

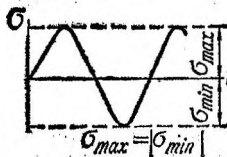


РИС. 13.2

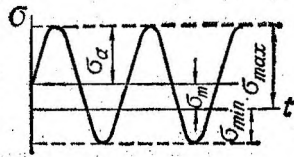


РИС. 13.3

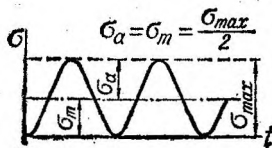


РИС. 13.4

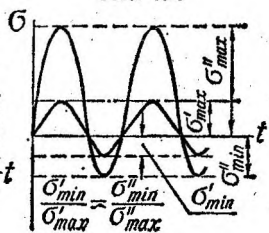


РИС. 13.5

В случае возникновения переменных касательных напряжений сохраняются те же соотношения, т. е.

$$\tau_m = \frac{\tau_{\max} + \tau_{\min}}{2}$$

и т. д.

Частный случай асимметричного цикла, для которого  $\sigma_{\min} = 0$  (или соответственно  $\tau_{\min} = 0$ ), называют *опылевым* (или *пульсирующим*); соответствующий график представлен на рис. 13.4).

Отношение минимального напряжения цикла к максимальному называют *коэффициентом асимметрии цикла*:

$$R_\sigma = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}}; \quad (13.5)$$

аналогично для касательных напряжений

$$R_\tau = \frac{\tau_{\min}}{\tau_{\max}}. \quad (13.5a)$$

В тех случаях, когда отсутствие индекса при  $R$  не может привести к недоразумениям, индекс опускают.

Отношение амплитуды цикла к среднему напряжению называют *характеристикой цикла*:

$$\rho_{\sigma} = \frac{\sigma_a}{\sigma_m}; \quad (13.6)$$

$$\rho_{\tau} = \frac{\tau_a}{\tau_m}. \quad (13.6a)$$

Между характеристикой цикла и его коэффициентом асимметрии существует следующее соотношение:

$$\rho = \frac{1-R}{1+R}. \quad (13.7)$$

Циклы, имеющие одинаковый коэффициент асимметрии, а следовательно, и одинаковую характеристику, называют *подобными* (рис. 13.5).

Постоянные напряжения можно рассматривать как частный случай цикла переменных напряжений, для которого  $R = +1$  ( $\rho = 0$ ). Для симметричного цикла  $R = -1$  ( $\rho = \infty$ ) и для отнулевого (при  $\sigma_m$  положительном)  $R = 0$  ( $\rho = 1$ ).

### § 13.2. КРИВАЯ ВЫНОСЛИВОСТИ И РАЗЛИЧНЫЕ ФАКТОРЫ, ВЛИЯЮЩИЕ НА ВЕЛИЧИНУ ПРЕДЕЛА ВЫНОСЛИВОСТИ

Многочисленными опытами установлено, что при переменных напряжениях разрушение происходит при значениях  $\sigma_{\max}$  меньших предела прочности, а во многих случаях даже меньших предела текучести данного материала.

Для ряда конструкционных материалов, в частности для многих сталей, при данном виде деформации (изгибе, кручении и т. д.) существует такое наибольшее (предельное) максимальное напряжение цикла, при котором образец выдерживает, не разрушаясь, неограниченное число циклов. Это напряжение называют *пределом выносливости* ( $\sigma_R$ ).<sup>1</sup>

Для мало- и среднеуглеродистой стали можно считать, что образец, выдерживающий при данном максимальном напряжении  $N_{\text{баз}} = 10^7$  циклов (*базовое* число циклов), не разрушится и при сколь угодно большом числе циклов.

График, показывающий зависимость максимального напряжения, при котором происходит разрушение образца, от числа циклов, называется *кривой выносливости* или *кривой усталости* (кривой Вёлера). На рис. 13.6 показан примерный характер двух таких кривых для стали. Нижняя кривая соответствует симметричному, а верхняя — отнулевому (пульсирующему) циклу изгиба.

<sup>1</sup> В технической и учебной литературе встречается также наименование «предел усталости». Взамен приведенного обозначения применяют  $\sigma_{\rho}$ , соответствующее ранее принятому обозначению коэффициента асимметрии цикла  $\rho$ .

В большинстве случаев на выносливость испытывают образцы малого диаметра ( $5 \div 10$  мм), имеющие строго цилиндрическую форму и полированную поверхность. Для определения предела выносливости испытывают серию не менее чем из 10 совершенно одинаковых образцов и по результатам испытаний строят кривую выносливости. Ордината ее горизонтального участка дает предел выносливости.

Для некоторых материалов (в частности, для большинства легированных сталей и сплавов цветных металлов) кривая выносливости не имеет горизонтального участка, т. е. в указанных случаях понятие «предел выносливости» неприменимо. Для этих материалов роль предельного напряжения при расчетах на усталостную прочность играет предел *ограниченной выносливости* — наибольшее значение

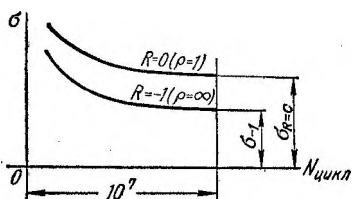


РИС. 13.6

максимального напряжения цикла, которое материал выдерживает, не разрушаясь, при некотором числе циклов (базовом числе циклов  $N_{баз}$ ). Так, для легированных сталей обычно  $N_{баз} = 25 \cdot 10^7$ ; для сплавов цветных металлов  $N_{баз} = (5 \div 50) \cdot 10^7$ .

Предел выносливости, полученный в результате испытания стандартных лабораторных образцов, может рассматриваться как механическая характеристика данного материала. Этот предел выносливости зависит от вида деформации (изгиб, кручение и т. д.) и характера цикла (симметричный, отнулевой и т. д.). Наименьшее значение имеет предел выносливости при симметричном цикле ( $\sigma_{-1}$  — при симметричном цикле изгиба,  $\sigma_{-1p}$  — то же растяжения-сжатия,  $\tau_{-1}$  — то же кручения).

Зависимость предела выносливости (при симметричном цикле изменения напряжений) от вида деформации характеризуется следующими данными:

$$\sigma_{-1p} \approx (0,7 \div 0,9) \sigma_{-1}; \quad (13.8)$$

$$\tau_{-1} \approx (0,55 \div 0,60) \sigma_{-1}. \quad (13.9)$$

Подавляющее большинство экспериментальных данных относится к пределу выносливости при симметричном цикле изгиба, так как соответствующие испытания осуществляются наиболее просто. Справочные данные по величинам пределов выносливости для ряда конструкционных материалов приведены в таблицах гл. 2. При отсутствии экспериментально полученных величин пределов выносливости их вычисляют приближенно по известным механическим характеристикам, полученным при статических испытаниях образцов из данного материала. При этом применяют следующие эмпирические соотношения:

для углеродистой стали

$$\sigma_{-1} \approx 0,43 \sigma_{пч}; \quad (13.10)$$

для легированной стали

$$\sigma_{-1} \approx 0,35\sigma_{\text{пч}} + 10 \text{ кг/мм}^2; \quad (13.11)$$

для чугуна

$$\sigma_{-1} \approx 0,45\sigma_{\text{пч. р.}} \quad (13.12)$$

В приведенных зависимостях  $\sigma_{\text{пч}}$  (для чугуна  $\sigma_{\text{пч. р.}}$ ) — предел прочности при растяжении.

Зависимость предела выносливости от вида цикла<sup>1</sup> (коэффициента асимметрии) в известной мере характеризуется взаимным расположением кривых выносливости, показанных на рис. 13.6.

Для получения полной картины зависимости предела выносливости от коэффициента асимметрии (характеристики) цикла строят так называемую *диаграмму предельных амплитуд*. Примерный вид такой диаграммы для циклов со средними растягивающими напряжениями показан на рис. 13.7. Для определения по экспериментально полученной диаграмме предела выносливости  $\sigma_R$  при цикле с коэф-

фициентом асимметрии  $R$  (с характеристикой  $\rho = \frac{1-R}{1+R}$ ) следует провести из начала координат луч под углом  $\theta = \arctg \rho = \arctg \frac{1-R}{1+R}$  к оси абсцисс. Сумма абсциссы ( $\bar{\sigma}_m$ )<sup>2</sup> и ординаты ( $\bar{\sigma}_a$ ) точки  $L$ , полученной в пересечении этого луча с диаграммой, дает величину предела выносливости

$$\sigma_R = \bar{\sigma}_{\text{max}} = \bar{\sigma}_m + \bar{\sigma}_a.$$

Для экспериментального получения абсциссы и ординаты каждой точки указанной диаграммы (кроме точки  $B$ , абсцисса которой равна пределу прочности и определяется в результате статических испытаний) необходимо испытать целую серию образцов. Следовательно, построение диаграмм предельных амплитуд по более или менее значительному числу точек связано с весьма длительными и дорогостоящими экспериментами. Поэтому обычно пользуются схематизированными диаграммами предельных амплитуд, построенными по двум или трем экспериментально полученным точкам. Вопрос о таких схематизированных диаграммах и об их использовании для расчетов на прочность кратко изложен в § 13.3.

Предел выносливости, полученный при испытаниях серий образцов, отличающихся от стандартных лабораторных образцов формой, абсолютными размерами и качеством поверхности, т. е. предел выносливости детали, ниже предела выносливости материала, из которого она изготовлена.

Связь между пределами выносливости конкретной детали и ее материала (т. е. малого лабораторного образца с полированной

<sup>1</sup> Согласно экспериментальным данным, закон изменения напряжений при данных соотношениях  $\sigma_{\text{max}}$  и  $\sigma_{\text{min}}$  практически не оказывает влияния на предел выносливости.

<sup>2</sup> Для максимального, среднего и амплитудного напряжений предельного цикла принимаем обозначения  $\bar{\sigma}_{\text{max}}$ ,  $\bar{\sigma}_m$  и  $\bar{\sigma}_a$ .



фициент характеризует снижение предела выносливости при симметричном цикле за счет наличия местных напряжений (очагов концентрации напряжений — отверстий, выточек, шпоночных канавок, ступенчатого изменения диаметра и т. п.). Он равен отношению предела выносливости, полученного при испытании образцов без концентрации напряжений, к пределу выносливости образцов того же размера, но имеющих заданный концентратор напряжений:

$$k_{\sigma} = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_{-1K}} \geq 1 \left( k_{\tau} = \frac{\tau_{-1}}{\tau_{-1K}} \geq 1 \right).$$

Сталь с более высокими механическими свойствами, в частности легированная, чувствительнее к концентрации напряжений, т. е. при одной и той же конфигурации детали  $k_{\sigma}$  ( $k_{\tau}$ ) для стали легированной выше, чем для обычной углеродистой.

Величины эффективных коэффициентов концентрации напряжений для некоторых распространенных концентраторов напряжений при различных случаях нагружения приведены в § 13.5.

Если в каком-либо сечении детали имеется сочетание нескольких источников концентрации напряжений, то при расчетах учитывают только тот из них, который дает наибольшую величину коэффициента  $K_{\sigma D}$  ( $K_{\tau D}$ ).

$\epsilon_{\sigma}$  ( $\epsilon_{\tau}$ ) — масштабный фактор, равный отношению предела выносливости детали диаметром  $d$  к пределу выносливости малого (диаметром 7 мм) лабораторного образца с такой же конфигурацией и состоянием поверхности, как у детали:

$$\epsilon_{\sigma} = \frac{\sigma_{-1d}}{\sigma_{-1}} \leq 1 \left( \epsilon_{\tau} = \frac{\tau_{-1d}}{\tau_{-1}} \leq 1 \right).$$

Зависимость масштабного фактора (коэффициента) от диаметра детали дана в табл. 13.8 (см. § 13.5).

$k_{\sigma}^{\Pi} = \frac{1}{\beta_{\sigma}}$  ( $k_{\tau}^{\Pi} = \frac{1}{\beta_{\tau}}$ ) — коэффициент качества поверхности, равный отношению предела выносливости полированного образца к пределу выносливости образца той же формы и размеров, имеющего заданное качество (чистоту) обработки поверхности:

$$k_{\sigma}^{\Pi} = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_{-1\Pi}} \geq 1 \left( k_{\tau}^{\Pi} = \frac{\tau_{-1}}{\tau_{-1\Pi}} \geq 1 \right).$$

Ориентировочные значения коэффициентов  $\beta_{\sigma} \approx \beta_{\tau} \approx \beta$  (которые тоже иногда называют коэффициентами качества поверхности) для различных видов обработки поверхности стальных деталей в зависимости от предела прочности приведены в § 13.5. Чувствительность стали к состоянию ее поверхности возрастает с увеличением прочности стали. Поэтому детали из легированных сталей требуют особой тщательной обработки.

В случае применения поверхностного упрочнения детали (обкатка роликами, обдувка дробью) или специальной термохимической обра-

ботки (азотирование или цементация зон концентрации напряжений) коэффициент  $\beta_\sigma$  ( $\beta_\tau$ ), называемый в этих случаях *коэффициентом поверхностного упрочнения*, больше единицы, т. е. предел выносливости выше, чем для полированного образца.

При этом общий коэффициент изменения предела выносливости при симметричном цикле определяют из выражения

$$K_{\sigma D} = \frac{k_\sigma}{\varepsilon_\sigma \beta_\sigma} \left( K_{\tau D} = \frac{k_\tau}{\varepsilon_\tau \beta_\tau} \right).$$

### § 13.3. СХЕМАТИЗИРОВАННЫЕ ДИАГРАММЫ ПРЕДЕЛЬНЫХ АМПЛИТУД И РАСЧЕТНЫЕ ФОРМУЛЫ

В подавляющем большинстве случаев расчеты на прочность при переменных напряжениях выполняют как проверочные — целью расчета является определение фактического коэффициента запаса прочности для опасного сечения (предположительно опасных сечений) рассчитываемой детали.

Проектный расчет на усталостную прочность может быть выполнен лишь весьма ориентировочно, так как обоснованный выбор (по приведенным в технической литературе экспериментальным данным) коэффициентов  $K_{\sigma D}$  и  $K_{\tau D}$ , входящих в расчетные формулы, возможен лишь на основе рабочего чертежа рассчитываемой детали.

Фактический коэффициент запаса прочности  $n$  сопоставляется с требуемым  $[n]$ , и условие прочности имеет вид

$$n \geq [n].$$

При достаточно точном определении действующих на деталь нагрузок, надежных данных о коэффициентах концентрации напряжений и механических свойствах материала детали достаточно иметь коэффициент запаса прочности  $[n] = 1,4 - 2$ . В случае особых требований к жесткости детали или ее особой ответственности требуемый коэффициент запаса возрастает до 3 и в отдельных специальных случаях до более высоких значений.

Для детали, работающей на изгиб при симметричном цикле изменения напряжений, коэффициент запаса прочности определяется из выражения

$$n_\sigma = \frac{\sigma_{-1д}}{\sigma_{\max}} = \frac{\sigma_{-1}}{K_{\sigma D} \sigma_{\max}}. \quad (13.14)$$

Аналогично при растяжении (сжатии)

$$n_\sigma = \frac{(\sigma_{-1р})_д}{\sigma_{\max}} = \frac{\sigma_{-1р}}{K_{\sigma D} \sigma_{\max}} \quad (13.14а)$$

и при кручении

$$n_\tau = \frac{\tau_{-1д}}{\tau_{\max}} = \frac{\tau_{-1}}{K_{\tau D} \tau_{\max}}. \quad (13.14б)$$



В общем случае при  $R \neq -1$  ( $\rho \neq \infty$ ) для определения коэффициента запаса прочности должен быть известен предел выносливости лабораторного образца  $\sigma_R$  при цикле напряжений, подобном рабочему циклу в опасной точке, проверяемой на прочность детали. Величина  $\sigma_R$  определяется из диаграммы предельных амплитуд (рис. 13.8), на которой дополнительно проведена линия  $DK$  (линия пределов текучести). Точки диаграммы, лежащие в области  $OACK$ , соответствуют безопасным циклам, для которых  $\sigma_{\max}$  меньше как предела выносливости  $\sigma_R$ , так и предела текучести  $\sigma_T$  (или  $\sigma_{0,2}$ ).

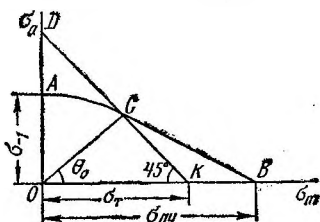


РИС. 13.8

Расчеты на прочность при переменных напряжениях, как правило, основаны на аппроксимации безопасной зоны диаграммы предельных амплитуд прямой линией, построенной по известным значениям  $\sigma_{-1}$  ( $\tau_{-1}$ ) и  $\sigma_0$  ( $\tau_0$ ). Таким образом, схематизированная диаграмма предельных амплитуд строится по известным значениям трех механических характеристик:  $\sigma_{-1}$ ,  $\sigma_0$ ,  $\sigma_T$  (или соответственно для кас-

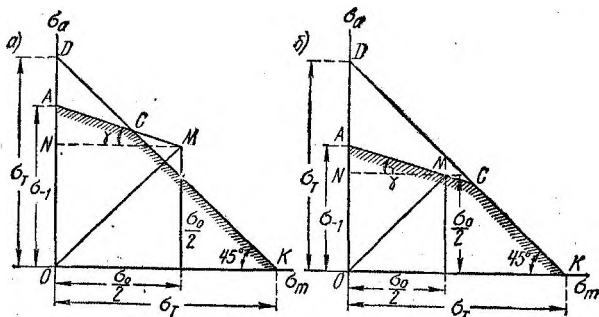


РИС. 13.9

тельных напряжений  $\tau_{-1}$ ,  $\tau_0$ ,  $\tau_T$ ) — и состоит из двух прямых линий  $AC$  и  $CK$  (рис. 13.9, а, б). Указанный прием схематизации рассматриваемой диаграммы и основанный на нем способ расчета на прочность носят название *метода Серенсена — Кинашвили*.

При несимметричных циклах напряжений поправочные коэффициенты  $K_{\sigma D}$  и  $K_{\tau D}$  относят только к амплитуде цикла ( $\sigma_a$  или  $\tau_a$ ). В предположении, что рабочий и предельный циклы напряжений для рассчитываемой детали подобны, коэффициенты запаса прочности определяют по следующим формулам:

при изгибе

$$n_{\sigma} = \frac{\sigma_{-1}}{K_{\sigma D} \sigma_a + \psi_{\sigma} \sigma_m}; \quad (13.15)$$

при растяжении (сжатии)

$$n_{\sigma} = \frac{\sigma_{-1\rho}}{K_{\sigma D} \sigma_a + \psi_{\sigma} \sigma_m}; \quad (13.16)$$

при кручении

$$n_{\tau} = \frac{\tau_{-1}}{K_{\tau D} \tau_a + \psi_{\tau} \tau_m}. \quad (13.17)$$

Безразмерный коэффициент  $\psi = \text{tg } \gamma$  (см. рис. 13.9, а и б) имеет следующие значения:

$$\psi_{\sigma} = \frac{2\sigma_{-1} - \sigma_0}{\sigma_0}; \quad (13.18)$$

$$\psi_{\tau} = \frac{2\tau_{-1} - \tau_0}{\tau_0}. \quad (13.18a)$$

Числовые значения коэффициентов  $\psi_{\sigma}$ ,  $\psi_{\tau}$  приведены в таблице 13.10.

Формулы (13.15) и (13.16) справедливы для циклов со средними растягивающими напряжениями (с положительными характеристиками  $\rho_{\sigma} \geq 0$ ). При циклах со средними сжимающими напряжениями ( $\sigma_m < 0$ ), для которых характеристика  $\rho_{\sigma} < 0$ , следует в этих формулах полагать  $\psi_{\sigma} = 0$ .

Во многих случаях, помимо коэффициента запаса прочности по отношению к пределу выносливости, определяют коэффициент запаса по сопротивлению малым пластическим деформациям (коэффициент запаса по отношению к пределу текучести). Для его определения служат следующие формулы:

$$h_{\sigma\tau} = \frac{\sigma_{\tau}}{\sigma_{\max}}; \quad (13.19)$$

$$n_{\tau\tau} = \frac{\tau_{\tau}}{\tau_{\max}}. \quad (13.20)$$

В тех случаях, когда оказывается, что коэффициент запаса по отношению к пределу выносливости выше, чем по отношению к пределу текучести, считают, что последний играет решающую роль в оценке надежности детали.

При расчете бруса на совместное действие изгиба и кручения, кручения и осевого нагружения или изгиба, кручения и осевого нагружения, т. е. в случаях, когда в опасной точке детали возникает упро-

шенное плоское напряженное состояние, коэффициент запаса прочности определяют из выражения

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{n_{\sigma}^2} + \frac{1}{n_{\tau}^2}, \quad (13.21)$$

или

$$n = \sqrt{\frac{n_{\sigma}^2 \cdot n_{\tau}^2}{n_{\sigma}^2 + n_{\tau}^2}}, \quad (13.22)$$

где  $n_{\sigma}$  и  $n_{\tau}$  — коэффициенты запаса прочности соответственно по нормальным и по касательным напряжениям.

При вычислении коэффициента запаса по отношению к пределу выносливости  $n_{\sigma}$  определяют по формуле (13.15) или (13.16), а  $n_{\tau}$  — по формуле (13.17). Коэффициент запаса по текучести находят, подставляя в формулу (13.21) или (13.22) значения  $n_{\sigma T}$  и  $n_{\tau T}$ , вычисленные по формулам (13.19), (13.20).

В практике расчета элементов машиностроительных конструкций встречаются случаи, когда при возрастании нагрузки изменяется характер цикла напряжений (изменяется коэффициент асимметрии). Иными словами, рабочий и предельный циклы напряжений оказываются не подобными, и приведенные выше формулы для определения коэффициентов запаса прочности не пригодны. Вид формулы для определения коэффициента запаса зависит от закона, по которому возможен (при возрастании нагрузки) переход от рабочего цикла к предельному. В частности, при расчете предварительно затянутых болтов с последующим осевым нагружением принимают, что минимальное напряжение цикла остается постоянным; коэффициент запаса прочности при  $\sigma_{\min} = \text{const}$

определяют по формуле (при  $-\sigma_{\min} \leq \frac{\sigma_{-1}}{K_{\sigma D}}$ )

$$n_{\sigma} = \frac{2\sigma_{-1} + (K_{\sigma D} - \psi_{\sigma}) \sigma_{\min}}{(K_{\sigma D} + \psi_{\sigma}) \sigma_{\max}}. \quad (13.23)$$

При  $-\sigma_{\min} > \frac{\sigma_{-1}}{K_{\sigma D}}$

$$n_{\sigma} = \frac{|\sigma_{\min}|}{\sigma_{\max}}. \quad (13.23a)$$

Возможен переход от рабочего цикла напряжений к предельному, при котором постоянным остается среднее напряжение цикла. Такую предпосылку иногда принимают при расчете на вынужденные колебания. Для определения коэффициента запаса прочности при  $\sigma_m = \text{const}$

служит формула (при  $\frac{\sigma_{-1}}{K_{\sigma D}} \geq \sigma_m > 0$ )

$$n_{\sigma} = \frac{\sigma_{-1} + (K_{\sigma D} - \psi_{\sigma}) \sigma_m}{K_{\sigma D} \sigma_{\max}}. \quad (13.24)$$

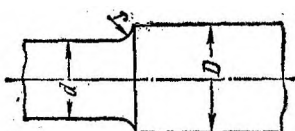
## § 13.4. СПРАВОЧНЫЕ ДАННЫЕ К РАСЧЕТАМ НА ВЫНОСЛИВОСТЬ

В табл. 13.1—13.6 приведены значения эффективных коэффициентов концентрации напряжений для некоторых распространенных концентраторов напряжений.

В табл. 13.7 даны значения моментов сопротивления и площадей для нетто-сечений валов с пазами (канавками) для одной стандартной призматической шпонки.

Таблица 13.1

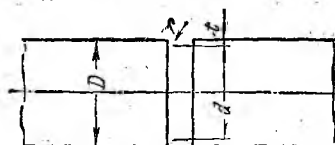
Эффективные коэффициенты концентрации напряжений  
для валов и осей с галтелями



$\frac{D}{d}$	$\frac{r}{d}$	Коэффициент концентрации напряжений при изгибе $k_\sigma$ для деталей из стали, имеющей $\sigma_{ПЧ}$ , кг/мм <sup>2</sup>			Коэффициент концентрации напряжений при кручении $k_\tau$ для деталей из стали, имеющей $\sigma_{ПЧ}$ , кг/мм <sup>2</sup>		
		<50	80	>100	<50	80	>100
1,05	0,02	1,70	1,88	2,05	1,24	1,29	1,33
	0,05	1,48	1,57	1,63	1,15	1,18	1,20
	0,10	1,28	1,33	1,36	1,08	1,10	1,12
	0,15	1,20	1,23	1,25	1,06	1,08	1,09
	0,20	1,16	1,20	1,22	1,05	1,06	1,07
1,1	0,02	2,0	2,24	2,47	1,40	1,52	1,62
	0,05	1,64	1,70	1,75	1,25	1,28	1,30
	0,10	1,37	1,42	1,45	1,12	1,16	1,18
	0,15	1,27	1,31	1,34	1,09	1,12	1,14
	0,20	1,20	1,24	1,27	1,06	1,08	1,10
1,25	0,02	2,12	2,68	3,10	1,64	1,73	1,80
	0,05	1,81	1,97	2,10	1,40	1,45	1,48
	0,10	1,47	1,54	1,60	1,20	1,27	1,32
	0,15	1,35	1,40	1,43	1,15	1,20	1,24
	0,20	1,30	1,32	1,34	1,09	1,13	1,16
1,5	0,02	2,42	—	—	1,76	1,97	2,14
	0,05	1,91	2,06	2,20	1,48	1,56	1,62
	0,10	1,53	1,61	1,67	1,24	1,32	1,38
	0,15	1,38	1,44	1,48	1,19	1,25	1,29
	0,20	1,33	1,36	1,38	1,10	1,18	1,24

Таблица 13.2

Эффективные коэффициенты концентрации напряжений  
для валов и осей с выточками

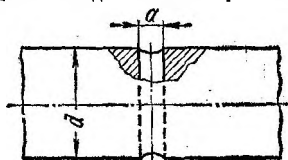


$\frac{t}{r}$	$\frac{r}{d}$	Коэффициент концентрации напряжений при изгибе $k_{\sigma}$ для деталей из стали, имеющей $\sigma_{\text{ПЦ}}, \text{ кг/мм}^2$			Коэффициент концентрации напряжений при кручении $k_{\tau}$ для деталей из стали, имеющей $\sigma_{\text{ПЦ}}, \text{ кг/мм}^2$		
		<50	80	>100	<50	80	>100
0,5	0,02	1,77	2,02	2,22	1,46	1,61	1,73
	0,05	1,72	1,87	1,98	1,43	1,52	1,60
	0,10	1,59	1,69	1,77	1,36	1,42	1,46
	0,15	1,45	1,53	1,59	1,27	1,32	1,36
	0,20	1,37	1,41	1,45	1,22	1,25	1,27
1,0	0,02	1,85	2,12	2,35	1,51	1,67	1,81
	0,05	1,80	1,96	2,10	1,48	1,58	1,66
	0,10	1,65	1,76	1,85	1,39	1,47	1,51
	0,15	1,50	1,58	1,65	1,30	1,35	1,39
	0,20	1,45	1,48	1,50	1,27	1,29	1,30
2,0	0,02	1,42	2,21	2,46	1,56	1,73	1,87
	0,05	1,86	2,03	2,19	1,51	1,62	1,71
	0,10	1,70	1,82	1,92	1,42	1,50	1,56
	0,15	1,54	1,63	1,70	1,33	1,33	1,42
	0,20	1,48	1,52	1,54	1,29	1,30	1,32

Примечание. Значения  $k_{\sigma}$  могут быть использованы также при расчетах на растяжение (сжатие).

Таблица 13.3

Эффективные коэффициенты концентрации напряжений  
для цилиндрических деталей с поперечными отверстиями



Характер нагрузки	$\frac{a}{d}$	Предел прочности материала вала $\sigma_{\text{ПЦ}}, \text{ кг/мм}^2$			
		50	60	80	100
Изгиб $k_{\sigma}$	0,05 ÷ 0,10	1,90	1,95	2,05	2,15
	0,15 ÷ 0,25	1,74	1,77	1,86	1,95
Кручение $k_{\tau}$	0,05 ÷ 0,25	1,75	1,78	1,83	1,92

Примечания: 1. Номинальные значения нормальных и касательных напряжений следует определять по нетто-сечению, вычисляя моменты сопротивления по формулам:

$$W_H \approx \frac{\pi d^3}{32} \left( 1 - 1,54 \frac{a}{d} \right);$$

$$W_K \approx \frac{\pi d^3}{16} \left( 1 - \frac{a}{d} \right).$$

2. Значения  $k_\sigma$  можно использовать при расчетах на растяжение (сжатие), вычисляя номинальные напряжения по площади нетто-сечения.

Таблица 13.4

Эффективные коэффициенты концентрации напряжений для валов и осей с одной и двумя шпоночными канавками

Характер нагрузки	Предел прочности материала вала $\sigma_{Пч}$ , кг/мм <sup>2</sup>					
	50	60	70	80	90	100
Изгиб $k_\sigma$	1,50	1,60	1,72	1,80	1,90	2,00
Кручение $k_\tau$	1,40	1,50	1,60	1,70	1,80	1,90

Примечание. Номинальные значения нормальных и касательных напряжений следует вычислять по нетто-сечению, определяя моменты сопротивления по формулам (см. также табл. 13.7):

при одной шпоночной канавке

$$W_H \approx \frac{\pi d^3}{32} - \frac{bt(d-t)^2}{2d};$$

$$W_K \approx \frac{\pi d^3}{16} - \frac{bt(d-t)^2}{2d};$$

при двух шпоночных канавках

$$W_H \approx \frac{\pi d^3}{32} - \frac{bt(d-t)^2}{d};$$

$$W_K \approx \frac{\pi d^3}{16} - \frac{bt(d-t)^2}{d}.$$

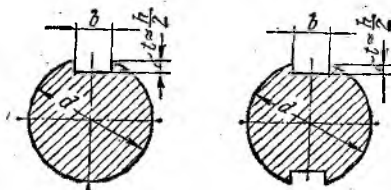


Таблица 13.5

Эффективные коэффициенты концентрации напряжений для шлицевых (зубчатых) участков валов [56]

Характер нагрузки	Предел прочности материала вала $\sigma_{ПЧ}$ , кг/мм <sup>2</sup>							
	40	50	60	70	80	90	100	120
Прямоугольные шлицы по ГОСТ 1139—53:								
	изгиб $k_{\sigma}$	1,35	1,45	1,55	1,60	1,65	1,70	1,75
	кручение $k_{\tau}$	2,10	2,25	2,35	2,45	2,55	2,65	2,80
Эвольвентные шлицы по ГОСТ 6033—51:								
	изгиб $k_{\sigma}$	1,35	1,45	1,55	1,60	1,65	1,70	1,75
	кручение $k_{\tau}$	1,40	1,43	1,46	1,49	1,52	1,58	1,60

Примечание. При пользовании данными табл. 13.5 моменты сопротивления для участков валов с прямобочными шлицами определяют по формулам:

$$W_H = \xi \frac{\pi d^3}{32};$$

$$W_K = 2W_H,$$

где  $d$  — внутренний диаметр;  $\xi$  — поправочный коэффициент, принимаемый по следующим данным:

серия шлицевого соединения  $\xi$

легкая 1,09—1,16

средняя 1,14—1,27

тяжелая 1,14—1,39

Меньшие значения  $\xi$  соответствуют большим  $d$ .

Для эвольвентных шлицевых соединений  $W_H$  и  $W_K$  следует определять, как для сплошного круглого сечения, диаметром, равным диаметру делительной окружности.

В табл. 13.8 даны значения масштабного фактора. На рис. 13.10 показаны графики значения коэффициента  $\beta_{\sigma} \approx \beta_{\tau} \approx \beta$  в зависимости от состояния и качества поверхности для различных величин  $\sigma_{ПЧ}$ : 1 — полирование; 2 — шлифование; 3 — тонкое точение; 4 — грубое точение; 5 — наличие окалины.

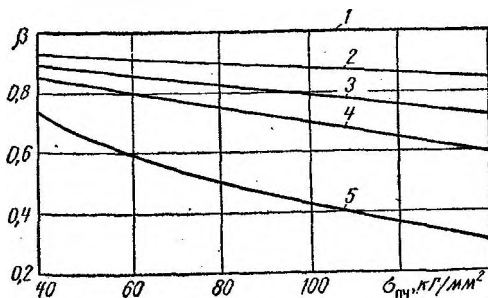


РИС. 13.10

Коэффициенты снижения предела выносливости при изгибе  $\left(\frac{k_{\sigma}}{\varepsilon_{\sigma}}\right)$  и при кручении  $\left(\frac{k_{\tau}}{\varepsilon_{\tau}}\right)$  для валов и осей  
у краев насаженных деталей [56]

Диаметр вала, мм	Посадка	Изгиб $\frac{k_{\sigma}}{\varepsilon_{\sigma}}$ при $\sigma_{пч}$ , кг/мм <sup>2</sup>						Кручение $\frac{k_{\tau}}{\varepsilon_{\tau}}$ при $\sigma_{пч}$ , кг/мм <sup>2</sup>					
		50	60	70	80	90	100	50	60	70	80	90	100
<30	Пр	2,50	2,75	3,00	3,25	3,50	3,75	1,90	2,05	2,20	2,35	2,50	2,65
	Н	1,88	2,06	2,25	2,44	2,63	2,82	1,58	1,64	1,75	1,86	1,98	2,09
	С	1,63	1,79	1,95	2,11	2,28	2,44	1,38	1,47	1,57	1,67	1,77	1,86
50	Пр	3,05	3,66	3,66	3,96	4,28	4,60	2,23	2,52	2,60	2,78	3,07	3,26
	Н	2,28	2,52	2,75	2,97	3,20	3,45	1,87	2,03	2,15	2,28	2,42	2,57
	С	1,98	2,18	2,38	2,57	2,78	3,00	1,60	1,71	1,83	1,95	2,07	2,20
>100	Пр	3,29	3,60	3,94	4,25	4,60	4,90	2,37	2,56	2,76	2,95	3,16	3,34
	Н	2,46	2,70	2,96	3,20	3,46	3,98	1,88	2,04	2,18	2,32	2,48	2,80
	С	2,13	2,34	2,56	2,76	3,00	3,18	1,68	1,83	1,94	2,06	2,20	2,31

Примечания: 1. Для посадки внутренних колец подшипников качения следует принимать значения  $\frac{k_{\sigma}}{\varepsilon_{\sigma}}$ ,  $\frac{k_{\tau}}{\varepsilon_{\tau}}$ , соответствующие прессовой посадке.

2. При посадке детали на вал (ось) со шпоночной канавкой номинальные напряжения следует определять по нетто-сечению и принимать большее из значений  $\frac{k_{\sigma}}{\varepsilon_{\sigma}}$   $\left(\frac{k_{\tau}}{\varepsilon_{\tau}}\right)$ , соответствующих влиянию посадки и шпоночной канавки. Значения моментов сопротивления нетто-сечений см. в табл. 13.4 и 13.7

3. Влияние концентрации напряжений от посадки детали должно учитываться при определении коэффициентов запаса для сечений валов (осей), совпадающих с краями насаженной детали (ступицы, кольца подшипника).



Т а б л и ц а 13.7

Моменты сопротивления и площади сечений валов, ослабленных пазом для одной стандартной шпонки  
(размеры в мм, моменты сопротивления в см<sup>3</sup>, площади в см<sup>2</sup>)

<i>d</i>	<i>b</i> × <i>h</i>	<i>W<sub>H</sub></i>	<i>W<sub>K</sub></i>	<i>F</i>	<i>d</i>	<i>b</i> × <i>h</i>	<i>W<sub>H</sub></i>	<i>W<sub>K</sub></i>	<i>F</i>	<i>d</i>	<i>b</i> × <i>h</i>	<i>W<sub>H</sub></i>	<i>W<sub>K</sub></i>	<i>F</i>
20	6×6	0,655	1,44	2,96	50	16×10	10,65	22,9	18,84	110	32×18	117,4	248	92,2
21		0,770	1,68	3,28	52		12,10	25,9	20,40	115		135,2	285	101,0
22		0,897	1,94	3,62	55		14,51	30,8	23,00	120		154,8	342	110,2
23		1,038	2,23	3,98	58		18×11	16,81	36,0	25,4		125	36×20	172,7
24		1,192	2,55	4,34	60	18,76		40,0	27,3	130	195,8	412		129,1
25		1,275	2,81	4,62	62	20,9		44,3	29,2	135	221	462		139,5
26	1,453	3,18	5,03	65	24,3	51,2		32,2	140	248	517	150,3		
28	8×7	1,855	4,01	5,88	68	20×12	27,5	58,4	35,1	145	40×22	272	571	160,7
30	2,320	4,97	6,79	70	30,2		63,8	37,3	150	303		634	172,3	
32	2,73	5,94	7,64	72	33,0		69,7	39,5	155	336		702	184,3	
34	3,33	7,19	8,68	75	37,6		79,0	43,0	160	372		774	196,7	
35	3,66	7,87	9,22	78	42,6		89,2	46,6	165	409		850	209,0	
36	4,01	8,59	9,78	80	24×14	44,7	95,0	48,6	170	450	932	223,0		
37	4,27	9,24	10,27	82		48,4	102,5	51,5	175	45×25	484	1010	235	
38	4,66	10,04	10,86	85		54,3	114,6	55,1	180		529	1101	249	
40	5,51	11,79	12,09	88		60,6	127,5	59,1	185		576	1198	263	
42	6,45	13,72	13,37	90		65,1	136,7	61,9	190		627	1300	278	
44	7,25	15,61	14,58	92	67,9	144,3	64,2	195	680		1408	293		
45	7,80	16,74	15,27	95	75,3	159,4	68,3	200	736	1521	309			
46	8,38	17,93	15,99	98	28×16	83,1	175,5	73,2	190					
47	8,98	19,17	16,72	100		88,7	186,9	76,3						
48	9,62	20,50	17,47	105		103,7	217,0	84,8						

Примечания: 1. Моменты сопротивления и площади вычислены для нетто-сечений, для которых определяются величины коэффициентов концентрации напряжений.

2. *b* и *h* — размеры сечения шпонки.

Минимальные значения  $\beta$  при различных способах поверхностного упрочнения деталей приводятся в табл. 13.9.

В табл. 13.10 даны значения коэффициентов  $\psi_{\sigma}$  и  $\psi_{\tau}$ , используемых при расчетах по методу Серенсена — Кинасошвили.

Таблица 13.8  
Значения масштабного фактора  $\epsilon_{\sigma} \approx \epsilon_{\tau}$  в зависимости от диаметра детали [54]

Материал	$d$ , мм							
	10	20	30	40	50	70	100	200
Углеродистая сталь $\sigma_{\text{ПЧ}} = 40 \div 50 \text{ кг/мм}^2$	0,98	0,92	0,88	0,85	0,82	0,76	0,70	0,63
Углеродистая и легированная сталь $\sigma_{\text{ПЧ}} = 50 \div 60 \text{ кг/мм}^2$	0,97	0,89	0,85	0,81	0,78	0,73	0,68	0,61
Легированная сталь $\sigma_{\text{ПЧ}} = 80 \div 120 \text{ кг/мм}^2$	0,95	0,86	0,81	0,77	0,74	0,69	0,65	0,59
Легированная сталь $\sigma_{\text{ПЧ}} = 120 \div 140 \text{ кг/мм}^2$	0,94	0,83	0,77	0,73	0,70	0,66	0,62	0,57

Таблица 13.9  
Минимальные значения коэффициента  $\beta$  при поверхностном упрочнении деталей [56]

Материал, способ поверхностного упрочнения и тип деталей	$\beta$
Углеродистая и легированная сталь; поверхностная закалка токами высокой частоты; деталь без концентраторов напряжений	1,2
То же с концентраторами напряжений	1,5
Сталь; азотирование; деталь без концентраторов напряжений	1,1
То же с концентраторами напряжений	1,3
Сталь малоуглеродистая; цементация; деталь без концентраторов напряжений	1,1
То же с концентраторами напряжений	1,2
Углеродистая и легированная сталь; обкатка роликами; деталь без концентраторов напряжений	1,1
То же с концентраторами напряжений	1,3
Углеродистые и легированные стали; обдувка дробью (независимо от наличия концентраторов напряжений)	1,1

Таблица 13.10  
Значения коэффициентов  $\psi_{\sigma}$ ,  $\psi_{\tau}$  используемых при расчетах по методу Серенсена — Кинасошвили

Материал	$\psi_{\sigma}$	$\psi_{\tau}$
Углеродистая сталь $\sigma_{\text{ПЧ}} = 32 \div 50 \text{ кг/мм}^2$	0,05	0
Углеродистая сталь $\sigma_{\text{ПЧ}} = 50 \div 75 \text{ кг/мм}^2$	0,1—0,15	0,05
Углеродистая и легированная сталь $\sigma_{\text{ПЧ}} = 70 \div 105 \text{ кг/мм}^2$	0,15—0,2	0,05—0,1
Легированная сталь $\sigma_{\text{ПЧ}} = 105 \div 145 \text{ кг/мм}^2$	0,25—0,3	0,1—0,15

§ 13.5. ПРИМЕРЫ РАСЧЕТОВ НА ПРОЧНОСТЬ ПРИ ПЕРЕМЕННЫХ НАПРЯЖЕНИЯХ

**Пример 13.1.** Определить коэффициенты запаса прочности для сечений I—I и II—II (рис. 13.11) оси ведомого колеса мостового крана.<sup>1</sup> Расчетная нагрузка, действующая на колесо,  $P = 10 \cdot 10^3$  кгГ. Материал оси — сталь 50 нормализованная; поверхность оси шлифованная.

**Решение.** В § 13.1 было показано, что при вращении оси, нагруженной постоянной силой, вызывающей изгиб оси, нормальные напряжения, возникающие в поперечных сечениях оси, изменяются во времени по симметричному циклу.

В рассматриваемом случае при вращении колеса крана ось также приводится во вращение, так как колесо соединено с осью посредством шпонки. Роликовые подшипники, служащие опорами оси, можно рас-

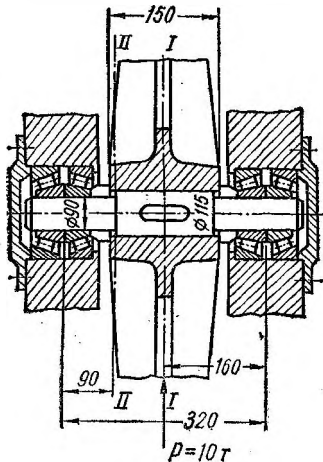


РИС. 13.11

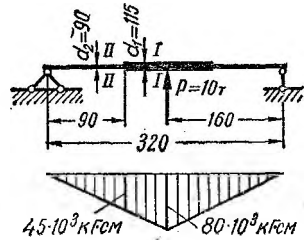


РИС. 13.12

считать как шарнирные опоры. Расстояние между опорами примем равным расстоянию между серединами подшипников; тогда расчетной схемой оси будет двухопорная балка ступенчато-переменного сечения, нагруженная посередине пролета сосредоточенной<sup>2</sup> силой (рис. 13.12).

Коэффициент запаса прочности определяем по формуле (13.14).  
Справочные данные для стали 50, необходимые для расчета, берем из табл. 2.3:

$$\sigma_{пч} \approx 70 \text{ кгГ/мм}^2; \sigma_{-1} = 31 \text{ кгГ/мм}^2 \text{ и } \sigma_T = 38 \text{ кгГ/мм}^2.$$

**Сечение I—I.** Эффективный коэффициент концентрации напряжений для оси со шпоночной канавкой определяем по табл. 13.4:  $k_\sigma = 1,72$ .

Масштабный коэффициент для  $d = d_1 = 115$  мм определяем по табл. 13.8:  $\epsilon_\sigma = 0,67$ .

<sup>1</sup> Данные примера заимствованы из книги Н. Г. Павлова «Примеры расчета кранов». М., 1954.

<sup>2</sup> Возможна расчетная схема, при которой сила, передающаяся от колеса на ось, рассматривается как нагрузка, равномерно распределенная по длине ступицы колеса (на участке длиной 140 мм).

Коэффициент качества для шлифованной поверхности  $\beta_\sigma = 0,92$  находим по кривой 2 на рис. 13.10; при этом  $k_\sigma^n = \frac{1}{\beta_\sigma} = \frac{1}{0,92} = 1,09$ .

Общий коэффициент снижения предела выносливости

$$K_{\sigma D}^I = \frac{k_\sigma + k_\sigma^n - 1}{\epsilon_\sigma} = \frac{1,72 + 1,09 - 1}{0,67} \approx 2,70.$$

Изгибающий момент в сечении I—I (см. эпюру на рис. 13.12)  $M_x^I = 80 \cdot 10^3 \text{ кг} \cdot \text{см}$ , а осевой момент сопротивления сечения, ослабленного шпоночной канавкой,  $W_{II} = 135,2 \text{ см}^3$  (см. табл. 13.7); номинальное напряжение

$$\sigma_{\text{max}}^I = \frac{M_x^I}{W_{II}} = \frac{80 \cdot 10^3}{135,2} = 592 \text{ кг/см}^2.$$

Коэффициент запаса прочности

$$n_I = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_{\text{max}} K_{\sigma D}} = \frac{3100}{592 \cdot 2,70} \approx 1,94.$$

Сечение II—II (ступенчатое изменение диаметра с переходной галтелью  $r = 3 \text{ мм}$ ). По табл. 13.1 для  $\frac{r}{a} = \frac{r}{d_1} = \frac{3}{90} \approx 0,0333$  и  $\frac{D}{d} = \frac{d_1}{d_2} = \frac{115}{90} \approx 1,28$ , интерполируя, находим:  $k_\sigma = 2,26$ ;  $\epsilon_\sigma = 0,69$  (см. табл. 13.8);  $k_\sigma^n = 1,09$ . При этом

$$K_{\sigma D}^{II} = \frac{k_\sigma + k_\sigma^n - 1}{\epsilon_\sigma} = \frac{2,26 + 1,09 - 1}{0,69} = 3,41.$$

Номинальное напряжение

$$\sigma_{\text{max}}^{II} = \frac{M_x^{II}}{\frac{\pi d_2^3}{32}} = \frac{45 \cdot 10^3}{\frac{3,14 \cdot 9^3}{32}} = 630 \text{ кг/см}^2.$$

Коэффициент запаса прочности

$$n_{II} = \frac{\sigma_{-1}}{K_{\sigma D}^{II} \sigma_{\text{max}}} = \frac{3100}{3,41 \cdot 630} \approx 1,44.$$

Таким образом, оказалось, что сечение II—II опаснее, чем I—I. Полученную величину  $n_{II}$  следует признать недостаточной. Для повышения коэффициента запаса можно, в частности, увеличить радиус переходной галтели. Если принять  $r = 10 \text{ мм}$ , то  $n_{II}$  возрастет до 2,14 (за счет уменьшения  $k_\sigma$  до 1,49).

**Пример 13.2.** Цилиндрический стержень с поперечным отверстием (рис. 13.13) изготовлен из стали 45 ( $\sigma_{\text{пч}} = 60 \text{ кг/мм}^2$ ,  $\sigma_{\text{T}} = 34 \text{ кг/мм}^2$ ,  $\sigma_{-1\text{p}} = 23 \text{ кг/мм}^2$ ) и работает на растяжение при нагрузке, изменяющейся по отнулевому (пульсирующему) циклу. Определить коэффициент запаса прочности для опасного сечения стержня, если  $P_{\text{max}} = 20 \times 10^3 \text{ кг}$ ,  $k_{\sigma} = 1,95$ ,  $\epsilon_{\sigma} = 0,75$ ;  $k_{\sigma}^{\text{II}} = 1,0$ .

Как изменится коэффициент запаса, если изготовить стержень из хромистой стали 40X ( $\sigma_{\text{пч}} = 100 \text{ кг/мм}^2$ ,  $\sigma_{\text{T}} = 80 \text{ кг/мм}^2$ ,  $\sigma_{-1\text{p}} = 30 \text{ кг/мм}^2$ )? В этом случае  $k_{\sigma} = 2,15$ ;  $\epsilon_{\sigma} = 0,71$ ,  $k_{\sigma}^{\text{II}} = 1,0$ .

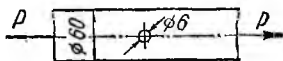


РИС. 13.13

**Решение.** Номинальное значение максимального напряжения для опасного сечения (проходящего через центр отверстия)

$$\sigma_{\text{max}} = \frac{P_{\text{max}}}{F_{\text{н}}} = \frac{20 \cdot 10^3}{\frac{3,14}{4} 6^2 - 0,6 \cdot 6} = 812 \text{ кг/см}^2.$$

При отнулевом цикле  $\sigma_a = \sigma_m = \frac{\sigma_{\text{max}}}{2} = 406 \text{ кг/см}^2$ .

Коэффициент запаса прочности определяем по формуле (13.15):

$$n_{\sigma} = \frac{\sigma_{-1\text{p}}}{K_{\sigma D} \sigma_a + \psi_{\sigma} \sigma_m} = \frac{2\sigma_{-1\text{p}}}{\sigma_{\text{max}} (K_{\sigma D} + \psi_{\sigma})}.$$

Для стержня из стали 45 (при  $k_{\sigma}^{\text{II}} = 1,0$ ):

$$K_{\sigma D} = \frac{k_{\sigma}}{\epsilon_{\sigma}} = \frac{1,95}{0,75} = 2,60;$$

$$\psi_{\sigma} = 0,13 \text{ (см. табл. 13.10);}$$

$$n_{\sigma} = \frac{2 \cdot 23}{8,12 (2,60 + 0,13)} \approx 2,08.$$

Коэффициент запаса по пределу текучести

$$n_{\sigma_{\text{T}}} = \frac{\sigma_{\text{T}}}{\sigma_{\text{max}}} = \frac{34}{8,12} \approx 4,18.$$

Для стержня из стали 40X:

$$K_{\sigma D} = \frac{k_{\sigma}}{\epsilon_{\sigma}} = \frac{2,15}{0,71} \approx 3,03;$$

$$\psi_{\sigma} = 0,19 \text{ (см. табл. 13.10);}$$

$$n_{\sigma} = \frac{2 \cdot 30}{8,12 (3,03 + 0,19)} \approx 2,29.$$

Коэффициент запаса по пределу текучести

$$n_{\sigma_T} = \frac{\sigma_T}{\sigma_{\max}} = \frac{80}{8,12} \approx 9,85.$$

Сопоставление полученных коэффициентов запаса прочности показывает, что при переменных напряжениях применение более качественной и дорогой легированной стали в данном случае нецелесообразно, так как дает очень незначительный эффект (повышение коэффициента запаса всего лишь на 10,1%); это объясняется большей чувствительностью легированной стали к влиянию концентрации напряжений и масштабного эффекта.

**Пример 13.3.** Ось рычага, изготовленная из стали 35, работает на изгиб под действием переменной силы  $P_{\max} = 3200 \text{ кг}$ ,  $P_{\min} = -1280 \text{ кг}$  (рис. 13.14).<sup>1</sup> Проверить прочность оси, если требуемый коэффициент запаса прочности  $[n_{\sigma}] = 2,4$ ,  $\sigma_{\text{пч}} = 60 \text{ кг/мм}^2$ ,  $\sigma_{-1} = 25 \text{ кг/мм}^2$ ,  $\sigma_T = 31 \text{ кг/мм}^2$ .

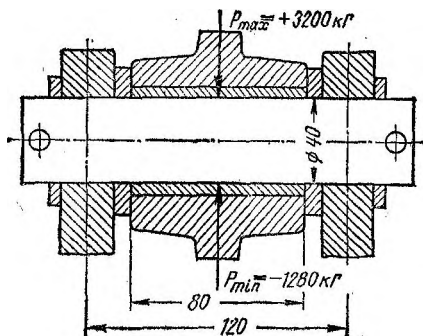


РИС. 13.14

**Решение.** При отсутствии концентраторов напряжений  $k_{\sigma} = 1,0$ ; по табл. 13.8 масштабный коэффициент  $\epsilon_{\sigma} = 0,81$ . Коэффициент качества поверхности по кривой 3 (см. рис. 13.10, тонкая обточка)  $\beta_{\sigma} = 0,88$  и  $k_{\sigma}^{\text{п}} = \frac{1}{\beta_{\sigma}} = \frac{1}{0,88} \approx 1,13$ .

<sup>1</sup> Чертеж к задаче и исходные данные взяты из книги С. И. Пенькова «Расчет допускаемых напряжений в машиностроении». Л., 1951.

При этом

$$K_{\sigma D} = \frac{k_{\sigma} + k_{\sigma}^{\text{II}} - 1}{\varepsilon_{\sigma}} = \frac{1 + 1,13 - 1}{0,81} \approx 1,4.$$

Примем расчетную схему, показанную на рис. 13.15. Там же дана эпюра изгибающих моментов. Максимальный изгибающий момент в среднем (опасном) сечении оси

$$\begin{aligned} \max M_x &= \frac{P_{\max}}{4} (l - 0,5l_0) = \\ &= \frac{3200}{4} (12 - 0,5 \cdot 8) = 6400 \text{ кг} \cdot \text{см}. \end{aligned}$$

Минимальный изгибающий момент в том же сечении

$$\begin{aligned} \min M_x &= \frac{P_{\min}}{4} (l - 0,5l_0) = \\ &= \frac{-1280}{4} (12 - 0,5 \cdot 8) = -2560 \text{ кг} \cdot \text{см}. \end{aligned}$$

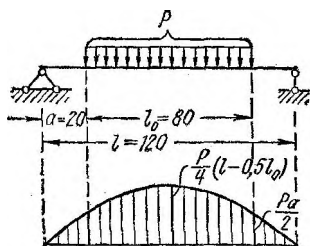


РИС. 13.15

Максимальное и минимальное напряжения (номинальные) в опасном сечении оси:

$$\sigma_{\max} = \frac{\max M_x}{\frac{\pi}{32} d^3} = \frac{32 \cdot 6400}{3,14 \cdot 4^3} = 1020 \text{ кг/см}^2;$$

$$\sigma_{\min} = \frac{\min M_x}{\frac{\pi}{32} d^3} = \frac{-32 \cdot 2560}{3,14 \cdot 4^3} = -408 \text{ кг/см}^2.$$

Среднее напряжение и амплитуда цикла:

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2} = \frac{1020 + (-408)}{2} = 306 \text{ кг/см}^2;$$

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} = \frac{1020 - (-408)}{2} = 714 \text{ кг/см}^2.$$

Коэффициент запаса прочности определяем по формуле (13.15):

$$n_{\sigma} = \frac{\sigma_{-1}}{K_{\sigma D} \sigma_a + \psi_{\sigma} \sigma_m},$$

где  $\psi_{\sigma} = 0,13$  (см. табл. 13.10);

$$n_{\sigma} = \frac{25}{1,40 \cdot 7,14 + 0,13 \cdot 3,06} \approx 2,40,$$

что равно требуемому.

**Пример 13.4.** Определить допускаемое значение максимального крутящего момента для вала (рис. 13.16), работающего на кручение. Материал вала — хромоникелевая сталь ( $\sigma_{\text{пц}} = 83 \text{ кг/мм}^2$ ,  $\tau_{\text{T}} = 38 \text{ кг/мм}^2$ ,  $\tau_{-1} = 21 \text{ кг/мм}^2$ ,  $\tau_0 = 36 \text{ кг/мм}^2$ ); требуемый коэффициент запаса прочности  $[n_{\tau}] = 2,0$ . Коэффициент асимметрии цикла  $R = \frac{\min M_{\text{к}}}{\max M_{\text{к}}} = 0,5$ ; поверхность вала чисто обточенная.

Решение. По табл. 13.1 при  $\frac{D}{d} = \frac{75}{60} = 1,25$  и  $\frac{r}{d} = \frac{5}{60} = 0,083$  находим  $k_{\tau} = 1,33$ .

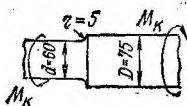


РИС. 13.16

Масштабный коэффициент определяем по табл. 13.8. Для  $d = 60 \text{ мм}$  при  $\sigma_{\text{пц}} = 83 \text{ кг/мм}^2$   $\epsilon_{\tau} = 0,71$ .

Коэффициент качества поверхности по кривой 3 на рис. 13.10  $\beta_{\tau} = 0,90$ , т. е.

$$k_{\tau}^{\text{п}} = \frac{1}{0,90} = 1,11$$

и

$$K_{\tau D} = \frac{k_{\tau} + k_{\tau}^{\text{п}} - 1}{\epsilon_{\tau}} = \frac{1,33 + 1,11 - 1}{0,71} \approx 2,03.$$

Выразим  $\tau_a$  и  $\tau_m$  через  $\tau_{\text{max}}$ . На основе формул (13.1), (13.2), (13.5) имеем:

$$\tau_m = \frac{\tau_{\text{max}} + R\tau_{\text{max}}}{2} = \frac{\tau_{\text{max}}(1 + R)}{2};$$

$$\tau_a = \frac{\tau_{\text{max}} - R\tau_{\text{max}}}{2} = \frac{\tau_{\text{max}}(1 - R)}{2}.$$

По формуле (13.17) при замене  $\tau_a$  и  $\tau_m$  через  $\tau_{\text{max}}$  получаем

$$n_{\tau} = \frac{2\tau_{-1}}{K_{\tau D}\tau_{\text{max}}(1 - R) + \psi_{\tau}\tau_{\text{max}}(1 + R)}.$$

Принимая  $n_{\tau} = [n_{\tau}]$ , находим допускаемое значение максимального касательного напряжения

$$[\tau_{\text{max}}] = \frac{2\tau_{-1}}{[n_{\tau}][K_{\tau D}(1 - R) + \psi_{\tau}(1 + R)]}.$$

Подставив сюда

$$\psi_{\tau} = \frac{2\tau_{-1} - \tau_0}{\tau_0} = \frac{2 \cdot 21 - 36}{36} \approx 0,167,$$



$R = 0,5$ ,  $K_{\tau D} = 2,03$ , получим

$$[\tau_{\max}] = \frac{2 \cdot 21}{2 [2,03 (1 - 0,5) + 0,167 (1 + 0,5)]} \approx 16,7 \text{ кг/мм}^2.$$

Допускаемое значение максимального крутящего момента

$$[\max M_k] = [\tau_{\max}] \frac{\pi d^3}{16} = 1670 \frac{3,14 \cdot 6^3}{16} = 71,0 \cdot 10^3 \text{ кг} \cdot \text{см}.$$

**Пример 13.5.**<sup>1</sup> Определить коэффициент запаса прочности клапанной пружины, изготовленной из хромованадиевой проволоки с характеристиками:  $\tau_T = 95 \text{ кг/мм}^2$ ,  $\tau_{-1} = 50 \text{ кг/мм}^2$ ,  $\tau_0 = 70 \text{ кг/мм}^2$ ,  $G = 8 \cdot 10^3 \text{ кг/мм}^2$ . Размеры пружины: средний диаметр  $D = 50 \text{ мм}$ , диаметр проволоки  $d = 4,5 \text{ мм}$ , рабочее число витков  $n = 6$ . Предварительная затяжка пружины  $\lambda_2 = 25 \text{ мм}$ ; наибольший ход клапана  $h = 14 \text{ мм}$ .

Решение. Максимальные напряжения в поперечном сечении витка определяются по формуле (6.47)

$$\tau_{\max} = k \frac{8PD}{\pi d^3}.$$

При индексе пружины  $c_n = \frac{D}{d} = \frac{50}{4,5} = 11$  поправочный коэффициент  $k = 1,12$  (см. график на рис. 6.27).

Осадка пружины определяется по формуле (6.50)

$$\lambda = \frac{8PD^3n}{Gd^4}.$$

Из формул для  $\tau$  и  $\lambda$  получаем

$$\tau = \frac{kGd}{\pi D^2n} \lambda.$$

Определяем  $\tau$  при закрытом клапане (это минимальное напряжение цикла):

$$\tau_{\min} = \frac{kGd}{\pi D^2n} \lambda_2 = \frac{1,12 \cdot 8 \cdot 10^3 \cdot 4,5}{3,14 \cdot 50^2 \cdot 6} 2,5 = 21,4 \text{ кг/мм}^2.$$

То же при наибольшем открытии клапана (это максимальное напряжение цикла), когда

$$\lambda_{\max} = \lambda_2 + h = 25 + 14 = 39 \text{ мм};$$

$$\tau_{\max} = \tau_{\min} \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_2} = 21,4 \cdot \frac{39}{25} = 33,4 \text{ кг/мм}^2.$$

<sup>1</sup> Условие задачи взято из книги «Прочность в машиностроении». Сб. статей под ред. докт. техн. наук, проф. С. Д. Пономарева. М., 1951.

Среднее напряжение цикла

$$\tau_m = \frac{\tau_{\max} + \tau_{\min}}{2} = \frac{33,4 + 21,4}{2} = 27,4 \text{ кг/мм}^2.$$

Амплитуда цикла

$$\tau_a = \frac{\tau_{\max} - \tau_{\min}}{2} = \frac{33,4 - 21,4}{2} = 6,0 \text{ кг/мм}^2.$$

Коэффициент запаса прочности по сопротивлению усталостному разрушению определяем по формуле (13.17):

$$n = \frac{\tau_{-1}}{K_{\tau D} \tau_a + \psi_{\tau} \tau_m}.$$

Коэффициент  $K_{\tau D} = 1$ , так как величина предела выносливости определена на образцах того же диаметра и с тем же состоянием поверхности, что и проволока, из которой изготовлена пружина.

По схематизированной диаграмме Серенсена — Кинасовили

$$\psi_{\tau} = \frac{2\tau_{-1} - \tau_0}{\tau_0} = \frac{2 \cdot 50 - 70}{70} = 0,428$$

и коэффициент запаса

$$n = \frac{50}{1 \cdot 6,0 + 0,428 \cdot 27,4} = 2,82.$$

Коэффициент запаса по текучести

$$n_{\tau} = \frac{\tau_{\tau}}{\tau_{\max}} = \frac{95}{33,4} = 2,84.$$

**Пример 13.6.** Вал цилиндрической зубчатой передачи (редуктора) получает от электродвигателя мощность  $N = 28 \text{ кВт}$  при угловой скорости  $n = 735 \text{ об/мин}$ . Чертеж вала дан на рис. 13.17. В зацеплении насаженной на валу шестерни с зубчатым колесом (на чертеже не показано) возникают усилия: окружное  $P$  и радиальное  $T = 0,364P$ .

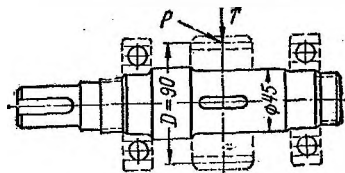


РИС. 13.17

Определить коэффициент запаса прочности для опасного сечения вала. Материал вала — сталь 45 с механическими характеристиками:  $\sigma_{\text{пч}} = 60 \text{ кг/мм}^2$ ;  $\sigma_{\tau} = 32 \text{ кг/мм}^2$ ;  $\sigma_{-1} = 25 \text{ кг/мм}^2$ .

При расчете принять, что нормальные напряжения изгиба изменяются по симметричному циклу, а касательные напряжения кручения — по отнулевому (пульсирующему).

Решение. Расчетная схема вала показана на рис. 13.18. Сила  $T$  вызывает изгиб вала в плоскости  $yOz$ , сила  $P$  — в плоскости  $xOz$ , кроме того, при переносе силы  $P$  на ось вала получаем скручивающий момент  $m = P \frac{D}{2}$ .

Шариковые подшипники могут рассматриваться как шарнирные опоры. Крутящий момент возникает в поперечных сечениях левой части вала — от входного конца до среднего сечения шестерни. На левом конце вала показан момент, передаваемый от электродвигателя. Определим его величину:

$$m = 97\,380 \frac{N}{n} = 97\,380 \frac{28}{735} = 3700 \text{ кг} \cdot \text{см}.$$

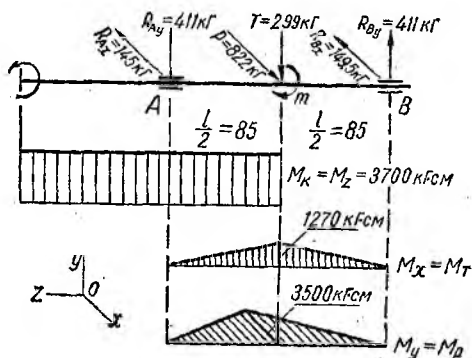


РИС. 13.18

Усилия, возникающие в зацеплении:

$$P = \frac{2m}{D} = \frac{2 \cdot 3700}{9} = 822 \text{ кг};$$

$$T = 0,364P = 0,364 \cdot 822 = 299 \text{ кг}.$$

Изгибающие моменты в опасном сечении вала (под серединой шестерни):

$$M_x = \frac{Tl}{4} = \frac{299 \cdot 17}{4} = 1270 \text{ кг} \cdot \text{см};$$

$$M_y = \frac{Pl}{4} = \frac{822 \cdot 17}{4} = 3500 \text{ кг} \cdot \text{см}.$$

Результирующий изгибающий момент в опасном сечении

$$M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2} = \sqrt{1270^2 + 3500^2} = 3720 \text{ кг} \cdot \text{см}.$$

Номинальное значение максимального напряжения изгиба

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{W_{\text{н}}} = \frac{3720}{7,8} = 477 \text{ кг/см}^2.$$

Номинальное значение максимального касательного напряжения (от кручения)

$$\tau_{\max} = \frac{M_{\text{к}}}{W_{\text{к}}} = \frac{3700}{16,74} = 221 \text{ кг/см}^2.$$

Значения  $W_{\text{н}}$  и  $W_{\text{к}}$  взяты из табл. 13.7 при сечении шпонки  $b \times h = 14 \times 9 \text{ мм}$ .

По табл. 13.4, 13.8 и рис. 13.10 находим:  $k_{\sigma} = 1,60$ ;  $k_{\tau} = 1,50$ ;  $\epsilon_{\sigma} = \epsilon_{\tau} = 0,80$ ;  $\beta_{\sigma} = \beta_{\tau} = 0,92$  (для шлифованной поверхности) и

$$k_{\sigma}^{\text{п}} = k_{\tau}^{\text{п}} = \frac{1}{0,92} \approx 1,09.$$

Общие коэффициенты снижения предела выносливости

$$K_{\sigma D} = \frac{k_{\sigma} + k_{\sigma}^{\text{п}} - 1}{\epsilon_{\sigma}} = \frac{1,60 + 1,09 - 1}{0,80} = 2,12;$$

$$K_{\tau D} = \frac{k_{\tau} + k_{\tau}^{\text{п}} - 1}{\epsilon_{\tau}} = \frac{1,50 + 1,09 - 1}{0,80} = 1,98.$$

Коэффициент запаса прочности по нормальным напряжениям по формуле (13.14)

$$n_{\sigma} = \frac{\sigma_{-1}}{K_{\sigma D} \sigma_{\max}} = \frac{2500}{2,12 \cdot 477} = 2,47.$$

Предел выносливости при симметричном цикле кручения для малого лабораторного образца находим по данным, приведенным на стр. 394:

$$\tau_{-1} \approx 0,58 \sigma_{-1} = 0,58 \cdot 25 \approx 15 \text{ кг/мм}^2.$$

По табл. 13.10  $\psi_{\tau} = 0,05$ .

Коэффициент запаса по касательным напряжениям

$$\begin{aligned} n_{\tau} &= \frac{\tau_{-1}}{K_{\tau D} \tau_a + \psi_{\tau} \tau_m} = \frac{\tau_{-1}}{K_{\tau D} \frac{\tau_{\max}}{2} + \psi_{\tau} \frac{\tau_{\max}}{2}} = \\ &= \frac{15}{1,98 \frac{2,21}{2} + 0,05 \frac{2,21}{2}} = 6,69. \end{aligned}$$

Общий коэффициент запаса прочности по усталостному разрушению

$$n = \sqrt{\frac{n_{\sigma}^2 n_{\tau}^2}{n_{\sigma}^2 + n_{\tau}^2}} = \sqrt{\frac{2,47^2 \cdot 6,69^2}{2,47^2 + 6,69^2}} = 2,29.$$

Такой коэффициент запаса прочности достаточен. Определим коэффициент запаса по отношению к пределу текучести:

$$n_{\sigma_T} = \frac{\sigma_T}{\sigma_{\max}} = \frac{32}{4,77} = 6,71;$$

$$n_{\tau_T} = \frac{\tau_T}{\tau_{\max}} = \frac{18,5}{2,21} = 8,37,$$

где  $\tau_T \approx 0,58 \sigma_T = 0,58 \cdot 32 = 18,5 \text{ кг/мм}^2$ ;

$$n_T = \sqrt{\frac{n_{\sigma_T}^2 n_{\tau_T}^2}{n_{\sigma_T}^2 + n_{\tau_T}^2}} = \sqrt{\frac{6,71^2 \cdot 8,37^2}{6,71^2 + 8,37^2}} = 5,22.$$

## ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ В СОПРОТИВЛЕНИИ МАТЕРИАЛОВ

К задачам динамики в сопротивлении материалов относят:

- а) расчеты элементов конструкций с учетом сил инерции;
- б) расчеты на действие ударных нагрузок;
- в) расчеты при колебаниях.

Здесь приведены сведения лишь о первых двух видах расчетов.

### § 14.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ ПРИ ЗАДАННЫХ УСКОРЕНИЯХ

Ускорения и связанные с ними силы инерции возникают в элементах конструкции при неравномерном их движении или при равномерном, в случае, если траектории отдельных точек рассчитываемого элемента криволинейны.

При больших ускорениях силы инерции могут достигать значительных величин, и их необходимо учитывать при расчетах на прочность и жесткость.

Метод расчета при заданных ускорениях базируется на известном из курса теоретической механики принципе Д'Аламбера: если в любой момент времени к каждой материальной точке данной системы приложить силу инерции этой точки, то эти силы инерции будут уравновешиваться заданными силами, действующими на систему, и реакциями связей, т. е. система может рассматриваться как находящаяся в состоянии равновесия. Применение метода кинестатики (принципа Д'Аламбера) дает возможность свести задачу динамики к задаче статики.

*Сила инерции материальной точки равна произведению массы точки на ее ускорение и направлена в сторону, противоположную ускорению.*

Методика расчета на прочность с учетом инерционных нагрузок показана на ряде конкретных примеров.

**Пример 14.1.** Определить напряжения, возникающие в поперечном сечении стального троса при подъеме груза  $P$  с постоянным ускорением  $a$  (рис. 14.1, а). Объемный вес (удельная сила тяжести) троса  $\gamma$ .

**Решение.** Разрезаем трос произвольным поперечным сечением и отбрасываем верхнюю часть, заменив ее действие на нижнюю продольной силой  $N$  (рис. 14.1, б).

Сила инерции  $P_{ин}$  рассматриваемой части направлена вниз (в сторону, противоположную ускорению), ее величина определяется из выражения

$$P_{ин} = ma = \frac{P + \gamma Fz}{g} a,$$

где  $m$  — масса груза и части троса, расположенной ниже проведенного сечения.

Составив уравнение равновесия  $\Sigma Z = 0$  для оставленной части, определим продольную силу в поперечном сечении троса:

$$N = (P + \gamma Fz) \left( 1 + \frac{a}{g} \right). \quad a)$$

Напряжение в рассматриваемом сечении троса

$$\sigma = \frac{N}{F} = \frac{P + \gamma Fz}{F} \left( 1 + \frac{a}{g} \right).$$

При отсутствии ускорения ( $a = 0$ ) статическое напряжение в поперечном сечении троса

$$\sigma_c = \frac{P + \gamma Fz}{F},$$

следовательно,

$$\sigma = \sigma_c \left( 1 + \frac{a}{g} \right) = \sigma_c k_d,$$

где  $k_d = 1 + \frac{a}{g}$  — динамический коэффициент.

При равноускоренном движении  $\sigma > \sigma_c$ , а при равнозамедленном  $\sigma < \sigma_c$ .

При свободном падении груза  $a = -g$  и напряжение в тросе  $\sigma = 0$ .

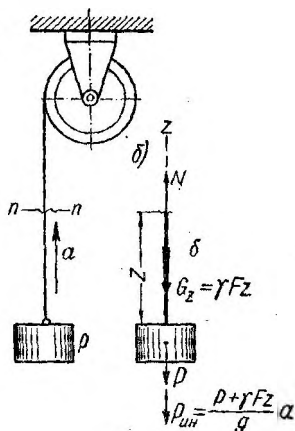


РИС. 14.1

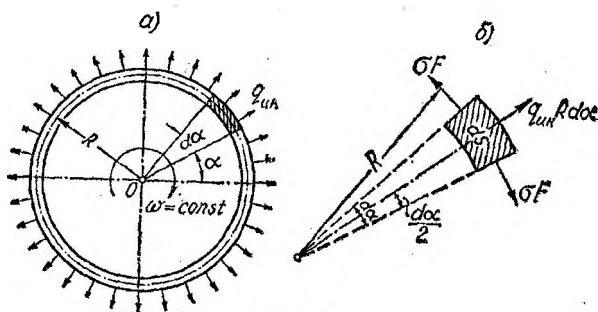


РИС. 14.2

**Пример 14.2.** Определить напряжение в поперечном сечении тонкого кругового кольца, вращающегося в своей плоскости с постоянной угловой скоростью  $\omega$  относительно оси, проходящей через центр кольца (рис. 14.2, а).

**Решение.** При равномерном вращении кольца нормальное ускорение каждой его точки  $a = a_n = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R$  направлено к центру, а силы инерции равномерно распределены по окружности кольца и направлены по радиусам от центра — центробежные силы инерции.

Сила инерции, приходящаяся на единицу длины кольца (интенсивность сил инерции),

$$q_{\text{ин}} = \frac{\gamma F \cdot 1}{g} a = \frac{\gamma F}{g} \omega^2 R,$$

где  $F = \text{const}$  — площадь поперечного сечения кольца.

Двумя смежными радиальными сечениями вырезаем из кольца элемент (рис. 14.2, б), к которому приложены внутренние силы  $\sigma F$ , заменяющие действие отброшенных частей кольца. Эти силы уравновешиваются с силой инерции  $q_{\text{ин}} R d\alpha$ .

Проектируя все силы на направление силы инерции, получаем

$$q_{\text{ин}} R d\alpha - 2\sigma F \sin \frac{d\alpha}{2} = 0.$$

Приняв  $\sin \frac{d\alpha}{2} = \frac{d\alpha}{2}$ , найдем

$$\sigma = \frac{q_{\text{ин}} R}{F} = \frac{\gamma}{g} \omega^2 R^2 = \frac{\gamma}{g} v^2.$$

Таким образом, для вращающегося кольца из данного материала величина напряжений зависит только от окружной скорости. Напряжения в стальном кольце ( $\gamma = 7,85 \text{ Г/см}^3$ ) при различных окружных скоростях следующие:

$v, \text{ м/сек}$	30	60	90	120	150	180	240
$\sigma, \text{ кг/см}^2$	72	288	650	1150	1800	2600	4600

**Пример 14.3.** Копер, применяемый для испытания материалов на удар, состоит из маятника  $CD$ , который может вращаться вокруг горизонтальной оси  $AB$ . Перед испытанием маятник ставят в положение, близкое к изображенному на рис. 14.3, и заставляют его падать под действием силы тяжести. Определить величину наибольших нормальных напряжений, возникающих в оси  $AB$  от изгиба, с учетом сил инерции маятника. Дано:  $P = 25 \text{ кг}$ ,  $r = 0,75 \text{ м}$ ,  $l = 0,25 \text{ м}$ ,  $d = 2 \text{ см}$ . Собственным весом стержня  $CD$  и оси  $AB$  пренебречь. Угол  $\alpha$  принять равным нулю.

**Решение.** Наибольшие напряжения в оси возникают в тот момент, когда груз  $P$  занимает наинизшее положение. В этом случае максимальное центростремительное ускорение  $a_n = \frac{v^2}{r}$  направлено вверх, а центробежная сила инерции  $P_{\text{ин}} = \frac{mv^2}{r}$  направлена вниз и складывается с весом груза  $P$ .



Применяя для груза  $P$  закон кинетической энергии, имеем

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = A = PH = P \cdot 2r.$$

$v_0 = 0$ ;  $A = PH = P \cdot 2r$ , так как работа силы тяжести не зависит от формы траектории и равна произведению веса тела на величину вертикального перемещения центра тяжести.

Следовательно,  $\frac{mv^2}{2} = P \cdot 2r$  и  $P_{ин} = \frac{mv^2}{r} = 4P$ .

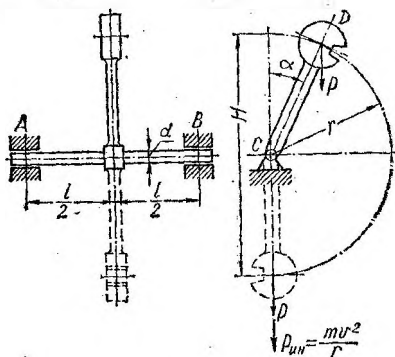


РИС. 14.3

Наибольшее усилие, действующее на ось,

$$P_1 = P + P_{ин} = P + 4P = 5P.$$

Наибольший изгибающий момент

$$M_{\max} = \frac{P_1 l}{4} = \frac{5Pl}{4}.$$

Максимальное нормальное напряжение в поперечном сечении оси

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} = \frac{\frac{5Pl}{4}}{\frac{\pi d^3}{32}} = \frac{40Pl}{\pi d^3}.$$

Подставив числовые данные, получим

$$\sigma_{\max} = \frac{40 \cdot 25 \cdot 25}{3,14 \cdot 2^3} \approx 1000 \text{ кг/см}^2.$$

**Пример 14.4.** Для равномерно вращающегося стального валика и жестко соединенного с ним ломаного стержня того же диаметра (рис. 14.4, а) требуется:

1) определить силы инерции, действующие на горизонтальном и вертикальном участках ломаного стержня при вращении валика;

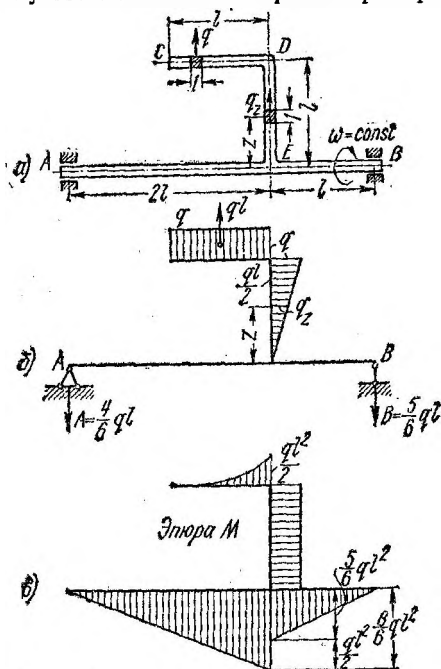


РИС. 14.4

2) построить эпору изгибающих моментов для валика и стержня от действия сил инерции; собственный вес валика и стержня не учитывать;

3) подобрать диаметр валика из условия прочности.

Дано:

$$l = 40 \text{ см}; [\sigma] = 1000 \text{ кг/см}^2; \gamma = 7,8 \text{ Г/см}^3;$$

$$n = 220 \text{ об/мин} \left( \omega = \frac{\pi n}{30} = \frac{3,14 \cdot 220}{30} \approx 23,1 \text{ рад/сек} \right).$$

Решение. 1. Интенсивность инерционной нагрузки:

а) для горизонтального стержня

$$q_{\text{ин}} = q = ma_2 = \frac{\gamma F \cdot l}{g} \omega^2 l = \text{const};$$

б) для вертикального стержня

$$q_z = ma_n = \frac{\gamma F \cdot l}{g} \omega^2 z;$$

при  $z = 0$   $q_z = 0$ ; при  $z = l$   $q_z = q$ .

Эюра инерционной нагрузки дана на рис. 14.4, б. Отрезки ее, перпендикулярные к оси каждого из стержней, дают величины интенсивности нагрузки. Направления сил инерции указаны на рис. 14.4, б — силы инерции направлены перпендикулярно к оси валика  $AB$ .

2. Определяем опорные реакции валика:

$$\Sigma m_B = A \cdot 3l - ql \frac{3}{2} l - \frac{ql}{2} l = 0; \quad A = \frac{2}{3} ql;$$

$$\Sigma m_A = -B \cdot 3l + \frac{ql}{2} 2l + ql \frac{3}{2} l = 0; \quad B = \frac{5}{6} ql.$$

После определения опорных реакций, рассматривая валик с ломаным стержнем как раму, нагруженную распределенными силами инерции, строим для нее эюру изгибающих моментов (рис. 14.4, в).

3. Как видно из эюры  $M$ , максимальный изгибающий момент возникает в сечении  $E$ :

$$M_{\max} = \frac{8}{6} ql^2 = \frac{4\gamma F}{3g} \omega^2 l^3 = \frac{4\gamma \pi d^2}{3g \cdot 4} \omega^2 l^3.$$

4. Подбираем сечение валика из условия прочности:

$$W_x \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]}; \quad \frac{\pi d^3}{32} \geq \frac{\gamma \pi d^2}{3g [\sigma]} \omega^2 l^3 \quad \text{и} \quad d \geq \frac{32\gamma \omega^2 l^3}{3g [\sigma]}.$$

Подставив числовые данные, получим

$$d \geq \frac{32 \cdot 0,0078 \cdot 23,1^2 \cdot 40^3}{3 \cdot 981 \cdot 1000} \approx 2,9 \text{ см.}$$

Принимаем  $d = 30$  мм.

**Пример 14.5.<sup>1</sup>** Проверить прочность приводного вала 1 электрической лебедки (рис. 14.5, а) в период разгона. Масса поднимаемого груза  $m_{гр} = 1200$  кг; момент инерции барабана и других деталей, вращающихся вместе с ним относительно оси вала 2,  $J_m = 30$  кг·м<sup>2</sup>. Моментом инерции вала 1 и насаженной на нем шестерни пренебречь. Потери в зубчатой передаче, подшипниках и другие не учитывать. Принять, что в период разгона вал 1 вращается равноускоренно и через  $t_{пуск} = 2$  сек после включения двигателя приобретает рабочую скорость вращения  $n_1 = 970$  об/мин.

Расчет выполнить по гипотезе удельной потенциальной энергии изменения формы; принять  $[\sigma] = 90$  н/мм<sup>2</sup>.

<sup>1</sup> Составил Г. М. Ицкович с использованием примера из учебного пособия [23].

Решение. В период разгона на вал 2 должен передаваться момент, равный сумме трех моментов: а) статического сопротивления поднимаемого груза  $(M_{гр} = m_{гр}g \frac{D_6}{2})$ ; б) расходуемого на разгон

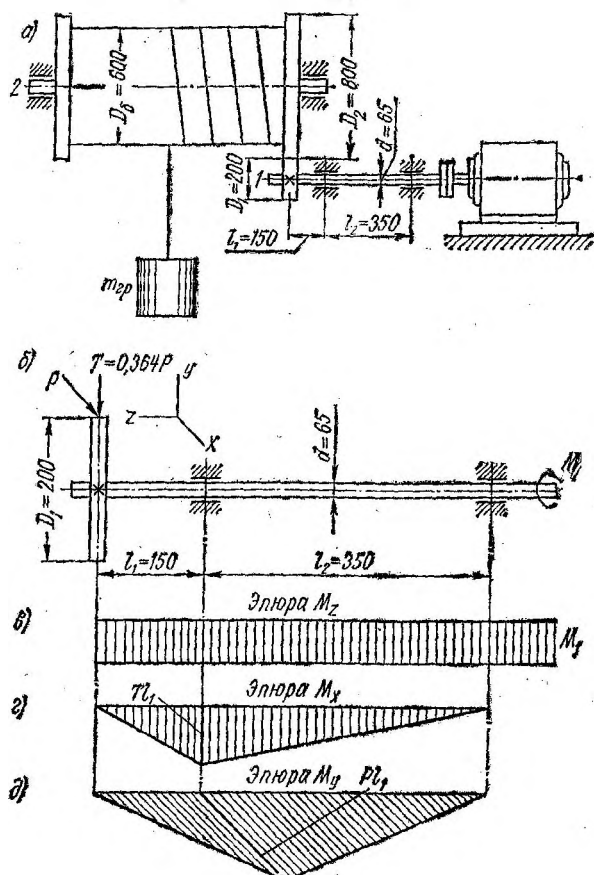


РИС. 14.5

груза до заданной скорости  $(M_{гр})_{ин} = m_{гр}a \frac{D_6}{2}$ ; в) расходуемого на разгон вращающихся масс  $(M_{2ин} = J_{2^2} \epsilon_2 = \dot{m} \epsilon_2)$ . Следовательно,

$$M_2 = m_{гр}g \frac{D_6}{2} + m_{гр}a \frac{D_6}{2} + J_2 \epsilon_2.$$

Ускорение поступательного движения груза связано с угловым ускорением барабана зависимостью

$$a = \varepsilon_2 \frac{D_6}{2}.$$

Угловое ускорение  $\varepsilon_2$  вала 2 выражается через угловое ускорение вала 1:

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_1 \frac{D_1}{D_2} = \varepsilon_1 \frac{200}{800} = 0,25 \varepsilon_1.$$

Угловое ускорение вала 1

$$\varepsilon_1 = \frac{\omega_1}{t_{\text{пуск}}} = \frac{\pi n_1}{30 t_{\text{пуск}}} = \frac{3,14 \cdot 970}{30 \cdot 2} = 50,8 \text{ рад/сек}^2;$$

$$\varepsilon_2 = 0,25 \varepsilon_1 = 0,25 \cdot 50,8 = 12,7 \text{ рад/сек}^2.$$

Подставив в выражение для  $M_2$  числовые значения, получим

$$M_2 = 1200 \cdot 9,81 \frac{0,6}{2} + 1200 \cdot 12,7 \left(\frac{0,6}{2}\right)^2 + 30 \cdot 12,7 = 5280 \text{ н} \cdot \text{м}.$$

Окружное усилие, возникающее в зацеплении зубчатых колес, определяется из соотношения

$$P = \frac{2M_2}{D_2} = \frac{2 \cdot 5280}{0,8} = 13\,200 \text{ н} = 13,2 \text{ кн}.$$

Радиальное усилие, возникающее в зацеплении  $T = 0,364P$  (см. курс деталей машин),

$$T = 0,364P = 0,364 \cdot 13,2 = 4,81 \text{ кн}.$$

Вращающий момент, передаваемый валом 1, определяем по найденной величине окружного усилия:

$$M_1 = P \frac{D_1}{2} = 13,2 \cdot 10^3 \frac{0,2}{2} = 1320 \text{ н} \cdot \text{м}.$$

Расчетная схема вала 1, эпюры крутящего и изгибающих моментов показаны на рис. 14.5, б — д. Эквивалентный момент для опасного сечения (под серединой левого подшипника)

$$M_{\text{эв}} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + 0,75M_z^2} = \sqrt{(Tl_1)^2 + (Pl_1)^2 + 0,75M_1^2} =$$

$$= \sqrt{(4,81 \cdot 0,15)^2 + (13,2 \cdot 0,15)^2 + 0,75 \cdot 1,32^2} = 2,4 \text{ кн} \cdot \text{м}.$$

Эквивалентное напряжение

$$\sigma_{\text{эв}} = \frac{M_{\text{эв}}}{\pi d^3} = \frac{2,4 \cdot 10^6}{\frac{3,14}{32} 65^3} = 89,4 \text{ н/мм}^2 < [\sigma].$$

## § 14.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ И ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ПРИ УДАРЕ

Приближенный расчет на удар основан на следующих допущениях:

- 1) в ударяемой конструкции возникают напряжения, не превосходящие предела пропорциональности, и закон Гука при ударе сохраняет свою силу;
- 2) удар является неупругим, и после удара тела не отделяются друг от друга;
- 3) ударяющее тело является абсолютно жестким и не деформируется;
- 4) сопротивление движению не учитывается;
- 5) масса ударяемой конструкции мала по сравнению с массой ударяющего тела и в расчет не принимается.

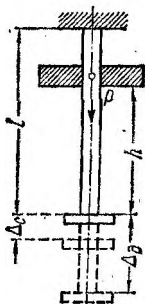


РИС. 14.6

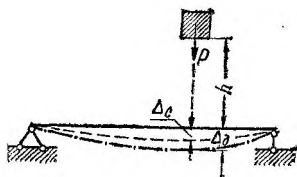


РИС. 14.7

На рис. 14.6 и 14.7 показаны случаи изгибающего и растягивающего удара, вызываемого падением груза  $P$  без начальной скорости с высоты  $h$ .

Скорость падения груза, если не учитывать сопротивления воздуха, определяется по формуле  $v = \sqrt{2gh}$ . Отсюда следует, что  $h = \frac{v^2}{2g}$ . Таким образом, всякий удар со скоростью  $v$  можно привести к свободному падению с условной высоты  $h$ .

Наибольшее динамическое перемещение при ударе в точке падения груза  $\Delta_d$  определяется по формуле

$$\Delta_d = \Delta_c \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_c}} \right) = \Delta_c \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{v^2}{g\Delta_c}} \right), \quad (14.1)$$

где  $\Delta_c$  — перемещение в той же точке от статически приложенной силы  $P$ .

Величина в скобках показывает, во сколько раз динамическое перемещение больше статического. Эта величина называется *динамическим коэффициентом* или *коэффициентом удара*. Таким образом,

$$\Delta_d = k_d \Delta_c.$$

где

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_c}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{v^2}{g\Delta_c}}. \quad (14.2)$$

Так как по закону Гука напряжения пропорциональны деформациям, то

$$\sigma_d = k_d \sigma_c$$

где  $\sigma_c$  — напряжение от статически приложенной силы, равной весу ударяющего груза.

Величина напряжений при ударе зависит от жесткости ударяемого тела. С уменьшением жесткости напряжения при ударе уменьшаются. Поэтому для смягчения удара применяют различные амортизаторы.

При мгновенном приложении нагрузки без удара ( $h = 0$ ) из формулы (14.2) следует:

$$k_d = 2; \Delta_d = 2\Delta_c; \sigma_d = 2\sigma_c.$$

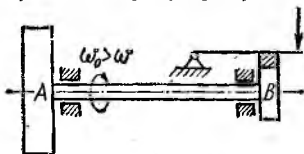


РИС. 14.8

Если высота падения груза  $h$  велика по сравнению с  $\Delta_c$ , то формула для определения динамического коэффициента несколько упрощается:

$$k_d = \sqrt{\frac{2h}{\Delta_c}} = \sqrt{\frac{v^2}{g\Delta_c}}. \quad (14.3)$$

Крутящий удар наблюдается при резком снижении угловой скорости вала с маховиком путем торможения конца вала (рис. 14.8). Динамический угол закручивания при этом

$$\varphi_d = \sqrt{\frac{J_m l}{G J_p}} (\omega_0^2 - \omega^2), \quad (14.4)$$

где  $J_m$  — момент инерции массы маховика;

$J_p$  — полярный момент инерции поперечного сечения вала;  
 $\omega_0$  и  $\omega$  — угловые скорости вала до и после торможения.

Динамический крутящий момент определяется по формуле

$$M_d = \frac{G J_p}{l} \varphi_d$$

а соответствующее ему касательное напряжение

$$\tau_d = \frac{M_d}{W_p}$$

## § 14.3. УЧЕТ МАССЫ КОНСТРУКЦИИ, ИСПЫТЫВАЮЩЕЙ УДАР

Если масса конструкции не мала по сравнению с массой ударяющего тела, то ею пренебречь нельзя, и в этом случае в приведенных ранее формулах взамен статического перемещения  $\Delta_c$  подставляют  $\Delta_c \left(1 + \frac{\beta Q}{P}\right)$ , где  $Q$  — полный вес конструкции;  $P$  — вес ударяющего тела;  $\beta$  — коэффициент приведения.

Значения коэффициентов приведения для некоторых частных случаев даны в табл. 14.1.

С учетом собственной массы конструкции динамический коэффициент определяется по формуле

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_c \left(1 + \frac{\beta Q}{P}\right)}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{v^2}{g \Delta_c \left(1 + \frac{\beta Q}{P}\right)}}. \quad (14.5)$$

Из сравнения формул (14.2) и (14.5) следует, что учет собственной массы ударяемой конструкции приводит к уменьшению величины динамического коэффициента, т. е. к снижению эффекта удара.

**Пример 14.6.** Груз весом  $P = 50$  кг падает с высоты  $h = 6$  см на балку, которая от этого удара прогибается на 1,5 см.

Какова величина силы, которая, будучи статически приложена к тому же месту балки, вызовет такой же прогиб?

**Решение.** Статический и динамический прогибы связаны между собой следующей зависимостью:

$$\Delta_d = k_d \cdot \Delta_c = \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_c}}\right) \Delta_c$$

или

$$\Delta_d - \Delta_c = \Delta_c \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_c}}.$$

После возведения обеих частей равенства в квадрат и простейших преобразований получим

$$\Delta_d^2 = \Delta_c \cdot 2(\Delta_d + h),$$

откуда

$$k_d = \frac{\Delta_d}{\Delta_c} = \frac{2(\Delta_d + h)}{\Delta_d} = \frac{2(1,5 + 6)}{1,5} = 10.$$

Для того чтобы прогиб  $\Delta_c$  от статически приложенной силы был равен прогибу  $\Delta_d$  от удара силой  $P$ , необходимо увеличить его, а следовательно, и силу  $P$  в  $k_d$  раз, т. е.

$$P_c = k_d \cdot P = 10 \cdot 50 = 500 \text{ кг}.$$

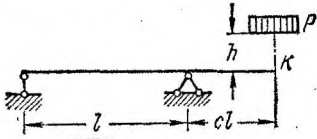
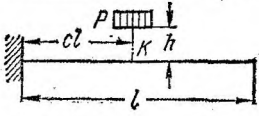
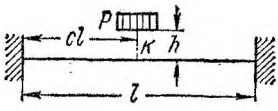
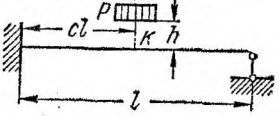
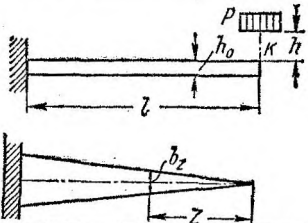
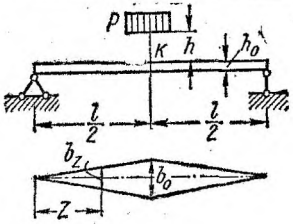


Таблица 14.1

Коэффициент приведения  $\beta$  собственной массы конструкции к точке удара (точка  $K$ )

Схема бруса и характер нагружения	$\beta$
	$\frac{1}{3}$
	$\frac{F_1}{F_1 + F_2 + \sqrt{F_1 F_2}}$
	$\frac{67}{336}$
	$\frac{2 + 4c - c^2 - 6c^3 + 3c^4}{105c^2(1-c)^2}$

Продолжение таблицы 14.1

Схема бруса и характер нагружения	$\beta$
	$\frac{8 + c^2(140 + 231c + 99c^2)}{420(1 + c)^2 c^2}$
	$\frac{105 - 105c + 35c^2 - 2c^3}{140c^2}$
	$\frac{24 - 24c - 4c^2 + 8c^3 - c^4}{35c^2(5c - 4 - c^2)^2}$
	$\frac{3 + c - c^2}{140c^2(1 - c)^2}$
	$\frac{1}{15} \approx 0,067$
	$\frac{11}{15} \approx 0,73$

**Пример 14.7.** Определить наибольшие напряжения, возникающие при ударе в поперечных сечениях ступенчатого стального бруса (рис. 14.9). Предел пропорциональности материала бруса  $\sigma_{\text{пл}} = 3000 \text{ кг/см}^2$ .

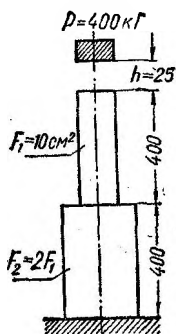


РИС. 14.9

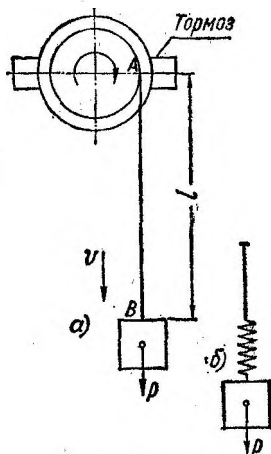


РИС. 14.10

**Решение.** Нормальное напряжение в поперечных сечениях верхнего участка бруса от статического нагружения силой  $P$

$$\max \sigma_c = \frac{P}{F} = \frac{400}{10} = 40 \text{ кг/см}^2.$$

Полное укорочение бруса от статически приложенной нагрузки  $P$

$$\Delta_c = \frac{Pl}{EF_1} + \frac{Pl}{EF_2} = \frac{400 \cdot 40}{2 \cdot 10^6 \cdot 10} + \frac{400 \cdot 40}{2 \cdot 10^6 \cdot 20} = 12 \cdot 10^{-4} \text{ см.}$$

Определяем величину динамического коэффициента по формуле (14.2):

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_c}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 25}{12 \cdot 10^{-4}}} \approx 65,7.$$

Максимальные динамические напряжения возникают в поперечных сечениях верхнего участка бруса:

$$\max \sigma_d = k_d \max \sigma_c = 65,7 \cdot 40 = 2628 \text{ кг/см}^2.$$

**Пример 14.8.** Груз весом  $P = 2 \cdot 10^3 \text{ кг}$ , подвешенный на стальном канате, опускается с постоянной скоростью  $v = 1,2 \text{ м/сек}$  (рис. 14.10, а). Определить наибольшие напряжения, возникающие

в поперечном сечении каната при резком торможении (внезапной остановке барабана, на который намотан канат). Длина размотанной части каната  $l = 150$  м; площадь поперечного сечения  $F = 5$  см<sup>2</sup>; модуль упругости каната  $E = 1,7 \cdot 10^6$  кг/см<sup>2</sup>; объемный вес каната  $\gamma = 0,0078$  кг/см<sup>3</sup>.

Решение. Вследствие внезапной остановки верхнего конца свешивающейся части каната получается растягивающий удар.

По методу,<sup>1</sup> изложенному в работе [66], динамические напряжения, возникающие в поперечном сечении каната при внезапном его заземлении, определяются (с учетом влияния собственного веса) по формуле

$$\sigma_d = k_d \sigma_c = \left( 1 + \sqrt{k^2 + \frac{2h}{\Delta_c} \xi} \right) \sigma_c,$$

где  $k = \frac{a}{g}$  — отношение ускорения каната к ускорению свободно падающего тела;

$h = \frac{v^2}{2g}$  — эквивалентная высота;

$\Delta_c = \frac{Pl}{EF}$  — абсолютное удлинение свешивающейся части каната под действием силы  $P$ , приложенной к концу каната (в предположении ее статического приложения);

$\xi = \frac{1 + \alpha}{1 + \alpha + \frac{a^2}{3}}$  — коэффициент влияния веса каната;

$\alpha = \frac{Q}{P}$  — отношение веса свешивающейся части каната к силе  $P$ .

Для нашего примера:

$k = 0$ , так как  $a = 0$ ;

$$Q = \gamma Fl = 7,8 \cdot 10^{-3} \cdot 5 \cdot 150 \cdot 10^2 = 585 \text{ кг};$$

$$\alpha = \frac{Q}{P} = \frac{585}{2000} = 0,2925;$$

$$\xi = \frac{1 + \alpha}{1 + \alpha + \frac{a^2}{3}} = \frac{1 + 0,2925}{1 + 0,2925 + \frac{0,2925^2}{3}} = 0,978.$$

Приняв  $\sqrt{\xi} = \sqrt{0,978} \approx 1$ , получим:

$$\begin{aligned} k_d &= 1 + \sqrt{\frac{2h}{\Delta_c}} = 1 + \sqrt{\frac{v^2 EF}{gPl}} = \\ &= 1 + \sqrt{\frac{120^2 \cdot 1,7 \cdot 10^6 \cdot 5}{981 \cdot 2 \cdot 10^3 \cdot 150 \cdot 10^2}} = 3,04; \end{aligned}$$

<sup>1</sup> Способ, изложенный в учебнике [8], дает заниженное значение динамического коэффициента.

$$\max \sigma_c = \frac{P}{F} + \gamma l = \frac{2000}{5} + 7,8 \cdot 10^{-3} \cdot 150 \cdot 10^2 = 517 \text{ кг/см}^2$$

и

$$\max \sigma_d = k_d \max \sigma_c = 3,04 \cdot 517 = 1572 \text{ кг/см}^2.$$

Если для уменьшения динамических напряжений между концом каната и грузом  $P$  установлена пружина (рис. 14.10, б) жесткостью  $C$ , то величина динамического коэффициента

$$k_d = 1 + \sqrt{k^2 + \frac{2h(1+\alpha)}{\Delta_c \left(1 + \alpha + \frac{\alpha^2}{3}\right) + \lambda_0}},$$

где  $\lambda_0 = \frac{P}{C}$  — изменение высоты пружины под действием статически приложенной силы  $P$ .

## РАСЧЕТ ПО ПРЕДЕЛЬНЫМ НАГРУЗКАМ

## § 15.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Под *предельной* понимается нагрузка, при действии которой конструкция перестает выполнять свои функции — происходит исчерпание несущей способности (разрушение, развитие недопустимых деформаций и т. д.).

При расчете по предельным нагрузкам условие прочности имеет вид

$$n = \frac{Q_{\text{пр}}}{Q} \geq [n], \quad (15.1)$$

где  $Q_{\text{пр}}$  и  $Q$  — соответственно предельная и действующая на конструкцию нагрузки;

$[n]$  — требуемый коэффициент запаса прочности.

В ряде случаев (например, при возникновении в конструкции переменных напряжений) исчерпание несущей способности происходит, когда наибольшее напряжение, действующее в конструкции, становится равным предельному (в этом случае пределу выносливости).

Если зависимость между нагрузкой  $Q$  и напряжением линейна, т. е.  $\sigma = kQ$ ,<sup>1</sup> то результат расчета по предельным нагрузкам в этих случаях совпадает с результатом расчета по допускаемым напряжениям (по опасной точке). Так, например, коэффициент запаса прочности будет одинаков при обоих методах расчета.

Для пластичных материалов в качестве предельного обычно принимается напряжение, равное пределу текучести. Однако если при статическом действии нагрузки величина напряжения в опасной точке стала равной пределу текучести, то это не означает еще исчерпания несущей способности. Исчерпание несущей способности, как правило, происходит при развитии в конструкции пластических деформаций.

При развитии пластических деформаций связь между нагрузкой и напряжением нелинейна, и результаты расчета по предельным нагрузкам уже не будут совпадать с результатами расчета по допускаемым напряжениям. В этих случаях расчет по предельным нагрузкам позволяет определить действительную несущую способность конструкции и в ряде случаев приводит к экономии материала.

Ниже рассматриваются методы расчета на прочность по предельным нагрузкам конструкций из пластичного материала с ярко

<sup>1</sup>  $k$  — коэффициент пропорциональности между напряжением и нагрузкой.

Например, при растяжении  $\sigma = \frac{N}{F}$ , т. е.  $k = \frac{1}{F}$ .

выраженной площадкой текучести<sup>1</sup> при статическом нагружении.<sup>2</sup> При расчете действительная диаграмма растяжения заменяется диаграммой идеально упруго-пластичного материала (рис. 15.1) — диаграммой Прандтля.<sup>3</sup>

Согласно этой диаграмме, предел пропорциональности совпадает с пределом текучести (т. е. напряжения до предела текучести подчиняются закону Гука), а площадка текучести имеет неограничен-

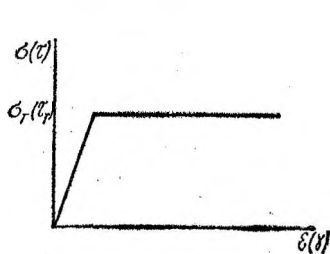


РИС. 15.1

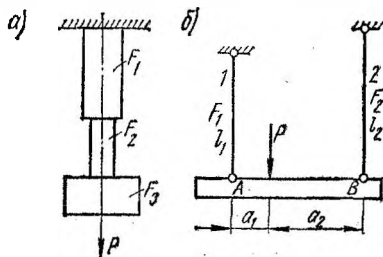


РИС. 15.2

ную длину. Из диаграммы Прандтля следует, что при достижении в какой-либо точке конструкции напряжения, равного пределу текучести, рост напряжений в этой точке прекращается. При использовании этой диаграммы за предельную принимается нагрузка, при действии которой конструкция теряет способность сопротивляться возрастанию нагрузки, превращаясь в геометрически изменяемую. При определении предельной нагрузки предполагается, что соотношение между нагрузками, приложенными к конструкции, при их возрастании сохраняется неизменным (т. е. рассматривается так называемый случай простого нагружения).

При расчете по предельным нагрузкам требуемый коэффициент запаса прочности  $[n] = 1,7 \div 2,5$  [56].

## § 15.2. РАСЧЕТЫ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ И СЖАТИИ

Рассмотрим: а) брус, находящийся под действием внешней силы, вызывающей его растяжение или сжатие (рис. 15.2, а); б) статически определимую стержневую систему, элементы которой испытывают растяжение или сжатие (рис. 15.2, б).

При развитии в каком-либо участке растянутого (сжатого) стержня пластической деформации он, согласно принятой диаграмме, начинает неограниченно удлиняться (сжиматься), т. е. выходит из строя. При возникновении пластической деформации в одном из элементов статически определимой системы (например, в стержне 1)

<sup>1</sup> Использование изложенного здесь метода для расчета конструкции из материала с другим видом диаграммы не позволяет выявить действительную несущую способность. Методы расчета по предельным нагрузкам при других типах диаграмм см. в работе [54].

<sup>2</sup> Предполагается также, что величина перемещения в предельном состоянии не лимитирует работу конструкции, а возможность потери устойчивости элементов конструкции предотвращена.

<sup>3</sup> Для случая чистого сдвига вид диаграммы аналогичен. Предел текучести при растяжении  $\sigma_T$  следует заменить на предел текучести  $\tau_T$ .

последняя превращается в геометрически изменяемую систему — в механизм (балка  $AB$  может свободно поворачиваться вокруг точки  $B$ ).

Таким образом, в рассмотренных случаях величина предельной нагрузки соответствует достижению наибольшим напряжением предела текучести, и расчет по предельным нагрузкам совпадает с расчетом по допустимым напряжениям.

В статически неопределимой системе возникновение пластических деформаций в одном элементе конструкций еще не означает, что система вышла из строя, так как остальные элементы, напряжение в которых меньше предела текучести, способны еще воспринимать возрастающую нагрузку.

Статически неопределимая система теряет несущую способность в том случае, когда вследствие развития пластических деформаций

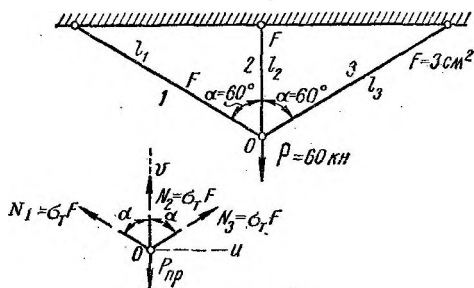


РИС. 15.3

она превращается в изменяемую систему. Величина предельной нагрузки может быть найдена из рассмотрения условия равновесия системы в предельном состоянии. Для этого величины усилий  $N$  в элементах, где возникла текучесть, приравниваются предельным:  $N_{i\text{ пр}} = \sigma_T F_i$  (здесь  $F_i$  — площадь сечения рассматриваемого элемента), и составляется условие равновесия системы.

Если заранее не очевидно, какова схема изменяемой системы (т. е. неизвестно, в каких элементах в предельном состоянии возникает текучесть), следует рассмотреть все возможные варианты исчерпания несущей способности системы и для каждого из них определить предельную нагрузку.

*Действительной предельной нагрузкой будет наименьшая из полученных.<sup>1</sup>*

**Пример 15.1.** Произвести расчет на прочность по предельным нагрузкам стержневой конструкции, изображенной на рис. 15.3. Для материала стержней  $\sigma_T = 240 \text{ н/мм}^2$ . Требуемый коэффициент запаса прочности  $[n] = 2$ .

**Решение.** Коэффициент запаса прочности конструкций

$$n = \frac{P_{\text{пр}}}{P}$$

<sup>1</sup> Этот метод определения предельной нагрузки называют *кинематическим*.



Несущая способность конструкции будет исчерпана, когда во всех стержнях напряжение достигнет предела текучести. Величину  $P_{\text{пр}}$  определим из условия равновесия узла  $O$  под действием  $P_{\text{пр}}$  и предельных усилий в стержнях:

$$\sum v = 0; \quad P_{\text{пр}} - 2\sigma_T F \cos \alpha - \sigma_T F = 0;$$

$$P_{\text{пр}} = 2\sigma_T F \cos 60^\circ + \sigma_T F = 2\sigma_T F = 2 \cdot 240 \cdot 3 \cdot 10^3 = 144 \cdot 10^3 \text{ н.}$$

Отсюда

$$n = \frac{144 \cdot 10^3}{60 \cdot 10^3} = 2,4 > [n].$$

Прочность конструкции обеспечена.

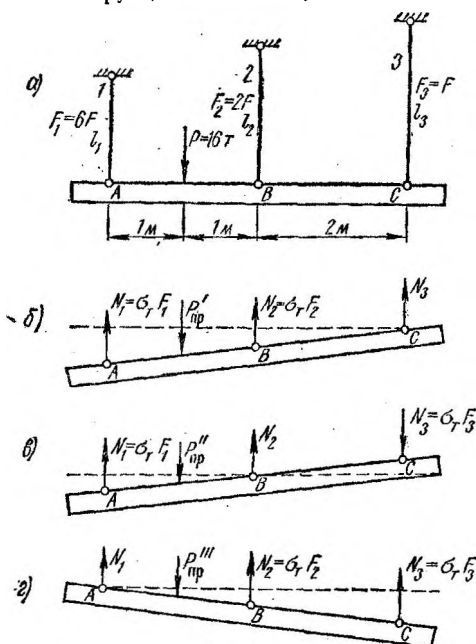


РИС. 15.4

**Пример 15.2.** Определить из расчета на прочность по предельной нагрузке требуемые площади поперечных сечений стержневой системы, изображенной на рис. 15.4, а. Балку  $AB$  считать абсолютно жесткой. Предел текучести материала стержней  $\sigma_T = 2400 \text{ кг/см}^2$ . Требуемый коэффициент запаса прочности  $[n] = 2$ .

**Решение.** Несущая способность системы будет исчерпана, когда в каких-либо двух стержнях напряжение достигнет предела

текучести. Возможны три варианта: а) текучесть возникает в стержнях 1 и 2; б) текучесть возникает в стержнях 1 и 3; в) текучесть возникает в стержнях 2 и 3.

На рис. 15.4, б — г изображены схемы изменяемых систем, соответствующих каждому из вариантов исчерпания несущей способности.

Составим для каждого из этих случаев условие предельного равновесия.

*Вариант 1.* Система может поворачиваться вокруг точки С (см. рис. 15.4, б).

Уравнение равновесия:

$$\begin{aligned} \sum M_C = 0; \quad P'_{\text{пр}} \cdot 3 - N_1 \cdot 4 - N_2 \cdot 2 = 0; \\ N_1 = \sigma_T F_1 = \sigma_T \cdot 6F; \quad N_2 = \sigma_T F_2 = \sigma_T \cdot 2F. \end{aligned}$$

Отсюда

$$P'_{\text{пр}} = \frac{6\sigma_T F \cdot 4 + 2\sigma_T F \cdot 2}{3} = \frac{28}{3} \sigma_T F.$$

*Вариант 2.* Система может поворачиваться вокруг точки В (см. рис. 15.4, в). Усилие в стержне 3 при этом будет сжимающим (при любом возможном повороте системы сила  $P$  должна совершать положительную работу).

Уравнение равновесия:

$$\sum M_B = 0; \quad P''_{\text{пр}} \cdot 1 - N_1 \cdot 2 - N_3 \cdot 2 = 0; \quad N_3 = \sigma_T F_3 = \sigma_T F.$$

Отсюда

$$P''_{\text{пр}} = \sigma_T \cdot 6F \cdot 2 + \sigma_T F \cdot 2 = 14\sigma_T F.$$

*Вариант 3.* Система может поворачиваться вокруг точки А (см. рис. 15.4, г).

Уравнение равновесия:

$$\sum M_A = 0; \quad -P'''_{\text{пр}} \cdot 1 + N_2 \cdot 2 + N_3 \cdot 4 = 0.$$

Отсюда

$$P'''_{\text{пр}} = \sigma_T \cdot 2F \cdot 2 + \sigma_T F \cdot 4 = 8\sigma_T F.$$

Таким образом, несущая способность будет исчерпана при возникновении текучести в стержнях 2 и 3:  $P_{\text{пр}} = 8\sigma_T F$ .

Из условия прочности

$$n = \frac{P_{\text{пр}}}{P} = \frac{8\sigma_T F}{P} = \frac{8 \cdot 2400 \cdot F}{16000} \geq [n]$$

получаем

$$F \geq \frac{[n] \cdot 16000}{8 \cdot 2400} = \frac{2 \cdot 16000}{8 \cdot 2400} = 1,67 \text{ см}^2.$$

При этом  $F_1 = 6F = 10 \text{ см}^2$ ;  $F_2 = 2F = 3,34 \text{ см}^2$ ;  $F_3 = F = 1,67 \text{ см}^2$ .

**Пример 15.3.** Определить из расчета по предельным нагрузкам допускаемую величину силы  $P$  для бруса (рис. 15.5, а). Предел текучести материала бруса  $\sigma_T = 3000 \text{ кг/см}^2$ . Требуемый коэффициент запаса прочности  $[n] = 1,8$ .

**Решение.** Несущая способность бруса будет исчерпана, когда текучесть возникнет как в первом, так и во втором участках бруса. Уравнения равновесия в предельном состоянии на основе рис. 15.5, б можно записать так:

$$\sum Z = 0; \quad \sigma_T F_1 + \sigma_T F_2 - P_{\text{пр}} = 0.$$

Отсюда

$$P_{\text{пр}} = \sigma_T F_1 + \sigma_T F_2 = \\ = 3000 \cdot 10 + 3000 \cdot 15 = 75\,000 \text{ кг}.$$

Таким образом,

$$[P] = \frac{P_{\text{пр}}}{[n]} = \frac{75\,000}{1,8} = 41,7 \cdot 10^3 \text{ кг}.$$

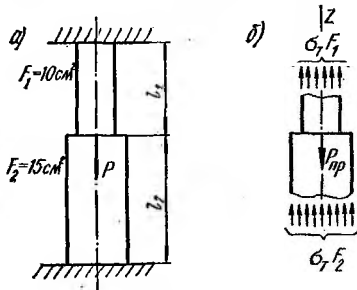


РИС. 15.5

### § 15.3. РАСЧЕТЫ ПРИ КРУЧЕНИИ БРУСА КРУГЛОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ

Исчерпание несущей способности скручиваемого бруса произойдет при распространении текучести по всему поперечному сечению (для статически определимого бруса).

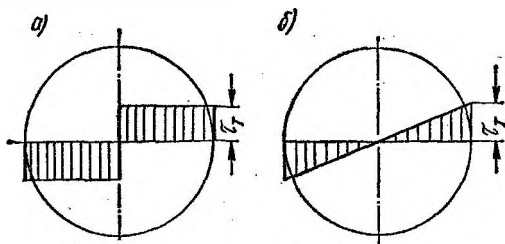


РИС. 15.6

Распределение напряжений в предельном состоянии для бруса круглого поперечного сечения показано на рис. 15.6, а, а при достижении напряжениями величины предела текучести только в точках контура — на рис. 15.6, б.

Предельный крутящий момент, соответствующий распространению текучести по всему сечению,

$$M_{\text{к. пр}} = \tau_T W_{\rho. \text{пл}}; \quad (15.2)$$

здесь  $W_{\rho. \text{пл}}$  — пластический полярный момент сопротивления:

для круглого сечения

$$W_{p \text{ пл}} = \frac{\pi d^3}{12}; \quad (15.3)$$

для кольцевого сечения

$$W_{p \text{ пл}} = \frac{\pi d^3}{12} (1 - c^3), \quad (15.4)$$

где  $c = \frac{d_0}{d}$ .

Для статически неопределимых брусков предельной при кручении будет нагрузка, под действием которой брус превращается в изменяемую систему.

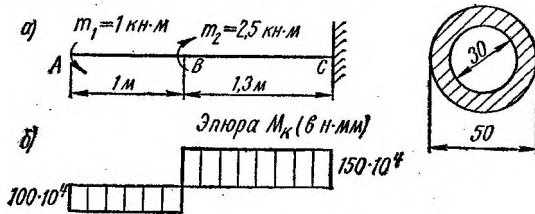


РИС. 15.7

Величина предельной нагрузки может быть найдена из рассмотрения условия равновесия системы в предельном состоянии.

Условие прочности при расчете на кручение статически определимого бруса постоянного поперечного сечения имеет вид

$$n = \frac{M_{к. пр}}{M_{к \text{ макс}}} \geq [n], \quad (15.5)$$

где  $M_{к \text{ макс}}$  — максимальный крутящий момент, возникающий в поперечном сечении бруса.

Для статически неопределимого бруса

$$n = \frac{m_{пр}}{m_{\text{макс}}} \geq [n], \quad (15.5a)$$

где  $m_{пр}$ ,  $m_{\text{макс}}$  — соответственно предельный и наибольший скручивающие моменты.

**Пример 15.4.** Произвести расчет на прочность по предельным нагрузкам бруса, изображенного на рис. 15.7, а, если  $\tau_T = 150 \text{ н/мм}^2$ ,  $[n] = 2,3$ .

**Решение.** Эпюра крутящих моментов для бруса показана на рис. 15.7, б. Несущая способность бруса будет исчерпана, когда текучесть распространится по всему сечению бруса. Предельный крутящий момент

$$M_{к. пр} = \tau_T \frac{\pi d^3}{12} (1 - c^3) = 150 \frac{3,14 \cdot 50^3}{12} \left[ 1 - \left( \frac{30}{50} \right)^3 \right] = 3,84 \cdot 10^6 \text{ н·мм.}$$

Коэффициент запаса прочности

$$n = \frac{M_{к. пр}}{M_{к. макс}} = \frac{3,84 \cdot 10^6}{1,50 \cdot 10^6} = 2,57 > [n].$$

**Пример 15.5.** Определить из расчета на прочность по предельной нагрузке требуемый диаметр поперечного сечения бруса, изображенного на рис. 15.8, а. Предел текучести  $\tau_T = 1600 \text{ кг/см}^2$ ,  $[n] = 2$ .

**Решение.** Несущая способность бруса будет исчерпана, когда текучесть распространится по всему сечению, как на первом, так и на втором участке бруса.

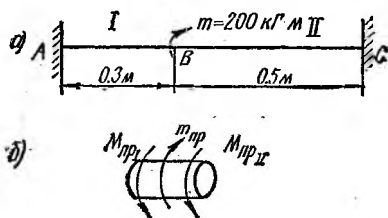


РИС. 15.8

Уравнение равновесия в предельном состоянии на основе рис. 15.8, б можно записать так:

$$m_{пр} - M_{к. пр I} - M_{к. пр II} = 0,$$

где  $M_{к. пр I}$ ,  $M_{к. пр II}$  ( $M_{к. пр I} = M_{пр I}$ ;  $M_{к. пр II} = M_{пр II}$ ) — значения предельных крутящих моментов соответственно для сечений I и II участков:

$$M_{к. пр I} = M_{к. пр II} = \tau_T \frac{\pi d^3}{12}.$$

Отсюда

$$m_{пр} = 2 \frac{\tau_T \pi d^3}{12}.$$

Из условия прочности

$$n = \frac{m_{пр}}{m_{max}} = \frac{\tau_T \pi d^3}{6m_{max}} \geq [n]$$

получаем

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{[n] \cdot 6m_{max}}{\tau_T \pi}} = \sqrt[3]{\frac{2 \cdot 6 \cdot 20\,000}{1600 \cdot 3,14}} = 3,66 \text{ см.}$$

Округляя, принимаем  $d = 38 \text{ мм}$ .

**Пример 15.6.** Валик вставлен в трубку и жестко соединен с ней с одного конца диском *A*, другой конец валика и трубки закреплен в неподвижной опоре (рис. 15.9, *a*). Определить из расчета по предельным нагрузкам допустимую величину скручивающего момента.

Предел текучести материала трубки  $(\tau_T)_{тр} = 1800 \text{ кг/см}^2$ , материала валика  $(\tau_T)_в = 1500 \text{ кг/см}^2$ , требуемый коэффициент запаса прочности  $[n] = 2$ .

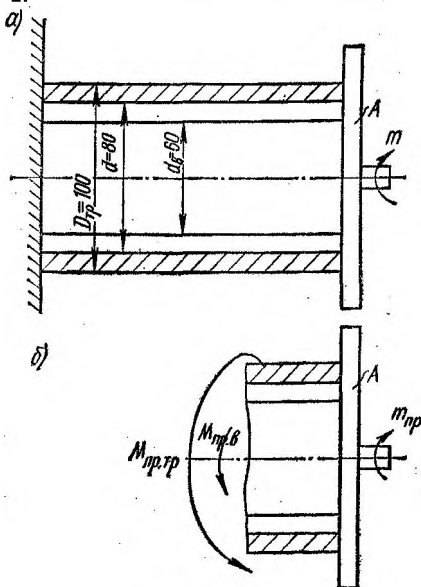


РИС. 15.9

**Решение.** Несущая способность будет исчерпана, когда текучесть распространится как по поперечному сечению трубки, так и по поперечному сечению валика.

Из условия равновесия в предельном состоянии (рис. 15.9, *b*) получаем

$$m_{пр} = M_{пр.в} + M_{пр.тр}$$

где  $M_{пр.в} = \frac{\pi d_в^3}{12} (\tau_T)_в$  — крутящий момент, соответствующий распространению текучести по всему поперечному сечению валика;

$M_{пр.тр} = \frac{\pi D_{тр}^3}{12} (1 - c^3) (\tau_T)_{тр}$  — крутящий момент, соответствующий распространению текучести по всему поперечному сечению трубки.

Подставив числовые значения, получим

$$m_{\text{пр}} = \frac{3,14 \cdot 6^3}{12} 1500 + \frac{3,14 \cdot 10^3}{12} \left[ 1 - \left( \frac{8}{10} \right)^3 \right] \cdot 1800 = 315 \cdot 10^3 \text{ кг} \cdot \text{см.}$$

Допускаемое значение момента

$$[m] = \frac{m_{\text{пр}}}{[n]} = \frac{315 \cdot 10^3}{2} = 157,5 \cdot 10^3 \text{ кг} \cdot \text{см.}$$

#### § 15.4. РАСЧЕТЫ ПРИ ИЗГИБЕ

При изгибе несущая способность бруса будет исчерпана при распространении текучести по всему поперечному сечению. При этом в сечении образуется так называемый пластический шарнир: принимается, что части бруса, соединенные этим шарниром, могут свободно поворачиваться относительно друг друга.

Образование пластического шарнира означает превращение статически определимого бруса в изменяемую систему.

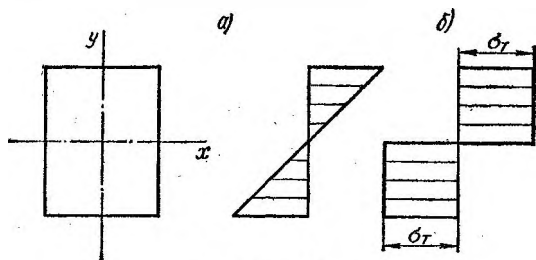


РИС. 15.10

Распределение напряжений при деформации в пределах упругости изображено на рис. 15.10, а, а в предельном состоянии — на рис. 15.10, б. Нейтральная ось в предельном состоянии делит поперечное сечение на две равновеликие части.

Предельный изгибающий момент, соответствующий образованию пластического шарнира,<sup>1</sup>

$$M_{\text{пр}} = \sigma_T W_{\text{пл}}, \quad (15.6)$$

где  $W_{\text{пл}}$  — пластический момент сопротивления при изгибе.

Пластический момент сопротивления

$$W_{\text{пл}} = S_{1x} + S_{2x}, \quad (15.7)$$

<sup>1</sup> Эта формула, строго говоря, справедлива при чистом изгибе. Однако влиянием поперечной силы, как правило, можно пренебречь.

где  $S_{1x}$  и  $S_{2x}$  — статические моменты относительно нейтральной оси сжатой и растянутой зон поперечного сечения (значения  $S_{1x}$  и  $S_{2x}$  принимаются по абсолютной величине).

Для сечения с двумя осями симметрии

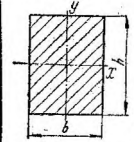
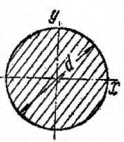
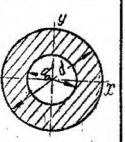
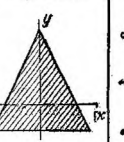
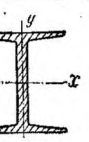
$$W_{пл} = 2S_x, \quad (15.7a)$$

где  $S_x$  — статический момент половины сечения относительно оси  $x$ .

В табл. 15.1 приведены величины пластических моментов сопротивления для ряда форм поперечного сечения.

Таблица 15.1

Пластические моменты сопротивления

Форма сечения					
Пластический момент сопротивления <sup>1</sup>	$W_{x пл} = \frac{bh^2}{4}$	$W_{x пл} = \frac{d^3}{6}$	$W_{x пл} = \frac{d^3}{6}(1 - c^3);$ $c = \frac{d_0}{d}$	$W_{x пл} = 0,0977bh^2$	$W_{x пл} = 2S_x$

Так как величина изгибающего момента прямо пропорциональна действующей нагрузке, то, исходя из величины  $M_{пр}$ , можно определить и величину предельной нагрузки.

Условие прочности в этом случае имеет вид

$$n = \frac{M_{пр}}{M_{max}} \geq [n], \quad (15.8)$$

где  $M_{max}$  — величина изгибающего момента от заданной нагрузки в сечении, где возникает пластический шарнир.

**Пример 15.7.** Проверить прочность по предельным нагрузкам балки, изображенной на рис. 15.11, а. Предел текучести материала  $\sigma_T = 240 \text{ н/мм}^2$ , требуемый коэффициент запаса прочности  $[n] = 2,3$ .

**Решение.** На рис. 15.11, б показана эпюра  $M_x$  для заданной балки. Пластический шарнир возникает, когда будет исчерпана несущая способность в сечении С, где изгибающий момент максимален.

Величина предельного момента, соответствующего образованию пластического шарнира,

$$M_{пр} = \sigma_T W_{пл} = 240 \frac{50^3}{6} = 5 \cdot 10^8 \text{ н} \cdot \text{мм},$$

<sup>1</sup> Нейтральная ось  $x$  делит поперечное сечение на две равновеликие части.



где  $W_{пл} = \frac{d^3}{6}$  — пластический момент сопротивления круглого сечения.

Коэффициент запаса прочности

$$n = \frac{M_{пр}}{M_{пmax}} = \frac{5 \cdot 10^6}{2,1 \cdot 10^6} = 2,38 > [n].$$

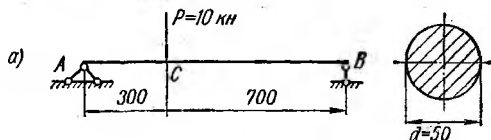


РИС. 15.11

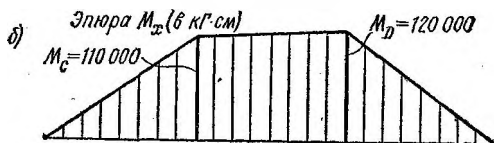
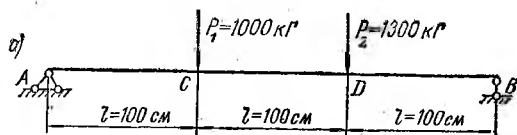


РИС. 15.12

**Пример 15.8.** Определить из расчета на прочность по предельным нагрузкам размеры поперечного сечения балки, изображенной на рис. 15.12, а. Предел текучести материала балки  $\sigma_T = 2400 \text{ кг/см}^2$ . Требуемый коэффициент запаса прочности  $[n] = 2$ .

Рассмотреть два варианта: а) поперечное сечение — двутавр; б) поперечное сечение — прямоугольник:  $\frac{h}{b} = 2$

**Решение.** На рис. 15.12, б показана эпюра  $M_x$  для заданной балки. Когда будет исчерпана несущая способность, изгибающий момент в сечении D достигнет предельной величины:

$$M_{пр} = \sigma_T W_{пл}$$

Для двутавра

$$W_{пл} = 2S_x;$$

для прямоугольника

$$W_{пл} = \frac{bh^2}{4} = \frac{h^3}{8}.$$

Из условия прочности

$$n = \frac{M_{пр}}{M_{max}} = \frac{\sigma_T W_{пл}}{M_{max}} \geq [n]$$

получаем

$$W_{пл} \geq \frac{[n] M_{max}}{\sigma_T}.$$

Отсюда:

для двутаврового сечения

$$W_{пл} = 2S_x \geq \frac{[n] M_{max}}{\sigma_T} = \frac{2 \cdot 12000}{2400} = 100 \text{ см}^3; \quad S_x \geq 50 \text{ см}^3.$$

По ГОСТ 8239—56\* принимаем двутавр № 16, для которого  $S_x = 62,3 \text{ см}^3$ ;

для прямоугольного сечения

$$W_{пл} = \frac{h^3}{8} \geq \frac{[n] M_{max}}{\sigma_T} = \frac{2 \cdot 12000}{2400} = 100 \text{ см}^3;$$

$$h = \sqrt[3]{8 \cdot 100} = 9,3 \text{ см}; \quad b = 4,63 \text{ см}.$$

**Пример 15.9.** Определить из расчета по предельным нагрузкам допустимую величину нагрузки для балки, показанной на рис. 15.13, а. Предел текучести материала  $\sigma_T = 3000 \text{ кг/см}^2$ . Требуемый коэффициент запаса прочности  $[n] = 2$ .

**Решение.** На рис. 15.13, б показана эпюра  $M_x$  для заданной балки. Когда несущая способность будет исчерпана, изгибающий момент в сечении С, где он максимален, достигнет предельной величины.

Приравняем наибольший изгибающий момент к величине предельного момента:

$$0,1q_{пр}l^2 = M_{пр},$$

отсюда

$$q_{пр} = \frac{M_{пр}}{0,1l^2} = \frac{\sigma_T W_{пл}}{0,1l^2}. \quad (a)$$

Пластический момент сопротивления в нашем случае равен сумме абсолютных значений статических моментов относительно нейтральной оси сжатой и растянутой зон сечения:

$$W_{x \text{ пл}} = S_{1x} + S_{2x}.$$

Положение нейтральной оси определим из условия, что в предельном состоянии она делит поперечное сечение на две равновеликие части.

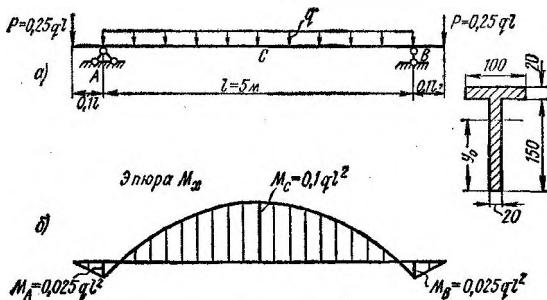


РИС. 15.13

Так как площадь стенки больше площади полки, нейтральная ось пересекает стенку. Обозначив через  $y_0$  расстояние от торца стенки до нейтральной оси и приняв во внимание, что  $F_1 = F_2$ , получим

$$2y_0 = 10 \cdot 2 + (15 - y_0) \cdot 2,$$

откуда

$$y_0 = 12,5 \text{ см.}$$

Статические моменты полусечений относительно нейтральной оси (по абсолютной величине):

$$S_{1x} = 20 \cdot 3,5 + \frac{2 \cdot 2,5 \cdot 2,5}{2} = 76,25 \text{ см}^3;$$

$$S_{2x} = \frac{12,5 \cdot 2 \cdot 12,5}{2} = 156,25 \text{ см}^3.$$

Пластический момент сопротивления

$$W_{\text{пл}} = 76,25 + 156,25 = 232,5 \text{ см}^3.$$

Из выражения (а) находим предельное значение интенсивности нагрузок:

$$q_{\text{пр}} = \frac{\sigma_{\text{т}} W_{\text{пл}}}{0,1 l^2} = \frac{3000 \cdot 232,5}{0,1 \cdot 500^2} = 27,9 \text{ кг/см.}$$

Отсюда получаем:

$$[q] = \frac{q_{\text{пр}}}{[n]} = \frac{27,9}{2} = 13,95 \text{ кг/см};$$

$$[P] = 0,25 [q] l = 0,25 \cdot 13,95 \cdot 500 = 1745 \text{ кг}.$$

### § 15.5. РАСЧЕТЫ ПРИ СОВМЕСТНОМ ИЗГИБЕ И РАСТЯЖЕНИИ (СЖАТИИ), ИЗГИБЕ И КРУЧЕНИИ

В случае, когда в поперечном сечении бруса одновременно возникает несколько внутренних силовых факторов (изгибающий момент и продольная сила, изгибающий и крутящие моменты и т. д.), исчерпание несущей способности также наступает при распространении текучести по всему сечению.

Очевидно, что при одновременном возникновении нескольких внутренних силовых факторов их предельные значения будут меньше, чем при действии каждого из них отдельно.

Для ряда случаев нагружения и некоторых форм поперечного сечения бруса методами теории пластичности получены аналитические зависимости, устанавливающие соотношения между внутренними силовыми факторами в предельном состоянии (см., например, [56]).

Расчет на прочность в этих случаях в общем аналогичен расчету при возникновении в сечении только одного силового фактора. Если внутренние силовые факторы (например, изгибающий момент и продольная сила) достигают своих наибольших значений в разных сечениях, приходится выполнять расчет для двух (редко для большего числа) сечений, где предположительно будет исчерпана несущая способность.

Некоторые особенности расчета по предельным нагрузкам в случае возникновения в сечении нескольких силовых факторов показаны далее на конкретных примерах.

#### *Изгиб и растяжение (сжатие) бруса прямоугольного сечения<sup>1</sup>*

Связь между изгибающим моментом  $M_{\text{пр}}$  и продольной силой  $N_{\text{пр}}$  в предельном состоянии бруса прямоугольного поперечного сечения определяется уравнением

$$\frac{M_{\text{пр}}}{M_{\text{пр}}^*} + \left( \frac{N_{\text{пр}}}{N_{\text{пр}}^*} \right)^2 = 1, \quad (15.9)$$

где  $M_{\text{пр}}$ ,  $N_{\text{пр}}$  — соответственно изгибающий момент и продольная сила, при совместном действии которых будет исчерпана несущая способность сечения;

$M_{\text{пр}}^*$ ,  $N_{\text{пр}}^*$  — соответственно изгибающий момент и продольная сила, при раздельном возникновении которых будет

<sup>1</sup> Расчет применим для брусев большой жесткости, для которых справедлив принцип начальных размеров.

исчерпана несущая способность сечения ( $M_{пр}^* = \sigma_T \frac{bh^2}{4}$ ;

$$N_{пр}^* = \sigma_T bh).$$

Условие прочности имеет вид

$$n = \frac{M_{пр}}{M} = \frac{N_{пр}}{N} \geq [n], \quad (15.10)$$

где  $M$  и  $N$  — соответственно изгибающий момент и продольная сила, возникающие в рассматриваемом сечении от заданной внешней нагрузки.

Из уравнения (15.10) следует, что коэффициент запаса прочности можно определять как по отношению моментов, так и по отношению продольных сил (рассматривается только случай пропорционального роста нагрузок — случай так называемого простого нагружения).

При проектном расчете возникают некоторые трудности, в связи с тем что размер поперечного сечения входит в уравнение (15.9) как в четвертой, так и в третьей степени, т. е. получается уравнение четвертой степени, решать которое приходится путем подбора. Целесообразно выполнять расчет методом последовательных приближений. Методика проектного расчета показана в примере 15.11.

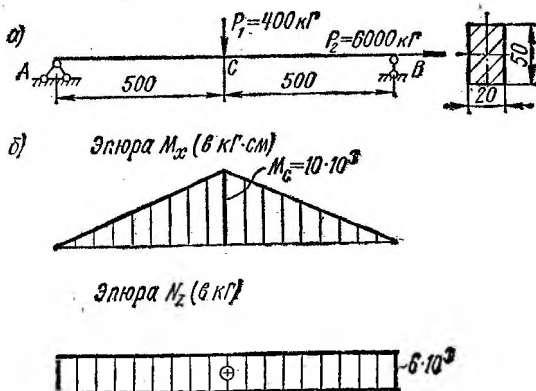


РИС. 15.14

**Пример 15.10.** Проверить прочность по предельным нагрузкам бруса, изображенного на рис. 15.14, а. Предел текучести материала бруса  $\sigma_T = 2400 \text{ кг/см}^2$ , требуемый коэффициент запаса прочности  $[n] = 2$ .

**Решение.** На рис. 15.14, б изображены эпюры  $M_x$  и  $N_z$  для рассматриваемого бруса.

Очевидно, что несущая способность будет исчерпана при распространении пластической деформации по всему поперечному сечению С,

где возникает наибольший изгибающий момент. Это произойдет, когда изгибающий момент и предельная сила в сечении  $C$  достигнут предельных значений.

Коэффициент запаса прочности

$$n = \frac{M_{\text{пр}}}{M_C} = \frac{N_{\text{пр}}}{N_C}.$$

Отсюда

$$M_{\text{пр}} = nM_C; \quad N_{\text{пр}} = nN_C.$$

Подставим эти значения в уравнение (15.9). В результате получим квадратное уравнение относительно  $n$ :

$$n^2 \left( \frac{N_C}{N_{\text{пр}}^*} \right)^2 + n \left( \frac{M_C}{M_{\text{пр}}^*} \right) - 1 = 0,$$

откуда<sup>1</sup>

$$n = \frac{-\frac{M_C}{M_{\text{пр}}^*} + \sqrt{\left( \frac{M_C}{M_{\text{пр}}^*} \right)^2 + 4 \left( \frac{N_C}{N_{\text{пр}}^*} \right)^2}}{2 \left( \frac{N_C}{N_{\text{пр}}^*} \right)^2}.$$

Учитывая, что

$$M_C = 10 \cdot 10^3 \text{ кг} \cdot \text{см}; \quad N_C = 6000 \text{ кг};$$

$$M_{\text{пр}}^* = \sigma_T W_{\text{пл}} = \sigma_T \frac{bh^2}{4} = 2400 \frac{2 \cdot 5^2}{4} = 30 \cdot 10^3 \text{ кг} \cdot \text{см};$$

$$N_{\text{пр}}^* = \sigma_T F = \sigma_T bh = 2400 \cdot 2 \cdot 5 = 24 \cdot 10^3 \text{ кг},$$

получаем

$$n = \frac{-\frac{10 \cdot 10^3}{30 \cdot 10^3} + \sqrt{\left( \frac{10 \cdot 10^3}{30 \cdot 10^3} \right)^2 + 4 \left( \frac{6000}{24 \cdot 10^3} \right)^2}}{2 \left( \frac{6000}{24 \cdot 10^3} \right)^2} = 2,16 > [n].$$

**Пример 15.11.** Определить из расчета на прочность по предельным нагрузкам размеры прямоугольного поперечного сечения бруса (при  $\frac{h}{b} = 2$ ), изображенного на рис. 15.15, а. Предел текучести материала бруса  $\sigma_T = 2400 \text{ кг/см}^2$ . Требуемый коэффициент запаса прочности  $[n] = 2$ .

<sup>1</sup> Второй корень квадратного уравнения, соответствующий знаку минус перед радикалом, дает отрицательное значение  $n$  и поэтому не нужен.

Решение. На рис. 15.15, б показаны эпюры  $M_x$  и  $N_z$  для заданного бруса. Когда несущая способность будет исчерпана, изгибающий момент и продольная сила в сечении В достигнут предельного значения.

Определим размеры поперечного сечения, пренебрегая действием продольной силы.

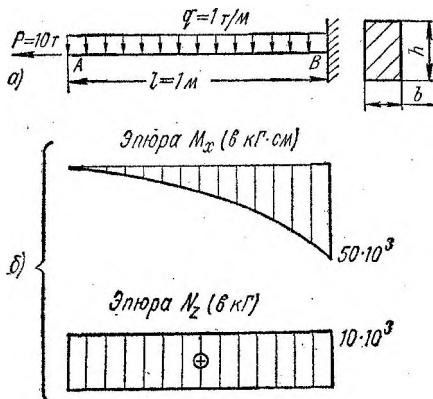


РИС. 15.15

Величина предельного изгибающего момента в этом случае

$$M_{\text{пр}} = M_{\text{пр}}^* = \sigma_{\text{T}} W_{\text{пл}} = \sigma_{\text{T}} \frac{bh^2}{4} = \sigma_{\text{T}} \frac{h^3}{8} = 2400 \frac{h^3}{8} = 300 h^3.$$

Условие прочности

$$n = \frac{M_{\text{пр}}}{M_B} \geq [n].$$

Отсюда

$$M_{\text{пр}} = [n] M_B = 2 \cdot 50 \cdot 10^3 = 100 \cdot 10^3 \text{ кГ} \cdot \text{см};$$

$$300 h^3 = 100 \cdot 10^3; \quad h = \sqrt[3]{\frac{100 \cdot 10^3}{300}} = 6,94 \text{ см}.$$

Принимаем  $h = 70 \text{ мм}$ ;  $b = 35 \text{ мм}$ .

Проведем расчет с учетом продольной силы, исходя из полученных значений  $h$  и  $b$ . Из условия прочности

$$n = \frac{M_{\text{пр}}}{M_B} = \frac{N_{\text{пр}}}{N_z} \geq [n]$$

получаем:

$$M_{\text{пр}} = [n] \cdot M_B = 2 \cdot 50 \cdot 10^3 = 100 \cdot 10^3 \text{ кГ} \cdot \text{см};$$

$$N_{\text{пр}} = [n] N_B = 2 \cdot 10 \cdot 10^3 = 20 \cdot 10^3 \text{ кГ}.$$

Предельное значение продольной силы для полученных размеров поперечного сечения

$$N_{\text{пр}}^* = \sigma_T b h = 2400 \cdot 3,5 \cdot 7 = 58,8 \cdot 10^3 \text{ кг.}$$

Из уравнения (15.9) получаем

$$\frac{M_{\text{пр}}}{M_{\text{пр}}^*} = 1 - \left( \frac{N_{\text{пр}}}{N_{\text{пр}}^*} \right)^2 = 1 - \left( \frac{20}{58,8} \right)^2 = 1 - 0,115 = 0,895.$$

Отсюда

$$M_{\text{пр}}^* = \frac{M_{\text{пр}}}{0,895} = \frac{100 \cdot 10^3}{0,895} = 112 \cdot 10^3 \text{ кг} \cdot \text{см.}$$

Так как

$$M_{\text{пр}}^* = 300h^3,$$

то

$$h = \sqrt[3]{\frac{112 \cdot 10^3}{300}} = 7,2 \text{ см} = 72 \text{ мм}$$

и

$$b = 36 \text{ мм.}$$

Эти размеры можно принять как окончательные. Для подтверждения проведем еще один расчет, исходя из полученных значений  $h$  и  $b$ .

При новых значениях  $h$  и  $b$

$$N_{\text{пр}}^* = \sigma_T b h = 2400 \cdot 3,6 \cdot 7,2 = 62 \cdot 10^3 \text{ кг.}$$

Тогда

$$\frac{M_{\text{пр}}}{M_{\text{пр}}^*} = 1 - \left( \frac{N_{\text{пр}}}{N_{\text{пр}}^*} \right)^2 = 1 - \left( \frac{20}{62} \right)^2 = 1 - 0,097 = 0,903.$$

Отсюда

$$M_{\text{пр}}^* = \frac{M_{\text{пр}}}{0,903} = \frac{100 \cdot 10^3}{0,903} = 111 \cdot 10^3 \text{ кг} \cdot \text{см}$$

и

$$h = \sqrt[3]{\frac{111 \cdot 10^3}{300}} = 7,15 \text{ см.}$$

Окончательно принимаем:

$$h = 72 \text{ мм}; \quad b = 36 \text{ мм.}$$

**Пример 15.12.** Определить из расчета по предельным нагрузкам величину допускаемой нагрузки для бруса, показанного на рис. 15.16, а. Предел текучести материала бруса  $\sigma_T = 2400 \text{ кг/см}^2$ . Требуемый коэффициент запаса прочности  $[n] = 2,2$ .



Решение. Эпюры  $M_x$  и  $N_z$  даны на рис. 15.16, б. Положение сечения, в котором продольная сила достигает наибольшего значения, не совпадает с сечением, в котором возникает наибольший изгибающий момент. Очевидно, что предельное состояние может возникнуть либо в сечении В, либо в сечении С.

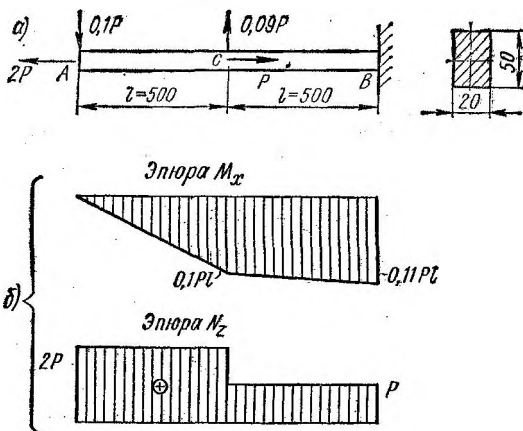


РИС. 15.16

Выполним расчет по определению предельной нагрузки для одного и другого сечений, в которых предположительно исчерпана несущая способность.

Для сечения С

Когда несущая способность будет исчерпана, в сечении возникают:

$$M_{\text{пр}} = 0,1P_{\text{пр}}l;$$

$$N_{\text{пр}} = 2P_{\text{пр}}.$$

Подставим эти значения в уравнение (15.9). В результате получим квадратное уравнение относительно  $P_{\text{пр}}$ :

$$\left(\frac{2P_{\text{пр}}}{N_{\text{пр}}^*}\right)^2 + \frac{0,1P_{\text{пр}}l}{M_{\text{пр}}^*} - 1 = 0.$$

Здесь

$$N_{\text{пр}}^* = \sigma_t F = 2400 \cdot 2 \cdot 5 = 24 \cdot 10^3 \text{ кг};$$

$$M_{\text{пр}}^* = \sigma_t W_{x \text{ пл}} = \sigma_t \frac{bh^2}{4} = 2400 \frac{2 \cdot 5^2}{4} = 30 \cdot 10^3 \text{ кг} \cdot \text{см}.$$

Отсюда

$$\frac{4P_{\text{пр}}^2}{(24 \cdot 10^3)^2} + \frac{0,1 \cdot 50P_{\text{пр}}}{30 \cdot 10^3} - 1 = 0$$

или

$$12P_{\text{пр}}^2 + 28,8 \cdot 10^4 P_{\text{пр}} - 17,28 \cdot 10^8 = 0,$$

откуда  $P_{\text{пр}} = 4680$  кг.

*Для сечения В*

Когда несущая способность будет исчерпана, в сечении возникают:

$$M_{\text{пр}} = 0,11P_{\text{пр}}l;$$

$$N_{\text{пр}} = P_{\text{пр}}.$$

Подставив эти значения в уравнение (15.9) и проведя преобразования, получим квадратное уравнение относительно  $P_{\text{пр}}$ :

$$\frac{P_{\text{пр}}^2}{(24 \cdot 10^3)^2} + \frac{0,11 \cdot 50 \cdot P_{\text{пр}}}{30 \cdot 10^3} - 1 = 0.$$

или

$$3P_{\text{пр}}^2 + 31,68 \cdot 10^4 P_{\text{пр}} - 17,28 \cdot 10^8 = 0,$$

откуда  $P_{\text{пр}} = 5200$  кг.

Предельная сила будет равна меньшему из полученных значений:  
 $P_{\text{пр}} = 4680$  кг.

Допускаемое значение нагрузки

$$[P] = \frac{P_{\text{пр}}}{[n]} = \frac{4680}{2,2} = 2130 \text{ кг.}$$

### *Изгиб и кручение бруса круглого сечения*

Связь между изгибающим  $M_{\text{пр}}$  и крутящим  $M_{\text{к. пр}}$  моментами в предельном состоянии бруса круглого поперечного сечения с достаточной точностью определяется уравнением

$$\left(\frac{M_{\text{пр}}}{M_{\text{пр}}^*}\right)^2 + \left(\frac{M_{\text{к. пр}}}{M_{\text{к. пр}}^*}\right)^2 = 1, \quad (15.11)$$

где  $M_{\text{пр}}^*$ ,  $M_{\text{к. пр}}^*$  — соответственно изгибающий и крутящий моменты, при раздельном возникновении которых происходит исчерпание несущей способности  $\left(M_{\text{пр}}^* = \sigma_{\tau} \frac{d^3}{6};\right.$

$$\left.M_{\text{к. пр}}^* = \tau_{\tau} \frac{\pi d^3}{12}\right).$$

Условие прочности имеет вид

$$n = \frac{M_{\text{пр}}}{M} = \frac{M_{\text{к. пр}}}{M_{\text{к}}}, \quad (15.12)$$

где  $M$  и  $M_{\text{к}}$  — соответственно изгибающий и крутящий моменты, возникающие в рассматриваемом сечении от внешней нагрузки (рассматривается только случай пропорционального роста нагрузок).

Используя уравнение 15.11, выражение для определения коэффициента запаса прочности можно преобразовать к виду

$$n = \frac{n_{\text{н}} n_{\text{к}}}{\sqrt{n_{\text{н}}^2 + n_{\text{к}}^2}}, \quad (15.13)$$

где  $n_{\text{н}}$  — коэффициент запаса прочности, подсчитанный в предположении, что в сечении возникает только изгибающий момент

$$\left( n_{\text{н}} = \frac{M_{\text{пр}}^*}{M} \right);$$

$n_{\text{к}}$  — коэффициент запаса прочности, подсчитанный в предположении, что в сечении возникает только крутящий момент

$$\left( n_{\text{к}} = \frac{M_{\text{к. пр}}^*}{M_{\text{к}}} \right).$$

**Пример 15.13.** Произвести расчет на прочность по предельным нагрузкам бруса, изображенного на рис. 15.17, а. Поперечное сечение бруса — круг с диаметром  $d = 100$  мм. Пределы текучести материала бруса  $\sigma_{\text{T}} = 3000$  кг/см<sup>2</sup>;  $\tau_{\text{T}} = 1800$  кг/см<sup>2</sup>, требуемый коэффициент запаса прочности  $[n] = 2$ .

**Решение.** На рис. 15.17, б изображены эпюры изгибающих и крутящих моментов для рассматриваемого бруса. Когда несущая способность будет исчерпана, изгибающий и крутящий моменты в сечении С достигнут предельного значения.

Коэффициент запаса прочности определим по формуле (15.13):

$$n = \frac{n_{\text{н}} n_{\text{к}}}{\sqrt{n_{\text{н}}^2 + n_{\text{к}}^2}}$$

Предельный изгибающий момент, определенный без учета действия кручения,

$$M_{\text{пр}}^* = \sigma_{\text{T}} W_{\text{пл}} = \sigma_{\text{T}} \frac{d^3}{6} = 3000 \frac{10^3}{6} = 500 \cdot 10^3 \text{ кг} \cdot \text{см}.$$

Предельный крутящий момент, определенный без учета действия изгиба,

$$M_{\text{к. пр}}^* = \tau_{\text{T}} W_{\text{р пл}} = \tau_{\text{T}} \frac{\pi d^3}{12} = 1800 \frac{3,14 \cdot 10^3}{12} = 471 \cdot 10^3 \text{ кг} \cdot \text{см}.$$

Коэффициент запаса прочности при учете только изгиба

$$n_{\text{и}} = \frac{M_{\text{пр}}^*}{M_{\text{с}}} = \frac{500 \cdot 10^3}{200 \cdot 10^3} = 2,5.$$

Коэффициент запаса прочности при учете только кручения

$$n_{\text{к}} = \frac{M_{\text{к. пр}}^*}{M_{\text{к с}}} = \frac{471 \cdot 10^3}{100 \cdot 10^3} = 4,71.$$

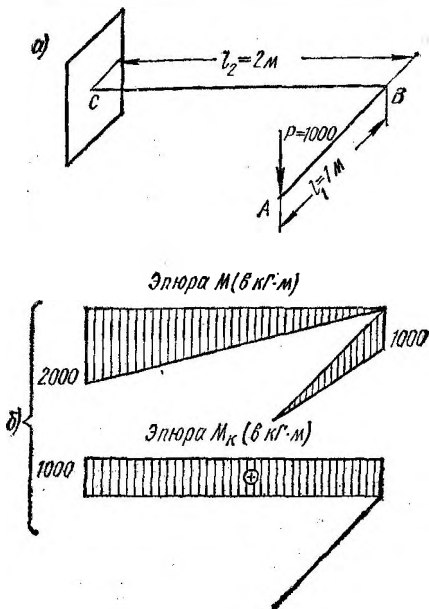


РИС. 15.17

Подставив значения  $n_{\text{и}}$  и  $n_{\text{к}}$  в формулу (15.13), получим

$$n = \frac{2,5 \cdot 4,71}{\sqrt{2,5^2 + 4,71^2}} = 2,21 > [n].$$

При расчете влиянием поперечных сил пренебрегали.

**Пример 15.14.** Определить из расчета на прочность по предельным нагрузкам размеры поперечного сечения бруса круглого сечения, изображенного на рис. 15.18, а. Пределы текучести материала бруса  $\sigma_{\text{т}} = 3000 \text{ кг/см}^2$ ,  $\tau_{\text{т}} = 1800 \text{ кг/см}^2$ , требуемый коэффициент запаса прочности  $[n] = 2$ .

Решение. На рис. 15.18, б, в показаны эпюры изгибающих и крутящих моментов для заданного бруса. Когда несущая способность будет исчерпана, изгибающий и крутящий моменты в сечении С достигнут предельного значения.

Из условия прочности

$$n = \frac{M_{\text{пр}}}{M_C} = \frac{M_{\text{к. пр}}}{M_{\text{к. С}}} \geq [n]$$

получаем

$$M_{\text{пр}} = [n] M_C = 2 \cdot 1000 \cdot 10^2 = 2000 \cdot 10^2 \text{ кг} \cdot \text{см};$$

$$M_{\text{к. пр}} = [n] M_{\text{к. С}} = 2 \cdot 500 \cdot 10^2 = 1000 \cdot 10^2 \text{ кг} \cdot \text{см}.$$

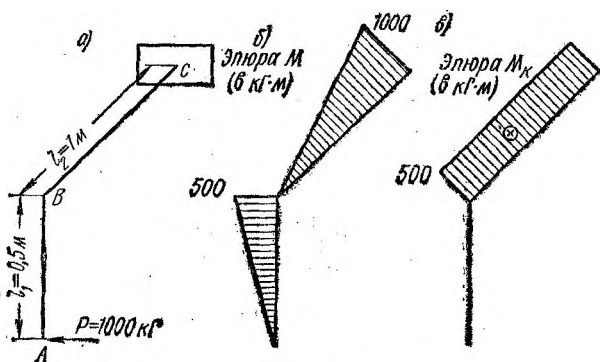


РИС. 15.18

Предельные значения изгибающего и крутящего моментов при их раздельном возникновении

$$M_{\text{пр}}^* = \sigma_T W_{\text{пл}} = \sigma_T \frac{d^3}{6} = 3000 \frac{d^3}{6} = 500d^3;$$

$$M_{\text{к. пр}}^* = \tau_T W_{\rho \text{ пл}} = \tau_T \frac{\pi d^3}{12} = 1800 \frac{\pi d^3}{12} = 471d^3.$$

Подставив полученные значения в уравнение (15.11), получим

$$\left( \frac{2000 \cdot 10^2}{500d^3} \right)^2 + \left( \frac{1000 \cdot 10^2}{471d^3} \right)^2 = 1,$$

откуда

$$d = \sqrt[3]{400^2 + 212^2} = 7,65 \text{ см.}$$

Принимаем  $d = 78 \text{ мм}$ .

## ЛИТЕРАТУРА

1. Авдеев Б. А. Испытательные машины и приборы. М., 1951.
2. Андреева Л. Е. Упругие элементы приборов. М., 1962.
3. Астахов М. Ф. и др. Справочная книга по расчёту самолета на прочность. М. 1954.
4. Афанасьев А. М., Марьин В. А. Лабораторный практикум по сопротивлению материалов. М., 1960.
5. Багреев В. В., Винокуров А. И., Киселев В. А., Панич Б. Б., Ицкович Г. М. Сборник задач по технической механике. Л., 1963, 1968.
6. Батурин А. Т., Ицкович Г. М., Панич Б. В., Чернин И. М. Детали машин. М. 1966, 1968.
7. Безухов Н. И. Основы теории упругости, пластичности и ползучести. М., 1967.
8. Беляев Н. М. Сопротивление материалов. М., 1962.
9. Белякин Ф. П., Яценко В. Ф. Прочность и деформативность деревянных стержней при центральном, внецентренном сжатии и чистом изгибе. Киев, 1960.
10. Берман М. Э. Механизм деформации винтовых пружин с малым углом подъема. Сб. ст. Всес. заочн. политехн. ин-та, вып. 10. М., 1955.
11. Бидерман В. Л. Теория удара. М., 1952.
12. Биргер И. А., Шорр Б. Ф., Шнейдерович Р. М. Расчет на прочность деталей машин. М., 1959, 1966.
13. Блейх Ф. Устойчивость металлических конструкций. М., 1961.
14. Богуславский П. Е. Металлические конструкции грузоподъемных машин и сооружений. М., 1961.
15. Бычков Д. В. Формулы и графики для расчета рам. М., 1957.
16. Вольмир А. С. Устойчивость деформируемых систем. М., 1967.
17. Гастев В. А. Краткий курс сопротивления материалов. М., 1959.
18. Глушков Г. С., Егоров И. Р., Ермолов В. В. Формулы для расчета неразрезных балок и рам. М., 1963.
19. Дарков А. В., Шпиро Г. С. Сопротивление материалов. М., 1965, 1969.
20. Жемочкин В. Н. Расчет рам. М., 1965.
21. Ицкович Г. М. Сопротивление материалов. М., 1966, 1968.
22. Ицкович Г. М., Винокуров А. И., Барановский Н. В. Сборник задач по сопротивлению материалов. Л., 1962, 1965.
23. Ицкович Г. М., Винокуров А. И., Минин Л. С. Руководство к решению задач по сопротивлению материалов. М., 1963.
24. Ицкович Г. М., Винокуров А. И. Сопротивление материалов. Руководство для учащихся механико-машиностроительных специальностей заочных техникумов. М., 1962.
25. Ицкович Г. М., Чернавский С. А., Киселев В. А., Боков К. Н., Бонч-Осмоловский М. А. Сборник задач и примеров расчета по курсу деталей машин. М., 1965.
26. Ицкович Г. М., Киселев В. А., Чернавский С. А., Боков К. Н., Панич Б. В. Курсовое проектирование деталей машин. М., 1964, 1965.
27. Ицкович Г. М. Некоторые вопросы методики преподавания темы «Теории прочности» в техникумах. М., 1962.
28. Кинасашвили Р. С. Сопротивление материалов. М., 1968.
29. Киселев В. А. Строительная механика. М., 1967.
30. Конструкционные материалы, т. 1. М., 1963.
31. Кравченко П. Е. Усталостная прочность. М., 1960.
32. Краткий справочник машиностроителя. М., 1966.

33. Дёвшия В. А. Сопротивление материалов. М., 1961.
34. Любошиц М. И. Расчет на прочность при переменных напряжениях. Минск, 1959.
35. Любошиц М. И. Геометрические характеристики сечения. Минск, 1962.
36. Макаревич С. С. Графики для подбора сечений при продольном изгибе. Минск, 1961.
37. Мациевский А. Г., Эрлих Л. Б. Рационализация расчетов при конструировании станков. М., 1962.
38. Миролубов И. Н. и др. Пособие к решению задач по сопротивлению материалов. М., 1967, 1969.
39. Напряжения и деформации в деталях и узлах машин. Под ред. Н. И. Пригоровского М., 1961.
40. Николаев Г. А. Расчет сварных конструкций М., 1962, 1965.
41. Пиковский А. А. Статика стержневых систем со сжатыми элементами. М., 1961.
42. Плюксне Н. И. Прочность при переменных напряжениях, ч. I и II. Харьков, 1962.
43. Пономарев С. Д., Бидерман В. Л., Лихарев К. К., Макушин В. М., Малинин Н. Н., Феодосьев В. И. Расчеты на прочность в машиностроении. М., т. I, 1956; т. II, 1958; т. III, 1959.
44. Протасов К. Г. Формулы для расчета рам. М., 1934.
45. Прочность в машиностроении. Сб. ст. под ред. С. Д. Пономарева. М., 1951.
46. Рабинович И. М. Курс строительной механики, ч. II. М., 1954.
47. Рабинович С. В. Расчеты на прочность при переменных напряжениях. М., 1951.
48. Работнов Ю. Н. Сопротивление материалов. М., 1962.
49. Расчеты крановых механизмов и деталей подъемно-транспортных машин. М., 1959.
50. Рубашкин А. Г. Лабораторные работы по сопротивлению материалов. М., 1966.
51. Рубинин М. В. Сопротивление материалов. М., 1961.
52. Рубинин М. В. Руководство к практическим занятиям по сопротивлению материалов. М., 1963.
53. Рудицын М. Н., Артемов П. Я., Любошиц М. И. Справочное пособие по сопротивлению материалов. Минск, 1961.
54. Серенсен С. В., Когаев В. П., Шнейдерович Р. М. Несущая способность и расчеты деталей машин на прочность М., 1963.
55. Смирнов А. Ф. и др. Сопротивление материалов. М., 1969.
56. Справочник машиностроителя, т. 3 и 4. М., 1962.
57. Справочник металлста, т. 2. М., 1960.
58. Справочник по строительной механике корабля, т. 2. Под ред. Ю. А. Шиманского. Л., 1958.
59. Справочник проектировщика расчетно-теоретический. Под ред. А. А. Уманского. М., 1960.
60. Справочник по технической механике. Под ред. А. Н. Диняка. М., 1949.
61. Сторожев Н. Ф. Элементарные расчеты прочности судовых конструкций и механизмов. М., 1962.
62. Строительные нормы и правила, ч. II, разд. А, гл. 10. Строительные конструкции и основания (основные положения проектирования). М., 1962.
63. Строительные нормы и правила, ч. II, разд. В, гл. 3. Стальные конструкции (нормы проектирования). М., 1963.
64. Строительные нормы и правила, ч. II, разд. В, гл. 4. Деревянные конструкции (нормы проектирования). М., 1962.
65. Татур Г. К. Обобщенная кривая устойчивости в безразмерных координатах. Сб. науч. тр. Белорус. политехн. ин-та, вып. 76. Минск, 1959.
66. Татур Г. К. Определение напряжений при внезапном заземлении кабеля с учетом его собственного веса. Сб. научн. тр. Криворож. горно-рудн. ин-та, вып. VIII, 1960.
67. Тимошенко С. П. Устойчивость упругих систем. М., 1955.
68. Технический справочник железнодорожника. М., 1950.
69. Уманский А. А., Вольмир А. С., Коданев А. И. Курс сопротивления материалов, ч. I. М., 1954.
70. Уманский А. А. и др. Сборник задач по сопротивлению материалов. М., 1954, 1964.
71. Феодосьев В. И. Сопротивление материалов, М., 1967.
72. Филоненко-Бородич М. М. и др. Курс сопротивления материалов. М., ч. I, 1962; ч. II, 1956.

73. Финк К., Рорбах Х. Измерение напряжений и деформаций. М., 1961.
74. Хайдун И. Графо-аналитический метод расчета стержней на продольный изгиб. Сб. «Расчеты на прочность», вып. 8. М., 1962.
75. Чернавский С. А., Ицкович Г. М. и др. Проектирование механических передач. М., 1963, 1967.
76. Чертов А. Г. Международная система единиц. М., 1963, 1967.
77. Шапошников Н. А. Механические испытания металлов. М.—Л., 1954.
78. Штаерман И. Я., Пиковский А. А. Основы теории устойчивости строительных конструкций. М., 1939.
79. Энциклопедический справочник машиностроения, т. I, кн. 2. М., 1947.
80. D e j e r G., M i n d e r E. Festigkeitslehre und Elastizitätslehre, Leipzig, 1960.



## О Г Л А В Л Е Н И Е

Предисловие ко второму изданию . . . . .	3
Из предисловия к первому изданию . . . . .	5

### Глава 1. Введение

§ 1.1. Основные задачи сопротивления материалов. Типы нагрузок (7). § 1.2. Основные допущения (8). § 1.3. Метод сечений. Внутренние силовые факторы (9). § 1.4. Напряжение (11). § 1.5. Классификация видов и методов расчета элементов конструкций (12). § 1.6. Краткие сведения о Международной системе единиц и ее применении в сопротивлении материалов (15).

### Глава 2. Центральное растяжение и сжатие прямого бруса

§ 2.1. Внутренние усилия в поперечных сечениях бруса (19). § 2.2. Напряжения в поперечных сечениях бруса (20). § 2.3. Деформации и перемещения (21). § 2.4. Потенциальная энергия упругой деформации (29). § 2.5. Основные механические характеристики материалов при статических нагрузках (30). § 2.6. Допускаемые напряжения при статическом действии нагрузок и расчеты на прочность при растяжении (сжатии) (42). § 2.7. Статически неопределимые системы с элементами, работающими на растяжение (сжатие) (50).

### Глава 3. Теория напряженного и деформированного состояния

§ 3.1. Основы теории напряженного состояния (60). § 3.2. Основы теории деформированного состояния. Связь между напряжениями и деформациями. Потенциальная энергия деформации (68).

### Глава 4. Практические расчеты на срез и смятие

§ 4.1. Общие сведения. Основные расчетные зависимости (73). § 4.2. Расчет заклепочных соединений при осевом нагружении (77). § 4.3. Расчет сварных угловых (валиковых) швов в соединениях, нагруженных осевыми силами (79). § 4.4. Расчет соединений элементов деревянных конструкций (81).

### Глава 5. Геометрические характеристики плоских сечений

§ 5.1. Статические моменты и центры тяжести плоских сечений (85). § 5.2. Моменты инерции плоских сечений (87). § 5.3. Зависимость между моментами инерции при преобразовании осей координат (88). § 5.4. Главные оси инерции и главные моменты инерции (89). § 5.5. Способы вычисления центрального момента инерции (122). § 5.6. Примеры определения главных центральных моментов инерции (125).

### Глава 6. Кручение

§ 6.1. Общие понятия (136). § 6.2. Вычисление крутящих моментов (136). § 6.3. Напряжения при кручении брусков круглого сплошного и кольцевого сечений (138). § 6.4. Определение перемещений при кручении. Потенциальная энергия деформации (142). § 6.5. Расчет брусков на прочность и жесткость при кручении (143). § 6.6. Кручение брусков сплошного некруглого поперечного сечения (151). § 6.7. Кручение тонкостенных брусков замкнутого профиля (157). § 6.8. Кручение тонкостенных брусков открытого профиля (158). § 6.9. Статически неопределимые случаи расчета на кручение (164). § 6.10. Приближенный расчет витых цилиндрических пружин с малым шагом, нагруженных осевыми силами (167).

### Глава 7. Изгиб прямого бруса

§ 7.1. Основные понятия и определения (176). § 7.2. Внутренние силовые факторы. Построение эпюр поперечных сил и изгибающих моментов (178). § 7.3. Дифференциальные зависимости между  $M_x$ ,  $Q_y$  и  $q$  (185). § 7.4. Построение эпюр внутренних силовых факторов для плоских статически определимых рам (189). § 7.5. Напряже-

ния при изгибе (194). § 7.6. Расчеты на прочность при изгибе (197). § 7.7. Перемещения при прямом изгибе (207). § 7.8. Обобщенное уравнение упругой линии (212). § 7.9. Потенциальная энергия упругой деформации при изгибе (224). § 7.10. Интеграл Мора (227). § 7.11. Вычисление интеграла Мора по правилу Верещагина (231). § 7.12. Вычисление интеграла Мора способом перемножения моментных факторов (244).

#### Глава 8. Простейшие плоские статически неопределимые стержневые системы

§ 8.1. Основные понятия (253). § 8.2. Статически неопределимые системы. Степень статической неопределимости (254). § 8.3. Основная и эквивалентная системы. Канонические уравнения метода сил (256). § 8.4. Вычисление коэффициентов и свободных членов канонических уравнений (258). § 8.5. Построение эпюр изгибающих моментов, поперечных и продольных сил (261). § 8.6. Определение перемещений в статически неопределимых системах от нагрузки (263). § 8.7. Примеры расчета простейших статически неопределимых систем методом сил (263). § 8.8. Расчет статически неопределимых рам по готовым формулам (279). § 8.9. Применение метода сил к расчету статически неопределимых балок (290).

#### Глава 9. Косой изгиб. Растяжение (сжатие) с изгибом

§ 9.1. Косой изгиб (294). § 9.2. Растяжение (сжатие) с изгибом (307).

#### Глава 10. Гипотезы прочности и их применение к расчету прямого бруса

§ 10.1. Гипотезы прочности (318). § 10.2. Применение гипотез прочности к расчету прямого бруса (322).

#### Глава 11. Расчет тонкостенных резервуаров и толстостенных цилиндров

§ 11.1. Расчет тонкостенных сосудов, находящихся под действием внутреннего давления (340). § 11.2. Расчет толстостенных цилиндров, находящихся под действием внутреннего и наружного давления (350).

#### Глава 12. Устойчивость сжатых стержней

§ 12.1. Расчет сжатых стержней на устойчивость по формуле Эйлера и по эмпирическим формулам (359). § 12.2. Расчет сжатых стержней на устойчивость по коэффициентам продольного изгиба (372). § 12.3. Продольно-поперечный изгиб (385).

#### Глава 13. Расчеты на прочность при напряжениях, циклически изменяющихся во времени

§ 13.1. Основные понятия и определения (391). § 13.2. Кривая выносливости и различные факторы, влияющие на величину предела выносливости (393). § 13.3. Схематизированные диаграммы предельных амплитуд и расчетные формулы (398). § 13.4. Справочные данные к расчетам на выносливость (402). § 13.5. Примеры расчетов на прочность при переменных напряжениях (409).

#### Глава 14. Задачи динамики в сопротивлении материалов

§ 14.1. Определение напряжений при заданных ускорениях (420). § 14.2. Определение напряжений и перемещений при ударе (428). § 14.3. Учет массы конструкции, испытывающей удар (430).

#### Глава 15. Расчет по предельным нагрузкам

§ 15.1. Основные понятия (436). § 15.2. Расчеты при растяжении и сжатии (437). § 15.3. Расчеты при кручении бруса круглого поперечного сечения (441). § 15.4. Расчеты при изгибе (445). § 15.5. Расчеты при совместном изгибе и растяжении (сжатии), изгибе и кручении (450).

Л и т е р а т у р а . . . . . 460